

Integrales: ejercicios de matemáticas resueltos paso a paso

16 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 4 temas que trae esta selección.

Material propio de solucionariomatematicas.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionariomatematicas.es

Integrales: ejercicios de matemáticas resueltos paso a paso

Integrales inmediatas

Lo que hay que saber

Integrar es **deshacer una derivada**, y por eso la comprobación es siempre la misma: si derivas el resultado, tienes que volver al integrando. La regla de la potencia —subir uno el exponente y dividir por el nuevo— resuelve casi todas. ▀ Y no olvides el **+ C**: hay infinitas primitivas.

1 Calcula $\int x^3 dx$.

Solución

La regla de la potencia: se sube uno el exponente y se divide por el nuevo exponente.

Resultado: $x^4/4 + C$.

△ Comprobación que vale siempre: si se deriva $x^4/4$ se vuelve al integrando.

2 Calcula $\int x^5 dx$.

Solución

Igual: exponente $5 \rightarrow 6$, y se divide entre 6.

Resultado: $x^6/6 + C$.

△ Comprobación que vale siempre: si se deriva $x^6/6$ se vuelve al integrando.

3 Calcula $\int 1/x dx$.

Solución

△ Esta es la excepción de la regla de la potencia: con exponente -1 no se puede subir a 0 y dividir entre 0. Su primitiva es el logaritmo.

Resultado: $\ln|x| + C$.

△ Comprobación que vale siempre: si se deriva $\ln|x|$ se vuelve al integrando.

4 Calcula $\int e^x dx$.

Solución

La exponencial es su propia primitiva: no cambia.

Resultado: $e^x + C$.

△ Comprobación que vale siempre: si se deriva e^x se vuelve al integrando.

5 Calcula $\int \cos x dx$.

Solución

Al derivar el seno sale el coseno, así que al revés también.

Resultado: $\sin x + C$.

△ Comprobación que vale siempre: si se deriva $\sin x$ se vuelve al integrando.

6 Calcula $\int \text{sen } x \, dx$.

Solución

⚠ Con el signo cambiado: la derivada del coseno es MENOS seno, así que la primitiva del seno es MENOS coseno.

Resultado: $-\cos x + C$.

⚠ Comprobación que vale siempre: si se deriva $-\cos x$ se vuelve al integrando.

Integrar un polinomio

Lo que hay que saber

Término a término, con la regla de la potencia en cada uno. ▪ Si hay un producto o un cuadrado, primero se **desarrolla**: no existe ninguna regla para integrar un producto tal cual.

7 Calcula $\int (3x^2 + 2x) \, dx$.

Solución

Se integra **término a término**: cada uno con la regla de la potencia.

Resultado: $x^3 + x^2 + C$.

8 Calcula $\int (4x^3 - 6x + 5) \, dx$.

Solución

Término a término, y el 5 (que es $5x^0$) da $5x$.

Resultado: $x^4 - 3x^2 + 5x + C$.

9 Calcula $\int (x^2 - 1)^2 \, dx$.

Solución

▪ Primero se desarrolla el cuadrado: $x^4 - 2x^2 + 1$. No hay ninguna regla para integrar un producto tal cual.

Resultado: $x^5/5 - 2x^3/3 + x + C$.

10 Calcula $\int (6x^5 + 2) \, dx$.

Solución

Término a término.

Resultado: $x^6 + 2x + C$.

Cambio de variable

Lo que hay que saber

La pista es siempre la misma: en el integrando está una función y, multiplicando, **su derivada**. Entonces se llama u a la función y la integral se vuelve inmediata.

11 Calcula $\int 2x \cdot (x^2 + 1)^3 dx$.

Solución

Se ve que **$2x$ es la derivada de $x^2 + 1$** : con $u = x^2 + 1$ queda $\int u^3 du$.

Resultado: **$(x^2 + 1)^4 / 4 + C$** .

12 Calcula $\int 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$.

Solución

$3x^2$ es la derivada de x^3 , así que con $u = x^3$ queda $\int e^u du$.

Resultado: **$e^{x^3} + C$** .

13 Calcula $\int \cos x \cdot \sin^2 x dx$.

Solución

El coseno es la derivada del seno: con $u = \sin x$ queda $\int u^2 du$.

Resultado: **$\sin^3 x / 3 + C$** .

Integral definida: regla de Barrow

Lo que hay que saber

La **regla de Barrow**: se busca una primitiva y se resta su valor entre los dos extremos. $\triangle$ Aquí la constante no hace falta, porque al restar se va. El resultado ya no es una función: es un **número**.

14 Calcula $\int$ de 0 a 2 de $x^2 dx$.

Solución

Una primitiva es $x^3/3$.

$F(2) - F(0) = \mathbf{8/3}$.

15 Calcula $\int$ de 1 a 3 de $2x dx$.

Solución

Una primitiva es x^2 .

$F(3) - F(1) = \mathbf{8}$.

16 Calcula $\int$ de 0 a 1 de $(3x^2 + 1) dx$.

Solución

Una primitiva es $x^3 + x$.

$F(1) - F(0) = \mathbf{2}$.