

Integración por partes: ejercicios de matemáticas resueltos paso a paso

11 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 4 temas que trae esta selección.

Material propio de solucionariomatematicas.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionariomatematicas.es

Integración por partes: ejercicios de matemáticas resueltos paso a paso

Polinomio por exponencial

Lo que hay que saber

La fórmula es $\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$, y todo el ejercicio se juega en **elegir bien u**: el que al derivarlo se simplifique. $\triangle$ Si el polinomio tiene grado 2, hay que aplicar partes dos veces.

1 Calcula $\int x \cdot e^x \, dx$.

Solución

Se elige $u = x$ y $dv = e^x \, dx$.

$u = x$ (su derivada es 1, más sencilla) y $dv = e^x \, dx$. Entonces $du = dx$ y $v = e^x$.

Resultado: $x \cdot e^x - e^x + C$.

2 Calcula $\int x \cdot e^{2x} \, dx$.

Solución

Se elige $u = x$ y $dv = e^{2x} \, dx$.

$u = x$ y $dv = e^{2x} \, dx$, así que $v = e^{2x}/2$.

Resultado: $x \cdot e^{2x}/2 - e^{2x}/4 + C$.

3 Calcula $\int x^2 \cdot e^x \, dx$.

Solución

Se elige $u = x^2$ y $dv = e^x \, dx$.

$\triangle$ Aquí hay que aplicar partes **DOS veces**: al hacerlo una vez queda $\int 2x \cdot e^x \, dx$, que es el ejercicio anterior.

Resultado: $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$.

Polinomio por seno o coseno

Lo que hay que saber

Mismo esquema: el **polinomio es u** (su derivada baja de grado) y la trigonométrica es dv . $\triangle$ Cuidado con los signos: la primitiva del seno es **menos** coseno.

4 Calcula $\int x \cdot \sin x \, dx$.

Solución

Se elige $u = x$ y $dv = \sin x \, dx$.

$u = x$ y $dv = \sin x \, dx$, así que $du = dx$ y $v = -\cos x$.

Resultado: $-x \cdot \cos x + \sin x + C$.

5 Calcula $\int x \cdot \cos x \, dx$.

Solución

Se elige $u = x$ y $dv = \cos x \, dx$.

$u = x$ y $dv = \cos x \, dx$, así que $v = \sin x$.

Resultado: $x \cdot \sin x + \cos x + C$.

6 Calcula $\int 2x \cdot \sin x \, dx$.

Solución

Se elige $u = 2x$ y $dv = \sin x \, dx$.

El 2 se puede sacar fuera desde el principio: $\int 2x \cdot \sin x \, dx = 2 \cdot \int x \cdot \sin x \, dx$.

Resultado: $-2x \cdot \cos x + 2 \sin x + C$.

Integrales con logaritmos

Lo que hay que saber

- Aquí se invierte la intuición: **u es el logaritmo**, no el polinomio. Y en $\int \ln x \, dx$, que parece que no tiene dos factores, se toma $dv = dx$. Son los dos casos que más se fallan del tema.

7 Calcula $\int \ln x \, dx$.

Solución

Se elige $u = \ln x$ y $dv = dx$.

⚠ Parece que no hay dos factores, pero sí: se toma $dv = dx$, así que $v = x$. Y $u = \ln x$, cuya derivada ($1/x$) es mucho más sencilla.

Resultado: $x \cdot \ln x - x + C$.

8 Calcula $\int x \cdot \ln x \, dx$.

Solución

Se elige $u = \ln x$ y $dv = x \, dx$.

- Aquí u es el **logaritmo**, aunque el polinomio parezca «más fácil»: lo que manda es que la derivada de u se simplifique, y la de $\ln x$ es $1/x$.

Resultado: $x^2/2 \cdot \ln x - x^2/4 + C$.

9 Calcula $\int \ln(2x) \, dx$.

Solución

Se elige $u = \ln(2x)$ y $dv = dx$.

Igual que el primero: $u = \ln(2x)$ y $dv = dx$. La derivada de $\ln(2x)$ también es $1/x$.

Resultado: $x \cdot \ln(2x) - x + C$.

Cíclicas: cuando la integral vuelve a aparecer

Lo que hay que saber

Cuando tras aplicar partes dos veces **vuelve a salir la integral de partida**, no hay que seguir: se le llama I , se despeja como en una ecuación y se acabó. Es el caso más elegante del tema.

10 Calcula $\int e^x \cdot \sin x \, dx$.

Solución

Se elige $u = e^x$ y $dv = \sin x \, dx$.

⚠ Al aplicar partes DOS veces vuelve a salir la integral de partida. Eso no es un callejón sin salida: se le llama I , queda $I = (\text{algo}) - I$, y se **despeja**: $2I = (\text{algo})$, así que $I = (\text{algo})/2$.

Resultado: $e^x(\sin x - \cos x)/2 + C$.

11 Calcula $\int e^x \cdot \cos x \, dx$.

Solución

Se elige $u = e^x$ y $dv = \cos x \, dx$.

El mismo truco: se aplica partes dos veces, reaparece la integral y se despeja.

Resultado: $e^x(\sin x + \cos x)/2 + C$.