Ejercicios de Matemáticas I de 1.º de Bachillerato resueltos

48 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 14 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Números reales, intervalos y valor absoluto · Intervalos y ecuaciones con valor absoluto **(ejercicios 1, 2, 3)**

Radicales y exponente racional · Simplificar y racionalizar **(ejercicios 4, 5, 6)**

Logaritmos · Definición, propiedades y ecuaciones **(ejercicios 7, 8, 9, 10)**

Polinomios, Ruffini y teorema del resto · Dividir, factorizar y hallar restos **(ejercicios 11, 12, 13, 14)**

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas · Bicuadradas, irracionales y sistemas **(ejercicios 15, 16, 17, 18)**

Trigonometría: razones y triángulos rectángulos · Razones y resolver triángulos **(ejercicios 19, 20, 21, 22)**

Teoremas del seno y del coseno · Triángulos que no son rectángulos **(ejercicios 23, 24, 25)**

Números complejos · Operar, dividir y forma polar **(ejercicios 26, 27, 28)**

Vectores y ecuación de la recta · Módulo, producto escalar y rectas **(ejercicios 29, 30, 31, 32)**

Funciones: dominio y parábola · Dominio, cortes, vértice y composición **(ejercicios 33, 34, 35)**

Límites y continuidad · Indeterminaciones y discontinuidades **(ejercicios 36, 37, 38)**

Derivadas · Definición y reglas **(ejercicios 39, 40, 41, 42)**

Aplicaciones de la derivada · Tangente, crecimiento y máximos **(ejercicios 43, 44, 45)**

Distribución binomial y normal · Calcular probabilidades **(ejercicios 46, 47, 48)**

Material propio de solucionariomatematicas.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionariomatematicas.es

Qué entra y qué no. Esta página es de **Matemáticas I**, la de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Entran los catorce bloques del índice, todos con ejercicios resueltos, y tres de ellos llevan su figura. **No entran**: la matemática financiera, las tablas de contingencia ni el muestreo, que son de **Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I**; ni las integrales, los determinantes, las matrices ni los límites con la regla de L'Hôpital, que son de 2.º de Bachillerato. Estos ejercicios no sustituyen al temario ni a los del libro.

Ejercicios de Matemáticas I de 1.º de Bachillerato resueltos

Números reales, intervalos y valor absoluto

Lo que hay que saber

Un **intervalo** se escribe con corchete si el extremo entra y con paréntesis si no entra. El infinito nunca entra, así que siempre lleva paréntesis.

El **valor absoluto** de un número es su distancia al cero: $|x| = x$ si x es positivo o cero, y $|x| = -x$ si es negativo.

Una ecuación $|A| = k$, con k positivo, se parte en **dos**: $A = k$ y $A = -k$.

Una inecuación $|A| < k$ equivale a $\mathbf{-k < A < k}$, y $|A| > k$ equivale a $A < -k$ *o* $A > k$.

1 Escribe como intervalo el conjunto de los números que cumplen a la vez $x \geq -2$ y $x < 5$.

Solución

El -2 **sí** entra, porque la desigualdad lleva el igual, así que ese extremo va con corchete.

El 5 **no** entra, porque es «menor que», así que ese extremo va con paréntesis.

El intervalo es $\mathbf{[-2, 5)}$.

> **Ojo.** El tipo de paréntesis no es decoración. Escribir $[-2, 5]$ metería el 5, que no cumple $x < 5$.

2 Resuelve: $|2x - 6| = 4$.

Solución

Al ser un valor absoluto igual a un número positivo, hay dos posibilidades.

Primera: $2x - 6 = 4$, de donde $2x = 10$ y $\mathbf{x = 5}$.

Segunda: $2x - 6 = -4$, de donde $2x = 2$ y $\mathbf{x = 1}$.

Comprobación: $|2 \cdot 5 - 6| = |4| = 4$ y $|2 \cdot 1 - 6| = |-4| = 4$. Las dos valen.

3 Resuelve y escribe la solución como intervalo: $|x - 3| < 2$.

Solución

Que el valor absoluto sea menor que 2 quiere decir que $x - 3$ está entre -2 y 2: $-2 < x - 3 < 2$.

Se suma 3 en los tres miembros: $1 < x < 5$.

La solución es el intervalo $\mathbf{(1, 5)}$, con los dos extremos fuera.

También se lee así: los números que están a menos de 2 unidades del 3.

Radicales y exponente racional

Lo que hay que saber

Para **extraer factores** de una raíz cuadrada se descompone el radicando en factores primos: cada par de factores iguales sale fuera una vez.

Solo se pueden **sumar o restar** radicales semejantes, los que quedan con el mismo radicando una vez simplificados.

Un **exponente racional** es una raíz: a elevado a m/n es la raíz n-ésima de a elevado a m.

Racionalizar un denominador con una suma o resta de raíces se hace multiplicando arriba y abajo por el **conjugado**, porque suma por diferencia da diferencia de cuadrados y la raíz desaparece.

4 Simplifica: $\sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{8}$.

Solución

Se extraen factores. $50 = 2 \cdot 5^2$, así que $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

$18 = 2 \cdot 3^2$, así que $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Y $8 = 2^3$, así que $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Los tres son semejantes: $(5 - 3 + 2)\sqrt{2} = \mathbf{4\sqrt{2}}$.

> **Ojo.** $\sqrt{50} - \sqrt{18}$ no es $\sqrt{32}$. Las raíces no se restan por dentro: hay que extraer factores primero.

5 Calcula sin calculadora: $8^{2/3}$ y $16^{3/4}$.

Solución

El denominador del exponente es el índice de la raíz y el numerador, la potencia.

$8^{2/3}$ es la raíz cúbica de 8 al cuadrado. La raíz cúbica de 8 es 2, y $2^2 = \mathbf{4}$.

$16^{3/4}$ es la raíz cuarta de 16 elevada al cubo. La raíz cuarta de 16 es 2, y $2^3 = \mathbf{8}$.

Conviene hacer primero la raíz y después la potencia: los números son mucho más pequeños.

6 Racionaliza y simplifica: $6 / (\sqrt{5} - 1)$.

Solución

Se multiplica arriba y abajo por el conjugado del denominador, que es $\sqrt{5} + 1$.

Abajo queda una suma por diferencia: $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = 5 - 1 = 4$.

Arriba: $6(\sqrt{5} + 1)$.

Queda $6(\sqrt{5} + 1) / 4$, y simplificando entre 2: $\mathbf{3(\sqrt{5} + 1) / 2}$.

Logaritmos

Lo que hay que saber

El **logaritmo** en base a de un número es el exponente al que hay que elevar a para obtener ese número.

Propiedades: el logaritmo de un **producto** es la suma de los logaritmos; el de un **cociente**, la resta; y el de una **potencia**, el exponente por el logaritmo.

Cambio de base: el logaritmo en base a de x es el logaritmo decimal de x dividido entre el logaritmo decimal de a.

⚠ Solo existe el logaritmo de números **positivos**. Por eso, en una ecuación logarítmica, las soluciones hay que comprobarlas en la ecuación original.

7 Calcula sin calculadora: $\log_2 32$, $\log 1000$ y $\log_3 (1/9)$.

Solución

$\log_2 32$ pregunta a qué exponente hay que elevar 2 para que dé 32. Como $2^5 = 32$, vale **5**.

$\log 1000$ es en base 10. Como $10^3 = 1000$, vale **3**.

$\log_3 (1/9)$: como $3^{-2} = 1/9$, vale **−2**.

> **Ojo.** El logaritmo de un número menor que 1 (y mayor que 0) es negativo. No es un error de signo.

8 Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$ y $\log 3 = 0{,}4771$, calcula $\log 6$, $\log 1{,}5$ y $\log 8$.

Solución

$\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}3010 + 0{,}4771 =$ **0,7781**.

$\log 1{,}5 = \log (3/2) = \log 3 - \log 2 = 0{,}4771 - 0{,}3010 =$ **0,1761**.

$\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 = 3 \cdot 0{,}3010 =$ **0,9030**.

> **Ojo.** Log 6 no es log 2 · log 3. El logaritmo de un producto es la SUMA de los logaritmos, no el producto. Y los tres resultados son aproximados, porque los datos de partida ya vienen redondeados a cuatro decimales.

9 Resuelve: $\log x + \log (x - 3) = 1$.

Solución

Se junta el primer miembro con la propiedad del producto: $\log [x(x - 3)] = 1$.

Como el logaritmo es decimal, eso quiere decir que $x(x - 3) = 10^1 = 10$.

Queda la ecuación $x^2 - 3x - 10 = 0$, cuyas soluciones son $x = 5$ y $x = -2$.

Hay que **comprobar**: con $x = -2$ habría que calcular $\log (-2)$, que no existe, así que se descarta.

La única solución es **x = 5**.

> **Ojo.** Descartar la solución negativa no es optativo. Dar las dos como válidas es el fallo típico de las ecuaciones logarítmicas.

10 Calcula $\log_2 10$ con la fórmula del cambio de base, usando log 2 = 0,3010. Da el resultado con dos decimales.

Solución

Por el cambio de base: $\log_2 10 = \log 10 / \log 2$.

El logaritmo decimal de 10 es 1, así que queda 1 / 0,3010.

Dividiendo: 1 / 0,3010 = 3,3222…, es decir, **≈ 3,32**.

Tiene sentido: $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$, así que el resultado tenía que estar entre 3 y 4.

Polinomios, Ruffini y teorema del resto

Lo que hay que saber

La **regla de Ruffini** sirve para dividir entre x − a: se bajan los coeficientes (con los ceros de los términos que falten), se multiplica por a y se suma.

El **teorema del resto** dice que el resto de dividir P(x) entre x − a es P(a). Así se conoce el resto sin hacer la división.

Si P(a) = 0, entonces x − a es un **factor** de P(x). Es por donde se empieza a factorizar: se prueban los divisores del término independiente.

En toda división de polinomios se cumple **dividendo = divisor · cociente + resto**, y el grado del resto es menor que el del divisor.

11 Divide por Ruffini $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ entre x − 1.

Solución

Los coeficientes son 1, −2, −5 y 6, y se divide entre x − 1, así que a = 1.

Se baja el 1. Se multiplica por 1 y se suma al −2: −2 + 1 = −1.

Se multiplica −1 por 1 y se suma al −5: −5 − 1 = −6.

Se multiplica −6 por 1 y se suma al 6: 6 − 6 = 0.

El cociente es $\mathbf{x^2 - x - 6}$ y el resto, **0**.

Comprobación: $(x - 1)(x^2 - x - 6) = x^3 - x^2 - 6x - x^2 + x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

12 Factoriza $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Solución

El resto de dividir entre x − 1 es 0, así que x − 1 es un factor y el cociente es $x^2 - x - 6$.

Ahora se factoriza el de segundo grado. Sus raíces salen de $x^2 - x - 6 = 0$: el discriminante es 1 + 24 = 25, y las raíces, (1 ± 5)/2, es decir, 3 y −2.

Entonces $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$.

La factorización completa es $\mathbf{(x - 1)(x - 3)(x + 2)}$.

Comprobación rápida: el producto de los términos independientes es (−1)(−3)(2) = 6, que es el término independiente del polinomio.

13 Halla, sin hacer la división, el resto de dividir $x^4 - 3x^2 + 2$ entre $x + 2$.

Solución

Por el teorema del resto, el resto de dividir entre $x - a$ es $P(a)$. Aquí el divisor es $x + 2$, que es $x - (-2)$, así que $a = \mathbf{-2}$.

Se sustituye: $P(-2) = (-2)^4 - 3 \cdot (-2)^2 + 2 = 16 - 12 + 2$.

El resto es **6**.

> **Ojo.** El signo de a. Con $x + 2$ el valor que se sustituye es -2, no 2. Con 2 saldría también 6 por ser las potencias pares, pero en cuanto haya un término de grado impar los dos resultados se separan.

14 Divide $2x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ entre $x^2 - 1$ y comprueba el resultado.

Solución

El divisor es de grado 2, así que no se puede usar Ruffini: se hace la división larga.

$2x^3$ entre x^2 da $2x$. Se multiplica: $2x(x^2 - 1) = 2x^3 - 2x$, y se resta: quedan $3x^2 - 2x + 1$.

$3x^2$ entre x^2 da 3. Se multiplica: $3(x^2 - 1) = 3x^2 - 3$, y se resta: queda $-2x + 4$.

Como $-2x + 4$ es de grado menor que el divisor, ahí se para. El cociente es $\mathbf{2x + 3}$ y el resto, $\mathbf{-2x + 4}$.

Comprobación: $(x^2 - 1)(2x + 3) + (-2x + 4) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 - 2x + 4 = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1$.

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Lo que hay que saber

Una **bicuadrada** se resuelve con el cambio $t = x^2$: queda una de segundo grado, y después se deshace el cambio (cada t positivo da dos x).

En una **ecuación irracional** se aísla la raíz y se elevan al cuadrado los dos miembros. ⚠ Elevar al cuadrado puede crear soluciones falsas, así que hay que **comprobarlas todas** en la ecuación original.

Una **inecuación de segundo grado** se resuelve hallando las raíces y mirando el signo del polinomio en cada tramo de la recta.

Un **sistema no lineal** se suele resolver por sustitución: se despeja una incógnita en la ecuación de primer grado y se lleva a la otra.

15 Resuelve: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Solución

Con el cambio $t = x^2$ queda $t^2 - 13t + 36 = 0$.

El discriminante es $169 - 144 = 25$, así que $t = (13 \pm 5)/2$, es decir, $t = 9$ y $t = 4$.

Se deshace el cambio. De $x^2 = 9$ salen $x = 3$ y $x = -3$; de $x^2 = 4$ salen $x = 2$ y $x = -2$.

Las cuatro soluciones son $\mathbf{x = 3, x = -3, x = 2}$ **y** $\mathbf{x = -2}$.

> **Ojo.** Cada valor positivo de t da DOS soluciones, la positiva y la negativa. Quedarse solo con las positivas deja la mitad de las soluciones fuera.

16 Resuelve la inecuación $x^2 - 5x + 6 > 0$ y escribe la solución con intervalos.

Solución

Primero las raíces de $x^2 - 5x + 6 = 0$: el discriminante es $25 - 24 = 1$, y las raíces son $(5 \pm 1)/2$, es decir, 3 y 2.

La parábola está abierta hacia arriba (el coeficiente de x^2 es positivo), así que es positiva fuera de las raíces y negativa entre ellas.

Se comprueba con un valor de cada tramo: en $x = 0$ sale 6 (positivo), en $x = 2{,}5$ sale $-0{,}25$ (negativo) y en $x = 4$ sale 2 (positivo).

La solución es **$(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$**.

> **Ojo.** Los extremos quedan fuera porque la desigualdad es estricta: en $x = 2$ y en $x = 3$ el polinomio vale 0, y 0 no es mayor que 0.

---

17 Resuelve el sistema $x + y = 5$, $x^2 + y^2 = 13$.

Solución

De la primera se despeja $y = 5 - x$.

Se sustituye en la segunda: $x^2 + (5 - x)^2 = 13$, es decir, $x^2 + 25 - 10x + x^2 = 13$.

Queda $2x^2 - 10x + 12 = 0$, y dividiendo entre 2: $x^2 - 5x + 6 = 0$, cuyas raíces son 2 y 3.

Para $x = 2$, $y = 3$; para $x = 3$, $y = 2$.

Las soluciones son **(2, 3) y (3, 2)**.

Comprobación: $2 + 3 = 5$ y $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$.

---

18 Resuelve: $\sqrt{(x + 7)} = x + 1$.

Solución

Se elevan al cuadrado los dos miembros: $x + 7 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Queda $x^2 + x - 6 = 0$, cuyo discriminante es $1 + 24 = 25$ y cuyas raíces son $(-1 \pm 5)/2$, es decir, 2 y -3.

Se comprueban en la ecuación **original**. Con $x = 2$: $\sqrt{9} = 3$ y $2 + 1 = 3$, así que vale.

Con $x = -3$: $\sqrt{4} = 2$, pero $-3 + 1 = -2$, y 2 no es -2, así que no vale.

La única solución es **$x = 2$**.

> **Ojo.** La raíz cuadrada es siempre positiva o cero. La solución falsa aparece porque al elevar al cuadrado se pierde el signo, no porque la cuenta esté mal.

Trigonometría: razones y triángulos rectángulos

Lo que hay que saber

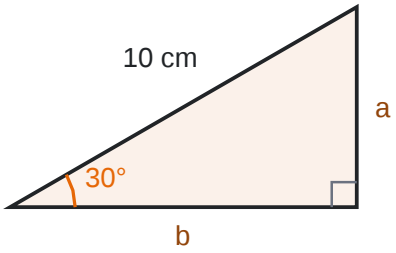
En un triángulo rectángulo: el **seno** de un ángulo agudo es el cateto opuesto entre la hipotenusa, el **coseno** es el contiguo entre la hipotenusa y la **tangente**, el opuesto entre el contiguo.

Razones de los ángulos de siempre: sen 30° = 1/2, cos 30° = √3/2, sen 45° = cos 45° = √2/2, sen 60° = √3/2, cos 60° = 1/2 y tg 45° = 1.

La **identidad fundamental** es $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Con ella se pasa de una razón a la otra, cuidando el signo según el cuadrante.

Para **reducir al primer cuadrante**: sen (180° − α) = sen α y cos (180° + α) = −cos α; en general, el valor absoluto es el mismo y lo que cambia es el signo, que no lo decide el cuadrante por sí solo: lo deciden el cuadrante **y de qué razón se trata**, porque un mismo cuadrante da signos distintos a dos razones: en el segundo, el seno es positivo y el coseno negativo.

19 Mira la figura: la hipotenusa mide 10 cm y uno de los ángulos agudos, 30°. Calcula los dos catetos.



Triángulo rectángulo: el ángulo recto está marcado con un cuadradito a la derecha y el ángulo de 30° está en el vértice de la izquierda. La hipotenusa mide 10 cm. El cateto vertical se llama a y el horizontal, b.

Solución

El cateto **a** es el opuesto al ángulo de 30°, así que se usa el seno: sen 30° = a / 10.

Como sen 30° = 1/2, queda a = 10 · 1/2 = **5 cm**.

El cateto **b** es el contiguo, así que se usa el coseno: cos 30° = b / 10.

Como cos 30° = √3/2, queda b = 10 · √3/2 = **5√3 cm ≈ 8,66 cm**.

Comprobación con Pitágoras: $5^2 + (5\sqrt{3})^2 = 25 + 75 = 100$, que es 10^2.

> **Ojo.** El valor exacto es 5√3; 8,66 es solo una aproximación. En Bachillerato la respuesta es la primera, y por eso se escribe con ≈ y no con =.

20 Calcula el valor exacto de sen 60° · cos 30° − tg 45°.

Solución

sen 60° = √3/2 y cos 30° = √3/2, así que el producto es (√3/2) · (√3/2) = 3/4, porque √3 · √3 = 3.

tg 45° = 1.

Restando: 3/4 − 1 = **−1/4**, es decir, −0,25.

> **Ojo.** El resultado es negativo, y eso no es ningún error: 3/4 es menor que 1. Dar 1/4 es restar al revés.

21 Si sen α = 3/5 y α está en el primer cuadrante, calcula cos α y tg α.

Solución

Por la identidad fundamental: $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha = 1 - 9/25 = 16/25$.

En el primer cuadrante el coseno es positivo, así que cos α = **4/5**.

La tangente es el seno entre el coseno: (3/5) : (4/5) = **3/4**.

> **Ojo.** La raíz de 16/25 son 4/5 y −4/5. El cuadrante es el que decide, y aquí manda que sea positivo.

22 Calcula, reduciendo al primer cuadrante, sen 150° y cos 240°.

Solución

150° está en el segundo cuadrante, donde el seno es positivo, y 150° = 180° − 30°.

Entonces sen 150° = sen 30° = **1/2**.

240° está en el tercer cuadrante, donde el coseno es negativo, y 240° = 180° + 60°.

Entonces cos 240° = −cos 60° = **−1/2**.

> **Ojo.** Lo que cambia al reducir es el signo, y el signo lo dan el cuadrante y la razón, no el cuadrante solo: aquí el segundo cuadrante deja el seno positivo y el tercero deja el coseno negativo. Olvidarlo convierte −1/2 en 1/2, que es otro número.

Teoremas del seno y del coseno

Lo que hay que saber

El **teorema del coseno** dice que el cuadrado de un lado es la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble de su producto por el coseno del ángulo que forman. Es la generalización de Pitágoras.

El **teorema del seno** dice que cada lado dividido entre el seno de su ángulo opuesto da siempre el mismo valor.

Se usa el del **coseno** cuando se conocen dos lados y el ángulo que forman, o los tres lados; el del **seno**, cuando se conocen un lado y su ángulo opuesto y algo más.

El **área** de un triángulo cualquiera es la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo que forman.

23 En un triángulo, dos lados miden 7 cm y 5 cm y el ángulo que forman es de 60°. Calcula el tercer lado.

Solución

Se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, así que se usa el teorema del coseno:
$a^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 60°$.

Como cos 60° = 1/2: $a^2 = 49 + 25 - 70 \cdot 1/2 = 74 - 35 = 39$.

El lado es **√39 cm ≈ 6,24 cm**.

Tiene sentido: con 90° habría salido √74 ≈ 8,60, y con un ángulo menor el lado opuesto tiene que ser menor.

---

24 En un triángulo, un lado mide 10 cm y su ángulo opuesto es de 30°. Otro ángulo mide 45°. ¿Cuánto mide el lado opuesto a ese segundo ángulo?

Solución

Se conocen un lado y su ángulo opuesto, así que se usa el teorema del seno: 10 / sen 30° = b / sen 45°.

Despejando: b = 10 · sen 45° / sen 30°.

Como sen 45° = √2/2 y sen 30° = 1/2: b = 10 · (√2/2) : (1/2) = 10 · √2.

El lado mide **10√2 cm ≈ 14,14 cm**.

> **Ojo.** Dividir entre 1/2 es multiplicar por 2. Quien multiplique por 1/2 en vez de dividir obtiene 5√2 ≈ 7,07 cm, **la mitad** de lo que mide.

---

25 Calcula el área de un triángulo cuyos lados de 8 cm y 6 cm forman un ángulo de 30°.

Solución

El área es la mitad del producto de los dos lados por el seno del ángulo que forman:
A = (1/2) · 8 · 6 · sen 30°.

Como sen 30° = 1/2: A = (1/2) · 48 · (1/2) = 48/4.

El área es **12 cm²**.

> **Ojo.** La fórmula base por altura entre 2 también vale, pero la altura aquí no es ninguno de los dos lados: habría que calcularla antes, y sale 6 · sen 30° = 3.

Números complejos

Lo que hay que saber

La unidad imaginaria cumple $\mathbf{i^2 = -1}$. Un complejo en forma binómica se escribe a + bi.

Se **suman** y se restan por separado la parte real y la imaginaria. Se **multiplican** como dos binomios, sustituyendo i^2 por −1.

Para **dividir** se multiplica numerador y denominador por el **conjugado** del denominador: así el denominador queda real.

El **módulo** es la raíz de la suma de los cuadrados de las dos partes, y el **argumento** es el ángulo cuya tangente es la parte imaginaria entre la real.

26 Calcula (3 + 2i) + (1 − 5i) y (3 + 2i) · (1 − 5i).

Solución

La suma va por partes: las reales, 3 + 1 = 4; las imaginarias, 2 − 5 = −3.

La suma es **4 − 3i**.

El producto se hace como el de dos binomios: $3 \cdot 1 + 3 \cdot (-5i) + 2i \cdot 1 + 2i \cdot (-5i) = 3 - 15i + 2i - 10i^2$.

Como $i^2 = -1$, el último término es $-10 \cdot (-1) = +10$.

Queda 3 + 10 − 13i = **13 − 13i**.

> **Ojo.** El signo del término con i^2. Tratarlo como si i^2 fuera 1 daría −7 − 13i, con la parte real cambiada.

27 Calcula (2 + i) / (1 − i).

Solución

Se multiplica arriba y abajo por el conjugado del denominador, 1 + i.

Abajo: $(1 - i)(1 + i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$.

Arriba: $(2 + i)(1 + i) = 2 + 2i + i + i^2 = 2 + 3i - 1 = 1 + 3i$.

El resultado es **(1 + 3i) / 2**, es decir, 0,5 + 1,5i.

28 Calcula el módulo y el argumento de $z = 1 + \sqrt{3}\, i$, y escríbelo en forma polar.

Solución

El módulo es la raíz de la suma de los cuadrados: $\sqrt{(1^2 + (\sqrt{3})^2)} = \sqrt{(1 + 3)} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$.

El argumento cumple $\text{tg}\ \alpha = \sqrt{3} / 1 = \sqrt{3}$. El ángulo del primer cuadrante cuya tangente es $\sqrt{3}$ es **60°**.

Como las dos partes son positivas, z está en el primer cuadrante y ese es el argumento bueno.

En forma polar: $\mathbf{2_{60°}}$.

Vectores y ecuación de la recta

Lo que hay que saber

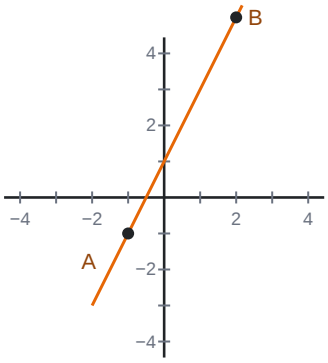
El **vector** que va de A a B tiene por coordenadas las del extremo menos las del origen. Su **módulo** es la raíz de la suma de los cuadrados de sus coordenadas.

El **producto escalar** de dos vectores es la suma de los productos de sus coordenadas. Dos vectores son **perpendiculares** si su producto escalar vale 0.

La **pendiente** de la recta que pasa por dos puntos es la diferencia de las y partida por la diferencia de las x. Con la pendiente y un punto se escribe la ecuación punto-pendiente.

La **distancia** de un punto a una recta $Ax + By + C = 0$ es el valor absoluto de $Ax + By + C$ en ese punto, dividido entre la raíz de $A^2 + B^2$.

29 Mira la figura: la recta pasa por A (−1, −1) y por B (2, 5). Halla su pendiente y su ecuación explícita.



Ejes de coordenadas con la recta naranja que pasa por los puntos A, abajo a la izquierda del origen, y B, arriba a la derecha. Las rayitas de los ejes van de una en una y están numeradas de dos en dos.

Solución

El vector que va de A a B es (2 − (−1), 5 − (−1)) = (3, 6).

La pendiente es la diferencia de las y entre la diferencia de las x: 6 : 3 = **2**.

Con la ecuación punto-pendiente y el punto A: y − (−1) = 2(x − (−1)), es decir, y + 1 = 2x + 2.

Despejando: **y = 2x + 1**.

Comprobación con el otro punto: 2 · 2 + 1 = 5, que es la y de B. Cuadra.

30 Dados u = (3, −4), v = (2, 1) y w = (4, 3), calcula el módulo de u, el producto escalar de u y v, y di si u y w son perpendiculares.

Solución

El módulo de u es $\sqrt{(3^2 + (-4)^2)} = \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$.

El producto escalar de u y v es 3 · 2 + (−4) · 1 = 6 − 4 = **2**.

El producto escalar de u y w es 3 · 4 + (−4) · 3 = 12 − 12 = 0, así que **sí son perpendiculares**.

Ojo. Para el módulo, el signo de la coordenada da igual porque se eleva al cuadrado; en el producto escalar, no: ahí el signo manda.

31 Calcula la distancia del punto P (2, 1) a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

Solución

Se sustituyen las coordenadas de P en la ecuación: $3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 5 = 6 - 4 + 5 = 7$.

Se divide el valor absoluto entre la raíz de la suma de los cuadrados de los coeficientes: $\sqrt{(3^2 + (-4)^2)} = \sqrt{25} = 5$.

La distancia es 7 : 5 = **1,4 unidades**.

> **Ojo.** Hay que dividir entre $\sqrt{(A^2 + B^2)}$, no entre A + B. Con $3 - 4 = -1$ saldría una distancia negativa, y una distancia nunca lo es.

32 Dados A (−1, −1) y B (2, 5), calcula el punto medio del segmento AB y su longitud.

Solución

El punto medio es la media de cada coordenada: $((-1 + 2)/2, (-1 + 5)/2)$ = **(0,5 ; 2)**.

La longitud es el módulo del vector AB = (3, 6): $\sqrt{(3^2 + 6^2)} = \sqrt{(9 + 36)} = \sqrt{45}$.

Se simplifica: $45 = 9 \cdot 5$, así que $\sqrt{45}$ = **$3\sqrt{5} \approx 6{,}71$**.

Funciones: dominio y parábola

Lo que hay que saber

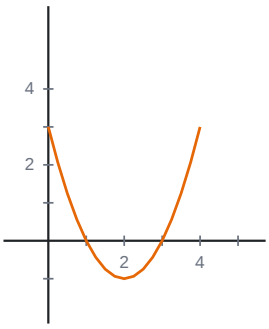
El **dominio** es el conjunto de valores de x para los que la función existe. Hay que quitar los que anulan un denominador y los que dejan negativo lo de dentro de una raíz de índice par.

La gráfica de una función de segundo grado es una **parábola**, abierta hacia arriba si el coeficiente de x^2 es positivo y hacia abajo si es negativo.

La abscisa del **vértice** es $-b / (2a)$; la ordenada se obtiene sustituyendo ese valor en la función.

Los **cortes con el eje X** salen de resolver f(x) = 0, y el corte con el eje Y es f(0).

33 La figura es la gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Calcula, con la ecuación, sus cortes con los ejes y su vértice, y comprueba que cuadran con el dibujo.



Gráfica de la función del enunciado: una parábola abierta hacia arriba que corta al eje horizontal en dos puntos y tiene su punto más bajo entre ellos. Las rayitas de los ejes van de una en una y están numeradas de dos en dos.

Solución

Cortes con el eje X: se resuelve $x^2 - 4x + 3 = 0$. El discriminante es $16 - 12 = 4$, y las raíces son $(4 \pm 2)/2$, es decir, 3 y 1.

Los cortes son **(1, 0) y (3, 0)**, y en el dibujo se ve que la curva cruza el eje horizontal en dos puntos, uno antes y otro después del 2.

Corte con el eje Y: $f(0) = 3$, así que es el punto **(0, 3)**.

Vértice: la abscisa es $-b / (2a) = 4 / 2 = 2$, y la ordenada, $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$. El vértice es **(2, −1)**, el punto más bajo de la gráfica.

> **Ojo.** La fórmula del vértice lleva $-b$, no b. Con $b = -4$, el $-b$ es $+4$; confundir el signo deja el vértice en $x = -2$, donde la función vale 15 y la curva está muy arriba.

34 Halla el dominio de $f(x) = (x + 1) / (x^2 - 4)$ y el de $g(x) = \sqrt{(x - 3)}$.

Solución

En f hay que quitar los valores que anulan el denominador: $x^2 - 4 = 0$ da $x = 2$ y $x = -2$.

El dominio de f es **todos los reales menos el 2 y el −2**.

En g, lo de dentro de la raíz no puede ser negativo: $x - 3 \geq 0$, o sea $x \geq 3$.

El dominio de g es **[3, +∞)**, con el 3 incluido porque la raíz de 0 sí existe.

35 Dadas $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$, calcula las composiciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$, y sus valores en $x = 2$.

Solución

$(f \circ g)(x)$ quiere decir f de g de x: se mete g dentro de f. Como f multiplica por 2 y suma 1: $f(x^2) = \mathbf{2x^2 + 1}$.

$(g \circ f)(x)$ es al revés: $g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = \mathbf{4x^2 + 4x + 1}$.

En $x = 2$: $(f \circ g)(2) = 2 \cdot 4 + 1 = \mathbf{9}$, y $(g \circ f)(2) = (4 + 1)^2 = 5^2 = \mathbf{25}$.

> **Ojo.** El orden importa, y mucho. Las dos composiciones dan funciones distintas y en $x = 2$ se diferencian en 16 unidades.

Límites y continuidad

Lo que hay que saber

Para calcular un límite lo primero es **sustituir**. Si sale un número, ese es el límite.

Si sale **0/0** en un cociente de polinomios, se factorizan los dos y se simplifica el factor común, que es el que da el cero.

Si sale **∞/∞** con polinomios, manda el grado: si el de arriba es mayor, el límite es **±∞** —hablando de $x \to +\infty$, el signo lo deciden los coeficientes principales; si $x \to -\infty$ hay que mirar además si la diferencia de grados es par o impar—; si es menor, 0; y si son iguales, el cociente de los coeficientes principales.

Una función es **continua** en un punto si existe el límite, existe la función y valen lo mismo. Si el límite existe pero la función no está definida, la discontinuidad es **evitable**.

36 Calcula el límite de $(x^2 - 4) / (x - 2)$ cuando x tiende a 2.

Solución

Al sustituir sale 0/0, que es una indeterminación: hay que trabajarla.

Se factoriza el numerador como suma por diferencia: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Se simplifica el factor $x - 2$, que es el que da el cero: queda $x + 2$.

Ahora se sustituye: $2 + 2 =$ **4**.

> **Ojo.** 0/0 no vale 0 ni 1. Es una indeterminación, y lo que hay que hacer es quitar el factor que anula a los dos.

37 Calcula el límite de $(3x^2 - 2x) / (x^2 + 5)$ cuando x tiende a infinito.

Solución

Al sustituir sale ∞/∞, que es otra indeterminación.

Arriba y abajo el grado es el mismo, 2, así que el límite es el cociente de los coeficientes de x^2.

Arriba el coeficiente es 3 y abajo, 1, así que el límite es **3**.

Se ve igual dividiendo todo entre x^2: $(3 - 2/x) / (1 + 5/x^2)$, y los términos con x en el denominador tienden a 0.

38 Estudia la continuidad de $f(x) = (x^2 - 1) / (x - 1)$ en $x = 1$.

Solución

En $x = 1$ el denominador vale 0, así que la función **no está definida** ahí: no puede ser continua.

Se calcula el límite: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, y simplificando queda $x + 1$, que en $x = 1$ vale **2**.

Como el límite existe y es finito pero la función no está definida, la discontinuidad es **evitable**.

Se evitaría definiendo $f(1) = 2$: con eso la función pasaría a ser continua.

Derivadas

Lo que hay que saber

La **derivada** en un punto es el límite del cociente incremental, y mide la pendiente de la recta tangente en ese punto.

Reglas básicas: la derivada de x^n es $n \cdot x^{n-1}$, la de una constante es 0, y la derivada de una suma es la suma de las derivadas.

Producto: derivada del primero por el segundo más el primero por la derivada del segundo. **Cociente**: derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador, todo entre el denominador al cuadrado.

Regla de la cadena: la derivada de una función compuesta es la derivada de la de fuera (con la de dentro sin tocar) por la derivada de la de dentro.

39 Calcula, usando la definición, la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$.

Solución

La definición es el límite, cuando h tiende a 0, de $[f(3 + h) - f(3)] / h$.

$f(3 + h) = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2$, y $f(3) = 9$.

La resta es $6h + h^2$, y al dividir entre h queda $6 + h$.

Cuando h tiende a 0, el límite es **6**.

Con la regla se comprueba enseguida: la derivada de x^2 es $2x$, y en $x = 3$ vale 6.

---

40 Deriva: $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 7$.

Solución

Se deriva término a término. La derivada de $3x^4$ es $3 \cdot 4x^3 = 12x^3$.

La de $-5x^2$ es $-5 \cdot 2x = -10x$. La de $2x$ es 2.

La de -7 es 0, porque es una constante.

Queda $f'(x) = \mathbf{12x^3 - 10x + 2}$.

---

41 Deriva: $f(x) = x^2 \cdot \text{sen } x$ y $g(x) = (2x + 1) / (x - 3)$.

Solución

En f se usa la regla del producto: la derivada de x^2 es $2x$ y la de sen x es cos x.

$f'(x) = \mathbf{2x \cdot \text{sen } x + x^2 \cdot \cos x}$.

En g se usa la del cociente: arriba queda $2 \cdot (x - 3) - (2x + 1) \cdot 1 = 2x - 6 - 2x - 1 = -7$.

$g'(x) = \mathbf{-7 / (x - 3)^2}$.

> **Ojo.** El numerador de la regla del cociente empieza por la derivada del de arriba, y el orden no se puede cambiar: al revés saldría +7, con el signo cambiado.

---

42 Deriva: $f(x) = (3x^2 + 1)^5$.

Solución

Es una función compuesta, así que se usa la regla de la cadena.

La de fuera es «elevar a la quinta»: su derivada es $5 \cdot (3x^2 + 1)^4$, dejando lo de dentro sin tocar.

La de dentro es $3x^2 + 1$, cuya derivada es $6x$.

Multiplicando: $f'(x) = 5(3x^2 + 1)^4 \cdot 6x = \mathbf{30x(3x^2 + 1)^4}$.

> **Ojo.** Olvidar el 6x de la derivada de dentro es el fallo más repetido de la regla de la cadena.

Aplicaciones de la derivada

Lo que hay que saber

La **recta tangente** a $y = f(x)$ en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$: pasa por el punto y su pendiente es la derivada.

Donde la derivada es **positiva** la función crece, y donde es **negativa** decrece.

Los puntos donde la derivada vale **0** son candidatos a máximo o a mínimo; se decide mirando cómo cambia el signo de la derivada a su alrededor.

En un problema de **optimización** se escribe la magnitud a optimizar en función de una sola variable, se deriva y se iguala a cero.

43 Halla la recta tangente a $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución

Primero el punto: $f(2) = 4 - 6 + 2 = 0$, así que la tangente pasa por $(2, 0)$.

Después la pendiente: $f'(x) = 2x - 3$, y $f'(2) = 4 - 3 = 1$.

Con la ecuación punto-pendiente: $y - 0 = 1 \cdot (x - 2)$.

La tangente es $\mathbf{y = x - 2}$.

44 Estudia el crecimiento de $f(x) = x^3 - 3x$ y halla sus máximos y mínimos relativos.

Solución

Se deriva: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Se iguala a cero: $3x^2 - 3 = 0$, o sea $x^2 = 1$, de donde $x = 1$ y $x = -1$.

Se mira el signo de la derivada en cada tramo: en $x = -2$ vale 9 (positiva), en $x = 0$ vale -3 (negativa) y en $x = 2$ vale 9 (positiva).

Así que **crece en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$, y decrece en $(-1, 1)$**.

En $x = -1$ pasa de crecer a decrecer: hay un **máximo** relativo, y $f(-1) = -1 + 3 = 2$. En $x = 1$ pasa de decrecer a crecer: hay un **mínimo**, y $f(1) = 1 - 3 = -2$.

45 Dos números suman 10. ¿Cuáles son si su producto tiene que ser el mayor posible?

Solución

Si uno es x, el otro es $10 - x$, así que el producto es $P(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$.

Se deriva e iguala a cero: $P'(x) = 10 - 2x = 0$, de donde $x = \mathbf{5}$.

El otro número es $10 - 5 = \mathbf{5}$, y el producto vale 25.

Es un máximo porque P es una parábola abierta hacia abajo (el coeficiente de x^2 es negativo), así que su vértice es el punto más alto.

> **Ojo.** Conviene comprobarlo con otro reparto: 4 y 6 dan 24, y 3 y 7 dan 21. Cuanto más separados están los números, menor es el producto.

Distribución binomial y normal

Lo que hay que saber

La **binomial** B(n, p) cuenta los éxitos en n intentos independientes con la misma probabilidad p. Su probabilidad de k éxitos es el número combinatorio de n sobre k, por p elevado a k, por (1 − p) elevado a n − k.

Su media es n·p y su varianza, n·p·(1 − p).

La **normal** N(μ, σ) es continua y simétrica respecto de la media. Para usar la tabla se tipifica: se resta la media y se divide entre la desviación típica.

La tabla da P(Z ≤ z). Para el resto se usa que el total es 1 y que la curva es **simétrica**: P(Z ≤ −z) = 1 − P(Z ≤ z).

46 En una distribución binomial B(5 ; 0,2), calcula la probabilidad de obtener exactamente 2 éxitos, y la media.

Solución

La fórmula pide el número combinatorio de 5 sobre 2, que es (5 · 4) : (2 · 1) = 10.

Después, p elevado a 2: $0{,}2^2 = 0{,}04$. Y (1 − p) elevado a 5 − 2 = 3: $0{,}8^3 = 0{,}512$.

Multiplicando: 10 · 0,04 · 0,512 = **0,2048**.

La media es n · p = 5 · 0,2 = **1** éxito.

> **Ojo.** El exponente de (1 − p) es n − k, no n. Usar $0{,}8^5$ da 0,1311, un resultado bastante menor.

47 En una N(0 ; 1), sabiendo por la tabla que P(Z ≤ 1,5) = 0,9332, calcula P(Z > 1,5) y P(Z ≤ −1,5).

Solución

La probabilidad total es 1, así que P(Z > 1,5) = 1 − 0,9332 = **0,0668**.

Por la simetría de la curva, P(Z ≤ −1,5) es igual a P(Z ≥ 1,5), que acabamos de calcular: **0,0668**.

> **Ojo.** La tabla solo da los valores de la izquierda. Buscar −1,5 directamente en ella no sirve: hay que usar la simetría.

48 Las notas de un examen siguen una N(6 ; 2). ¿Qué puntuación tipificada le corresponde a un 8? ¿Y a un 5?

Solución

Tipificar es restar la media y dividir entre la desviación típica.

Para el 8: (8 − 6) : 2 = **1**. Está una desviación típica por encima de la media.

Para el 5: (5 − 6) : 2 = **−0,5**. Está media desviación típica por debajo.

El signo dice el lado de la media: positivo por encima, negativo por debajo.