

Ejercicios de Matemáticas II de 2.º de Bachillerato resueltos

48 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 14 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Matrices · Operar y ecuaciones matriciales (**ejercicios 1, 2, 3, 4**)

Determinantes y existencia de inversa · Calcular determinantes y comprobar la inversa (**ejercicios 5, 6, 7, 8**)

Sistemas: Gauss, Cramer y discusión · Resolver y discutir (**ejercicios 9, 10, 11, 12**)

Límites e indeterminaciones · Cocientes, factorizar y L'Hôpital (**ejercicios 13, 14, 15, 16**)

Continuidad y asíntotas · Discontinuidades y asíntotas (**ejercicios 17, 18, 19**)

Derivadas: reglas y regla de la cadena · Derivar productos, cocientes y composiciones (**ejercicios 20, 21, 22, 23**)

Monotonía, extremos y curvatura · Crecer, máximos y puntos de inflexión (**ejercicios 24, 25, 26**)

Optimización · Plantear, derivar y comprobar (**ejercicios 27, 28, 29**)

Representación de funciones · Dominio, cortes, simetría y forma (**ejercicios 30, 31, 32**)

Integrales indefinidas · Inmediatas, cambio y por partes (**ejercicios 33, 34, 35, 36**)

Integral definida y áreas · Barrow y área entre curvas (**ejercicios 37, 38, 39**)

Vectores en el espacio · Escalar, vectorial y mixto (**ejercicios 40, 41, 42**)

Rectas y planos en el espacio · Ecuaciones y posiciones (**ejercicios 43, 44, 45**)

Probabilidad: condicionada, total y Bayes · Árbol, total y causa probable (**ejercicios 46, 47, 48**)

Material propio de solucionariomatematicas.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionariomatematicas.es

Qué entra y qué no. Entran los catorce bloques del índice, todos con ejercicios resueltos, y tres de ellos llevan su figura. Esta página es la de **Matemáticas II**, la de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Si tu asignatura es **Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II**, busca su página: **no es el mismo temario**; allí entran la matemática financiera, la programación lineal, el muestreo y los intervalos de confianza, que aquí no están, y aquí entran la geometría del espacio, el producto vectorial y las integrales por partes, que allí no están. Esta página recoge lo que la de Matemáticas I dejó anunciado: las matrices, los determinantes, las integrales y los límites con la regla de L'Hôpital. Lo que Matemáticas I ya trata vuelve aquí un escalón más arriba: de las reglas de derivación a la regla de la cadena y la optimización, y de los vectores y la recta en el plano a los vectores, las rectas y los planos en el espacio. **No entran** los números complejos, ni la trigonometría ni los logaritmos **como temas** (ecuaciones, identidades, propiedades), que están completos en la página de Matemáticas I. Sí se usan, como herramienta, la **derivada del seno** y la **integral que da el logaritmo neperiano**. Estos ejercicios no sustituyen al temario ni a los del libro.

Ejercicios de Matemáticas II de 2.º de Bachillerato resueltos

Matrices

Lo que hay que saber

△ CÓMO SE ESCRIBEN AQUÍ. Una matriz se escribe entre paréntesis con las filas separadas por punto y coma: $(1, 2 ; 3, 4)$ es la matriz cuya primera fila es $(1, 2)$ y cuya segunda fila es $(3, 4)$. En el papel del examen se escriben una fila debajo de otra, dentro de un paréntesis grande.

Dos matrices se **suman** elemento a elemento, y para eso tienen que ser del mismo tamaño.

Para **multiplicar** $A \cdot B$, el elemento de la fila i y la columna j del resultado es cada elemento de la fila i por **el que le corresponde en la columna j** —el 1.º con el 1.º, el 2.º con el 2.º...—, sumando los productos. Hace falta que el número de columnas de A sea el de filas de B .

▪ El producto de matrices **no es conmutativo**: $A \cdot B$ y $B \cdot A$ pueden ser distintas, y a veces una existe y la otra no.

La **matriz identidad** I deja igual a la que multiplica, por los dos lados.

△ En una **ecuación matricial** no se puede «dividir»: se multiplica por la inversa, y hay que hacerlo **por el mismo lado** en los dos miembros, porque el orden importa.

1 Dadas $A = (1, 2 ; 3, 4)$ y $B = (0, 1 ; -1, 2)$, calcula $A + B$ y $A \cdot B$.

Solución

La suma es elemento a elemento: $1 + 0 = 1$; $2 + 1 = 3$; $3 + (-1) = 2$; $4 + 2 = 6$.

$A + B = (1, 3 ; 2, 6)$.

Para el producto, cada elemento es una fila por una columna. Primera fila de A por primera columna de B : $1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -2$.

Primera fila por segunda columna: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$. Segunda fila por primera columna: $3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = -4$. Segunda fila por segunda columna: $3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$.

$A \cdot B = (-2, 5 ; -4, 11)$.

2 Con las mismas A y B , calcula $B \cdot A$ y comprueba si el producto es conmutativo.

Solución

Primera fila de B por primera columna de A : $0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 3$.

Primera fila por segunda columna: $0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 4$. Segunda fila por primera columna: $(-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 5$. Segunda fila por segunda columna: $(-1) \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 6$.

$B \cdot A = (3, 4 ; 5, 6)$.

Comparando con el ejercicio anterior, $A \cdot B = (-2, 5 ; -4, 11)$ y $B \cdot A = (3, 4 ; 5, 6)$: **no son iguales**, así que el producto **no es conmutativo**.

Ojo. Basta con un caso para demostrar que una propiedad no se cumple en general. Para demostrar que sí se cumple harían falta todos, y no es el caso.

3 Calcula A^2 con $A = (1, 2 ; 3, 4)$.

Solución

A^2 es $A \cdot A$, no cada elemento al cuadrado.

Primera fila por primera columna: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7$. Primera fila por segunda: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 10$.

Segunda fila por primera: $3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 15$. Segunda fila por segunda: $3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 22$.

$A^2 = (7, 10 ; 15, 22)$.

Ojo. Elevar al cuadrado cada elemento daría $(1, 4 ; 9, 16)$, que no es A^2 . La potencia de una matriz es el producto de la matriz por sí misma.

4 Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B$, dejando X en función de la inversa de A .

Solución

No se puede dividir entre A : lo que se hace es multiplicar por su inversa.

Como A está a la **izquierda** de X , hay que multiplicar por A^{-1} también por la izquierda, en los dos miembros: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Como $A^{-1} \cdot A$ es la identidad y la identidad deja igual, queda $X = A^{-1} \cdot B$.

Ojo. La solución no es $B \cdot A^{-1}$. Al multiplicar por la derecha quedaría $A \cdot X \cdot A^{-1}$, que no se simplifica, porque el producto no es conmutativo.

Determinantes y existencia de inversa

Lo que hay que saber

El determinante de una matriz **2×2** es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria.

El de una **3×3** se puede hallar desarrollando por una fila: cada elemento por su menor complementario, con los signos del **tablero** (+ - + / - + - / + - +). El signo de la posición (fila i , columna j) es + si $i + j$ es par y - si es impar, así que la primera fila empieza en + y la segunda, en -.

⚠ Conviene desarrollar por la fila o columna con **más ceros**: cada cero ahorra un menor entero.

Una matriz cuadrada tiene **inversa** si y solo si su determinante es **distinto de cero**.

La comprobación de una inversa no admite discusión: $A \cdot A^{-1}$ tiene que dar la **identidad**.

5 Calcula el determinante de $A = (1, 2 ; 3, 4)$ y di si tiene inversa.

Solución

En una **2×2** el determinante es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria: $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3$.

$1 \cdot 4 = 4$ y $2 \cdot 3 = 6$, así que $\det A = 4 - 6 = -2$.

Como es distinto de cero, **sí tiene inversa**.

Ojo. Que el determinante salga negativo no impide que haya inversa. Lo único que la impide es que sea cero.

6 Calcula el determinante de $M = (1, 2, 3 ; 0, 1, 4 ; 5, 6, 0)$.

Solución

Conviene desarrollar por la **segunda fila**, que tiene un cero: así un menor se ahorra entero.

Los signos de esa fila son $- + -$. El primer elemento es 0, así que su sumando es 0.

El segundo es 1, con signo $+$, y su menor es el de quitar la fila 2 y la columna 2: $(1, 3 ; 5, 0)$, cuyo determinante es $1 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = -15$. Aporta $1 \cdot (-15) = -15$.

El tercero es 4, con signo $-$, y su menor es $(1, 2 ; 5, 6)$, cuyo determinante es $1 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = -4$. Con el signo $-$ de la fila, aporta $(-1) \cdot 4 \cdot (-4) = 16$.

El determinante es $-15 + 16 = 1$.

7 Comprueba que la inversa de $M = (1, 2, 3 ; 0, 1, 4 ; 5, 6, 0)$ es $(-24, 18, 5 ; 20, -15, -4 ; -5, 4, 1)$.

Solución

Para comprobar una inversa se multiplica y se mira si sale la identidad.

Primera fila de M por primera columna de la candidata: $1 \cdot (-24) + 2 \cdot 20 + 3 \cdot (-5) = -24 + 40 - 15 = 1$.

Primera fila por segunda columna: $1 \cdot 18 + 2 \cdot (-15) + 3 \cdot 4 = 18 - 30 + 12 = 0$. Y por la tercera: $1 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 = 5 - 8 + 3 = 0$.

Haciendo lo mismo con las otras dos filas salen las filas $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

El producto es la **identidad**, así que la candidata **sí es la inversa**.

Ojo. Esto comprueba la inversa, no la calcula. Si no diera la identidad, habría que hallarla, no retocar la candidata.

8 ¿Para qué valores de k no tiene inversa la matriz $(k, 1 ; 4, k)$?

Solución

No tiene inversa cuando su determinante es cero.

El determinante es $k \cdot k - 1 \cdot 4 = k^2 - 4$.

Se iguala a cero: $k^2 - 4 = 0$, así que $k^2 = 4$ y $k = 2$ o $k = -2$.

Para cualquier otro valor de k el determinante no es cero y la matriz sí tiene inversa.

Ojo. Son dos valores, no uno. La ecuación $k^2 = 4$ tiene dos soluciones, y quedarse con la positiva deja fuera la mitad de la respuesta.

Sistemas: Gauss, Cramer y discusión

Lo que hay que saber

El **método de Gauss** transforma el sistema en uno escalonado sumando a una ecuación un múltiplo de otra, y después se despeja de abajo arriba.

La **regla de Cramer** vale cuando el determinante de la matriz de coeficientes no es cero: cada incógnita es un cociente de determinantes.

Un sistema es **compatible determinado** si tiene una única solución, **compatible indeterminado** si tiene infinitas, e **incompatible** si no tiene ninguna.

El **rango** de una matriz es el orden del mayor menor distinto de cero que se puede sacar de ella: en $(1, 2, 3; 2, 4, 6; 1, 0, 1)$ el determinante vale 0 (la segunda fila es el doble de la primera), pero el menor $(1, 2; 1, 0)$ vale -2 , así que su rango es 2.

△ Lo que decide (teorema de Rouché-Frobenius) es comparar el rango de la matriz de **coeficientes** con el de la **ampliada** —la que lleva además los términos independientes— y los dos con el número de incógnitas: si los dos rangos son distintos, es incompatible; si son iguales y valen lo que el número de incógnitas, compatible determinado; y si son iguales pero menores, compatible indeterminado.

▪ La solución se comprueba sustituyendo en **todas** las ecuaciones, no solo en la que se usó para despejar.

9

Resuelve por la regla de Cramer: $x + y + z = 6$; $x - y + z = 2$; $2x + y - z = 1$.

Solución

El determinante de los coeficientes, desarrollando por la primera fila: $1 \cdot [(-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1] - 1 \cdot [1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2] + 1 \cdot [1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2]$.

Los tres menores valen $1 - 1 = 0$; $-1 - 2 = -3$; $1 + 2 = 3$. Así que el determinante es $1 \cdot 0 - 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 = 6$, distinto de cero: se puede aplicar Cramer.

Para D_x se sustituye la PRIMERA columna por los términos independientes: $(6, 1, 1; 2, -1, 1; 1, 1, -1)$. Desarrollando por la primera fila: $6 \cdot [(-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1] - 1 \cdot [2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1] + 1 \cdot [2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1] = 6 \cdot 0 - 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 = 6$.

Igual con la segunda y la tercera columna salen $D_y = 12$ y $D_z = 18$.

Las incógnitas son $x = 6/6 = 1$, $y = 12/6 = 2$ y $z = 18/6 = 3$.

Comprobación en las tres: $1 + 2 + 3 = 6$ OK; $1 - 2 + 3 = 2$ OK; $2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1$ OK.

10 Resuelve por Gauss: $x + y + z = 6$; $2x - y + z = 3$; $x + 2y - z = 2$.

Solución

Se escribe la matriz ampliada, con los coeficientes y, detrás de la raya, los términos independientes: $(1, 1, 1 \mid 6; 2, -1, 1 \mid 3; 1, 2, -1 \mid 2)$.

A la segunda fila se le resta el doble de la primera: $(2 - 2, -1 - 2, 1 - 2 \mid 3 - 12) = (0, -3, -1 \mid -9)$.

A la tercera se le resta la primera: $(0, 1, -2 \mid -4)$.

Ya está hecha la primera columna: $(1, 1, 1 \mid 6; 0, -3, -1 \mid -9; 0, 1, -2 \mid -4)$.

Ahora se hace cero el 1 de la tercera fila: a la tercera se le suma un tercio de la segunda. Queda $(0, 0, -7/3 \mid -7)$, es decir $-7z/3 = -7$ y $z = 3$.

Se sube: de la segunda, $-3y - 3 = -9$, así que $-3y = -6$ e $y = 2$.

Y de la primera, $x + 2 + 3 = 6$, así que $x = 1$.

Comprobación en las tres: $1 + 2 + 3 = 6$ OK; $2 \cdot 1 - 2 + 3 = 3$ OK; $1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2$ OK.

Ojo. Gauss se hace sobre la matriz **AMPLIADA**, con los términos independientes dentro. Si se escalonan solo los coeficientes y se olvida la última columna, el sistema que queda ya no es el de partida y la solución no vale.

11 Discute, según el valor de k , el sistema: $x + y = 1$; $kx + y = 2$.

Solución

El determinante de los coeficientes es $1 \cdot 1 - 1 \cdot k = 1 - k$.

Si $k \neq 1$ el determinante no es cero: el sistema es **compatible determinado** y tiene una única solución.

Si $k = 1$ las dos ecuaciones son $x + y = 1$ y $x + y = 2$, que dicen cosas distintas de lo mismo: el sistema es **incompatible**.

Ojo. Con $k = 1$ el sistema no es indeterminado, es incompatible. Para que fuera indeterminado la segunda ecuación tendría que ser un múltiplo exacto de la primera, término independiente incluido.

12 Para el sistema del ejercicio anterior con $k = 3$, halla la solución.

Solución

Con $k = 3$ el sistema es $x + y = 1$; $3x + y = 2$.

Restando la primera de la segunda: $2x = 1$, así que $x = 1/2$.

Sustituyendo en la primera: $1/2 + y = 1$, así que $y = 1/2$.

Comprobación en las dos: $1/2 + 1/2 = 1$ OK y $3 \cdot 1/2 + 1/2 = 3/2 + 1/2 = 2$ OK.

Límites e indeterminaciones

Lo que hay que saber

En un **cociente de polinomios cuando x tiende a infinito**, manda el grado: si el de arriba es mayor, el límite es $\pm\infty$ —hablando de $x \rightarrow +\infty$, el signo lo deciden los coeficientes principales; si $x \rightarrow -\infty$ hay que mirar además si la diferencia de grados es par o impar—; si es menor, es 0; y si son iguales, es el cociente de los coeficientes principales.

La indeterminación **0/0** con polinomios se quita **factorizando** y simplificando el factor que se anula.

La **regla de L'Hôpital** sirve para 0/0 e ∞/∞ : se derivan numerador y denominador **por separado** y se vuelve a tomar el límite.

▪ L'Hôpital no es derivar el cociente: no se usa la regla del cociente, se derivan arriba y abajo cada uno por su lado.

⚠ Y solo se puede aplicar si de verdad hay una indeterminación: usarla sobre un límite que ya se puede calcular da resultados falsos.

13 Calcula el límite de $(3x^2 - x) / (x^2 + 2)$ cuando x tiende a infinito.

Solución

Arriba el grado es 2 y abajo también, así que el límite es el cociente de los coeficientes de mayor grado.

El de arriba es 3 y el de abajo, 1.

El límite es $3 : 1 = 3$.

Ojo. En un **COCIENTE DE POLINOMIOS** los términos de grado menor (el $-x$ y el $+2$) no cambian el límite en el infinito: mandan los grados y, cuando coinciden, los coeficientes principales. Lo que sí lo cambiaría sería que los **GRADOS** fueran otros: con el de arriba mayor saldría $\pm\infty$, y con el de arriba menor, 0. ▪ Fuera de los cocientes de polinomios esto no vale: $\sqrt{x^2 + x} - x$ tiende a $1/2$ cuando $x \rightarrow +\infty$, y $\sqrt{x^2} - x$ tiende a 0, y solo se diferencian en un término de grado menor.

14 Calcula el límite de $(x^2 - 4) / (x - 2)$ cuando x tiende a 2.

Solución

Al sustituir sale 0/0, así que hay indeterminación.

El numerador es una diferencia de cuadrados: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$.

Se simplifica el factor $(x - 2)$, que es el que se anula: queda $x + 2$.

Ahora ya se puede sustituir: $2 + 2 = 4$.

Ojo. Simplificar $(x - 2)$ no cambia el límite aunque sí cambie la función en $x = 2$, porque el límite no mira lo que pasa **EN** el punto, sino **alrededor**.

15 Calcula el límite de $(e^x - 1) / x$ cuando x tiende a 0, usando L'Hôpital.

Solución

Al sustituir: $e^0 - 1 = 0$ arriba y 0 abajo, así que es 0/0 y se puede aplicar la regla.

Se derivan por separado: la derivada de $e^x - 1$ es e^x , y la de x es 1.

El nuevo límite es $e^x : 1$ cuando x tiende a 0, que es $e^0 = 1$.

Ojo. No se ha derivado el cociente. Si se hubiera usado la regla del cociente, el resultado sería otro y estaría mal.

16 Calcula el límite de $(x^2 - 9) / (x^2 - 3x)$ cuando x tiende a 3.

Solución

Al sustituir sale 0/0.

Se factoriza arriba y abajo: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ y $x^2 - 3x = x(x - 3)$.

Se simplifica el $(x - 3)$ común: queda $(x + 3) / x$.

Se sustituye: $(3 + 3) : 3 = 6 : 3 = 2$.

Continuidad y asíntotas

Lo que hay que saber

Una función es **continua** en un punto si existe la imagen, existe el límite y los dos coinciden. Si falla una de las tres cosas, hay discontinuidad.

La discontinuidad es **evitable** si el límite existe pero no coincide con la imagen (o no hay imagen); es de **salto** si los límites laterales existen y son distintos.

Las **asíntotas verticales** están donde se anula el denominador y **no se cancela del todo con el numerador**: ahí la función se dispara.

La **asíntota horizontal** es la recta $y = L$, donde L es el límite de la función en el infinito, si ese límite es un número.

⚠ Si al anularse el denominador se anula también el numerador, todavía NO se sabe: hay que simplificar y volver a mirar. Puede desaparecer el problema —y entonces la discontinuidad es evitable— o puede seguir habiendo asíntota: en $(x - 1)/(x - 1)^2 = 1/(x - 1)$ el numerador también se anula en $x = 1$ y la asíntota sigue ahí. Lo que decide es cuántas veces se anula cada uno.

17 Estudia la continuidad de $f(x) = (x^2 - 1) / (x - 1)$ y clasifica la discontinuidad que tenga.

Solución

El denominador se anula en $x = 1$, así que ahí no hay imagen: la función no es continua en $x = 1$.

Para clasificarla se mira el límite. Factorizando: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, y simplificando queda $x + 1$.

El límite cuando x tiende a 1 es $1 + 1 = 2$, que existe y es finito.

Como el límite existe pero no hay imagen, la discontinuidad es **evitable** en $x = 1$, y se evitaría definiendo $f(1) = 2$.

Ojo. No hay asíntota vertical en $x = 1$, aunque el denominador se anule: también se anula el numerador, y al simplificar desaparece el problema.

18 Halla las asíntotas de $f(x) = (2x + 1) / (x - 3)$.

Solución

El denominador se anula en $x = 3$, y ahí el numerador vale $2 \cdot 3 + 1 = 7$, que no es cero: hay **asíntota vertical en $x = 3$** .

Para la horizontal se calcula el límite en el infinito. Arriba y abajo el grado es 1, así que el límite es el cociente de los coeficientes principales: $2 : 1 = 2$.

Hay **asíntota horizontal en $y = 2$** .

Ojo. La asíntota horizontal es $y = 2$, no $x = 2$. La vertical se escribe con x y la horizontal con y , y confundirlas cambia por completo la gráfica.

19 ¿Para qué valor de a es continua en $x = 2$ la función que vale $x + a$ si $x \leq 2$ y $3x - 4$ si $x > 2$?

Solución

Para que sea continua, los dos límites laterales y la imagen tienen que coincidir en $x = 2$.

Por la izquierda y en el propio punto, la función vale $2 + a$.

Por la derecha, el límite es $3 \cdot 2 - 4 = 2$.

Igualando: $2 + a = 2$, así que $a = 0$.

Comprobación: con $a = 0$ la función vale x a la izquierda, y en $x = 2$ da 2; y por la derecha, $3x - 4$ tiende a 2. Coinciden.

Derivadas: reglas y regla de la cadena

Lo que hay que saber

Reglas que hay que tener de memoria: la derivada de x^n es $n \cdot x^{n-1}$; la de e^x es e^x ; la del seno es el coseno; y la del logaritmo neperiano de x es $1/x$.

Producto: derivada del primero por el segundo, más el primero por la derivada del segundo.

Cociente: derivada del numerador por el denominador, menos el numerador por la derivada del denominador, todo partido por el denominador al cuadrado.

Regla de la cadena: la derivada de una función compuesta es la derivada de la de fuera, evaluada en la de dentro, multiplicada por la derivada de la de dentro.

▪ Olvidar ese último factor —la derivada de la de dentro— es lo que convierte una derivada bien empezada en una mal acabada.

20 Deriva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Solución

Se deriva término a término.

La derivada de x^3 es $3x^2$.

La de $-3x^2$ es $-3 \cdot 2x = -6x$.

La de la constante 2 es 0.

Así que $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

21 Deriva $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

Solución

Es un producto, así que se aplica su regla.

La derivada del primero es $2x$, y el segundo se deja: $2x \cdot e^x$.

Más el primero por la derivada del segundo: $x^2 \cdot e^x$.

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$, que sacando factor común es $e^x(2x + x^2)$.

Ojo. La derivada de un producto no es el producto de las derivadas. Con $2x \cdot e^x$ a secas faltaría la mitad.

22 Deriva $f(x) = \sin(3x^2)$.

Solución

Es una composición: por fuera el seno y por dentro $3x^2$.

La derivada de la de fuera, evaluada en la de dentro, es $\cos(3x^2)$.

La derivada de la de dentro es $6x$.

Multiplicando las dos: $f'(x) = \cos(3x^2) \cdot 6x$.

Ojo. Dejarlo en $\cos(3x^2)$ deja la derivada a medias, y lo que falta es justo el factor $6x$.

23 Deriva $f(x) = (x + 1) / (x - 1)$.

Solución

Es un cociente, así que se aplica su regla.

La derivada del numerador es 1 , y por el denominador: $1 \cdot (x - 1) = x - 1$.

Menos el numerador por la derivada del denominador: $(x + 1) \cdot 1 = x + 1$.

El numerador de la derivada queda $(x - 1) - (x + 1) = -2$, y el denominador, $(x - 1)^2$.

$f'(x) = -2 / (x - 1)^2$.

Monotonía, extremos y curvatura

Lo que hay que saber

Donde la **primera derivada** es positiva la función crece, y donde es negativa, decrece. Los candidatos a extremo son los puntos donde se anula.

La **segunda derivada** decide: si en un punto crítico es negativa, hay **máximo**; si es positiva, **mínimo**.

△ Si la segunda derivada también se anula en ese punto, el criterio no decide y hay que mirar el signo de la primera a los lados.

Donde la segunda derivada es positiva la función es **cóncava hacia arriba**, y donde es negativa, hacia abajo. Los **puntos de inflexión** son donde cambia.

△ Que la segunda derivada se anule no basta para que haya inflexión: tiene que **cambiar de signo**.

24 Halla los extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ y di de qué tipo son.

Solución

La derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x$, que factorizada es $3x(x - 2)$.

Se anula en $x = 0$ y en $x = 2$: son los dos candidatos.

La segunda derivada es $f''(x) = 6x - 6$.

En $x = 0$: $f''(0) = -6$, que es negativa, así que hay **máximo**. Su valor es $f(0) = 2$.

En $x = 2$: $f''(2) = 6$, que es positiva, así que hay **mínimo**. Su valor es $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$.

25 Halla el punto de inflexión de la misma función y comprueba que la curvatura cambia.

Solución

La segunda derivada es $f''(x) = 6x - 6$, que se anula en $6x = 6$, es decir, $x = 1$.

Para comprobar que cambia de signo se prueba a los dos lados: en $x = 0$, $f''(0) = -6$, negativa; en $x = 2$, $f''(2) = 6$, positiva.

Cambia de signo, así que **sí hay punto de inflexión** en $x = 1$.

Su altura es $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, así que el punto es **(1, 0)**.

26 Estudia dónde crece y dónde decrece $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Solución

La derivada $3x(x - 2)$ se anula en 0 y en 2, que parten la recta en tres tramos.

Se prueba un punto de cada uno. En $x = -1$: $3 \cdot (-1) \cdot (-3) = 9$, positiva.

En $x = 1$: $3 \cdot 1 \cdot (-1) = -3$, negativa. En $x = 3$: $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$, positiva.

Así que **crece** en $(-\infty, 0)$, **decrece** en $(0, 2)$ y vuelve a **crecer** en $(2, +\infty)$.

Cuadra con lo hallado antes: en $x = 0$ pasa de crecer a decrecer, que es un máximo, y en $x = 2$ al revés, que es un mínimo.

Optimización

Lo que hay que saber

Optimizar es encontrar el máximo o el mínimo de una magnitud sujeta a una **condición**.

El procedimiento: escribir la magnitud que se quiere optimizar, usar la condición para dejarla **con una sola variable**, derivar, igualar a cero y comprobar que el punto hallado es del tipo que se busca.

⚠ Lo que decide el ejercicio no es derivar: es **escribir la condición**. Sin ella quedan dos variables y no se puede derivar.

▪ Comprobar que es máximo (o mínimo) no es opcional: la derivada se anula igual en los dos casos.

⚠ Y hay que mirar qué valores tienen **sentido**: una longitud negativa o cero se descarta, y se dice por qué.

27 De todos los rectángulos de 40 m de perímetro, halla el de área máxima.

Solución

Se llaman x e y a los lados. El área, que es lo que se quiere maximizar, es $A = x \cdot y$.

La condición es el perímetro: $2(x + y) = 40$, así que $x + y = 20$ e $y = 20 - x$.

Como x es un lado, solo tienen sentido los valores $0 < x < 20$: con 0 o con 20 no hay rectángulo.

Sustituyendo queda una sola variable: $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$.

Se deriva e iguala a cero: $A'(x) = 20 - 2x = 0$, así que $x = 10$.

La segunda derivada es $A''(x) = -2$, negativa, así que es un **máximo**.

Con $x = 10$, $y = 20 - 10 = 10$: el rectángulo de área máxima es el **cuadrado de 10 m de lado**, con **100 m²**.

28 Halla los puntos de la parábola $y = x^2 - 2$ más cercanos al origen.

Solución

La distancia del origen a un punto (x, y) de la curva es la raíz de $x^2 + y^2$. Sustituyendo y por $x^2 - 2$ queda una sola variable.

⚠ Se minimiza el CUADRADO de la distancia, no la distancia: la raíz es creciente, así que las dos se hacen mínimas en el mismo punto, y sin raíz la derivada es mucho más sencilla.

$$f(x) = x^2 + (x^2 - 2)^2.$$

Se deriva con la regla de la cadena: $f'(x) = 2x + 2(x^2 - 2) \cdot 2x = 2x + 4x(x^2 - 2)$, que se saca factor común: $2x(1 + 2x^2 - 4) = 2x(2x^2 - 3)$.

Igualando a cero: $x = 0$, o bien $2x^2 = 3$, es decir $x^2 = 3/2$.

En $x = 0$ la distancia al cuadrado es $0 + (0 - 2)^2 = 4$. Con $x^2 = 3/2$ es $3/2 + (3/2 - 2)^2 = 3/2 + 1/4 = 7/4$, que es menor.

De $x^2 = 3/2$ salen $x = (\sqrt{6})/2$ y $x = -(\sqrt{6})/2$, las dos con $y = 3/2 - 2 = -1/2$. Los puntos más cercanos son **$((\sqrt{6})/2, -1/2)$ y $(-(\sqrt{6})/2, -1/2)$** , los dos a la misma distancia: la raíz de $7/4$, es decir **$(\sqrt{7})/2$** , que es aproximadamente 1,32.

Ojo. Minimizar la distancia y minimizar su cuadrado dan el mismo punto porque la raíz es creciente, pero NO dan el mismo número: el mínimo de f es $7/4$ y la distancia mínima es su raíz, $(\sqrt{7})/2$. Dar $7/4$ como distancia es el error típico de este atajo.

29 Un depósito abierto por arriba tiene base cuadrada y ha de contener 32 m³. Halla las dimensiones que hacen mínima la superficie de chapa.

Solución

Si el lado de la base es x y la altura es h , el volumen es $x^2 \cdot h = 32$, así que $h = 32 / x^2$.

La superficie, al estar abierto por arriba, es la base más las cuatro paredes: $S = x^2 + 4xh$.

Sustituyendo h : $S(x) = x^2 + 4x \cdot 32/x^2 = x^2 + 128/x$.

Como x es el lado de la base, solo tiene sentido $x > 0$; eso descarta de entrada las raíces negativas que puedan aparecer.

Se deriva: $S'(x) = 2x - 128/x^2$. Igualando a cero: $2x = 128/x^2$, es decir $2x^3 = 128$ y $x^3 = 64$, así que $x = 4$ m.

Y la altura: $h = 32/16 = 2$ m.

Se comprueba que es mínimo: $S''(x) = 2 + 256/x^3$, que en $x = 4$ vale $2 + 4 = 6$, positiva.

Representación de funciones

Lo que hay que saber

El orden que no falla: **dominio**, cortes con los ejes, **asíntotas**, crecimiento y extremos, curvatura e inflexiones, y por último se dibuja.

El **dominio** de un cociente excluye lo que anula el denominador; el de una raíz de índice par, lo que la hace negativa; y el de un logaritmo, lo que no es positivo.

Los cortes con el **eje x** salen de igualar la función a cero; el corte con el **eje y** es el valor en $x = 0$, si está en el dominio.

△ Una función tiene COMO MUCHO un corte con el eje y: si tuviera dos, no sería función.

La **simetría** ahorra la mitad del trabajo: es par si $f(-x) = f(x)$ e impar si $f(-x) = -f(x)$.

30 Halla el dominio de $f(x) = (x + 1) / (x^2 - 4)$.

Solución

El dominio de un cociente es todo salvo lo que anula el denominador.

Se iguala a cero: $x^2 - 4 = 0$, es decir $x^2 = 4$, así que $x = 2$ y $x = -2$.

El dominio es todos los reales **menos el 2 y el -2**.

Ojo. Que el numerador se anule en $x = -1$ no quita ese punto del dominio. Lo que excluye un punto es el denominador, no el numerador.

31 Halla los cortes con los ejes y la simetría de $f(x) = x^3 - 4x$.

Solución

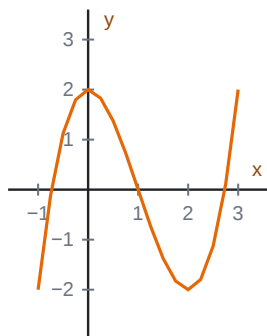
Cortes con el eje x: se iguala a cero. $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$, que se anula en **0, -2 y 2**.

Corte con el eje y: $f(0) = 0$, así que pasa por el **origen**.

Simetría: $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x$, que es $-(x^3 - 4x) = -f(x)$.

Así que la función es **impar**: su gráfica es simétrica respecto del origen.

Representa la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en unos ejes, usando lo hallado en los ejercicios anteriores, y compárala con el dibujo, que la trae ya trazada.



La curva de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ dibujada sobre sus ejes, a escala y con la misma unidad en los dos, marcados de uno en uno. Se ve el máximo en $(0, 2)$, el punto de inflexión en $(1, 0)$ y el mínimo en $(2, -2)$; por la izquierda la curva sube desde $(-1, -2)$ y por la derecha vuelve a subir hasta $(3, 2)$. El dibujo se detiene en $x = 3$ a propósito: en el 4 la función ya vale 18 y se saldría del papel.

Solución

Se sigue el orden de la caja. **Dominio:** todos los números reales, porque es un polinomio y está definido en todas partes.

Cortes con los ejes. Con el eje y , $f(0) = 2$, que resulta ser el propio máximo. Con el eje x , las raíces de $x^3 - 3x^2 + 2$: una se ve a simple vista, $x = 1$, y sacándola por Ruffini queda $x^2 - 2x - 2$, cuyas raíces son $1 + \sqrt{3} \approx 2,73$ y $1 - \sqrt{3} \approx -0,73$.

Asíntotas: ninguna. Es un polinomio, y eso se mira antes de dibujar, no después.

Crecimiento y extremos: crece hasta $x = 0$, decrece entre 0 y 2, y vuelve a crecer a partir de 2, con máximo en $(0, 2)$ y mínimo en $(2, -2)$.

Curvatura: $f''(x) = 6x - 6$, negativa antes de $x = 1$ (cóncava hacia abajo) y positiva después (cóncava hacia arriba), así que el punto de inflexión está en $(1, 0)$.

Con el máximo, la inflexión y el mínimo, y con esa forma, la curva queda determinada: sube hasta **(0, 2)**, baja pasando por **(1, 0)** hasta **(2, -2)** y vuelve a subir.

Comparando con el dibujo: coincide punto por punto —el mismo máximo, el mismo mínimo y la misma inflexión—, y se ven los tres cortes con el eje x .

Ojo. No hay asíntotas, porque es un polinomio: ninguna función polinómica se dispara en un punto ni tiende a una recta en el infinito. Suelen aparecer en cocientes, raíces, logaritmos y exponenciales, aunque no en todos: $(x^2 - 1)/(x - 1)$ es un cociente y NO tiene asíntota vertical en $x = 1$, porque el numerador también se anula allí y se simplifica a $x + 1$.

Integrales indefinidas

Lo que hay que saber

Integrar es la operación contraria de derivar: $\int f(x)dx$ es UNA función cuya derivada es f . $\triangle$ Por eso lleva la **constante C**: todas las funciones que se diferencian en una constante tienen la misma derivada.

La **inmediata** más usada: la integral de x^n es x^{n+1} dividido entre $n+1$, más C . Vale para todo n salvo -1 .

En el **cambio de variable** se llama t a una parte de la expresión; hay que cambiar también el dx .

Por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$. Se elige como u lo que se simplifique al derivar.

▪ El resultado de una integral se **comprueba derivando**: tiene que salir lo de dentro. Es la comprobación más barata que hay.

33 Calcula $\int (x^3 + 2x) dx$.

Solución

Se integra término a término con la regla de la potencia.

La de x^3 es $x^4/4$, porque el exponente sube a 4 y se divide entre 4.

La de $2x$ es $2 \cdot x^2/2 = x^2$.

El resultado es $x^4/4 + x^2 + C$.

Comprobación derivando: la derivada de $x^4/4$ es $4x^3/4 = x^3$, y la de x^2 es $2x$. Sale lo de dentro.

34 Calcula $\int x \cdot e^x dx$ por partes.

Solución

Se elige $u = x$, porque al derivar se simplifica, y $dv = e^x dx$.

Entonces $du = dx$ y $v = e^x$.

Aplicando la fórmula: $x \cdot e^x - \int e^x dx$.

Y esa última integral es e^x , así que el resultado es $x \cdot e^x - e^x + C$.

Comprobación derivando el producto: $1 \cdot e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x$. Sale lo de dentro.

Ojo. Eligiendo al revés ($u = e^x$) la integral que queda es peor que la de partida. La elección de u no es indiferente.

35 Calcula $\int 2x \cdot (x^2 + 1)^3 dx$ con un cambio de variable.

Solución

Se llama $t = x^2 + 1$. Entonces $dt = 2x \cdot dx$, que es justo lo que hay delante.

La integral se convierte en $\int t^3 dt$.

Por la regla de la potencia: $t^4/4 + C$.

Se deshace el cambio: $(x^2 + 1)^4/4 + C$.

Comprobación derivando con la regla de la cadena: $4(x^2+1)^3 \cdot 2x : 4 = 2x(x^2+1)^3$. Sale lo de dentro.

36 Calcula $\int (1/x) dx$ y di por qué no vale la regla de la potencia.

Solución

$1/x$ es x^{-1} , y la regla de la potencia sube el exponente a $-1 + 1 = 0$ y divide entre 0, que no se puede. Ese es justo el caso que la regla excluye.

La integral de $1/x$ es el **logaritmo neperiano del valor absoluto de x**, más C.

Comprobación derivando: la derivada de $\ln|x|$ es $1/x$ tanto si x es positivo como si es negativo (si $x < 0$, $\ln(-x)$ deriva $(-1)/(-x) = 1/x$). Sale lo de dentro.

Ojo. El valor absoluto no es un adorno: el logaritmo solo existe para positivos, y $1/x$ también está definida para los negativos.

Integral definida y áreas

Lo que hay que saber

La **regla de Barrow**: la integral definida entre a y b es $F(b) - F(a)$, donde F es cualquier primitiva. $\triangle$ La constante C se cancela al restar, así que aquí no hace falta.

La integral definida de una función **positiva** entre a y b es el área bajo la curva.

▪ Si la función cambia de signo en el intervalo, la integral **no** es el área: hay que partir el intervalo por los cortes con el **eje x**, integrar en cada tramo y sumar los valores absolutos.

El **área entre dos curvas** es la integral de la de arriba menos la de abajo, entre sus puntos de corte.

$\triangle$ Antes hay que hallar los puntos de corte y saber **cuál va por encima** en cada tramo.

37 Calcula la integral definida de x^3 entre 0 y 2.

Solución

Una primitiva de x^3 es $x^4/4$.

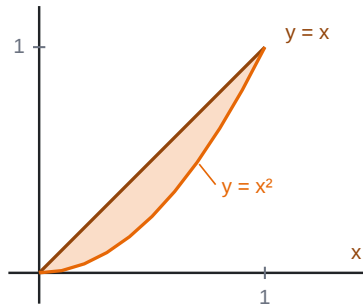
Por la regla de Barrow se evalúa en los dos extremos y se resta: $2^4/4 - 0^4/4$.

$2^4 = 16$, así que queda $16/4 - 0 = 4$.

Como x^3 es positiva entre 0 y 2, ese 4 es además el área bajo la curva.

38

Calcula el área de la región entre la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$ que aparece sombreada en el dibujo.



Los ejes con las dos curvas del ejercicio, dibujadas a escala y con la misma unidad en los dos ejes. La recta marrón es $y = x$ y la curva naranja, $y = x^2$. La zona sombreada entre las dos, desde el origen hasta el punto donde se cortan, es la que hay que medir. Las dos marcas grises señalan el 1 en cada eje.

Solución

Primero los puntos de corte: $x = x^2$, es decir $x^2 - x = 0$ y $x(x - 1) = 0$, así que se cortan en $x = 0$ y $x = 1$.

Entre 0 y 1 la recta va por encima: por ejemplo en $x = 1/2$, la recta vale $1/2$ y la parábola $1/4$.

El área es la integral de la de arriba menos la de abajo: $\int (x - x^2) dx$ entre 0 y 1.

La primitiva es $x^2/2 - x^3/3$. En $x = 1$ vale $1/2 - 1/3 = 1/6$, y en $x = 0$ vale 0.

El área es **$1/6$** .

Ojo. Hay que restar en el orden correcto. Haciendo parábola menos recta saldría $-1/6$, y un área no es negativa: el signo avisa de que el orden estaba al revés.

39

Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^2 - 1$ y el eje x , entre $x = -1$ y $x = 1$.

Solución

Entre -1 y 1 la función es negativa o cero: por ejemplo en $x = 0$ vale -1 .

Así que la integral dará un número negativo y el área es su valor absoluto.

Una primitiva es $x^3/3 - x$. En $x = 1$ vale $1/3 - 1 = -2/3$, y en $x = -1$ vale $-1/3 + 1 = 2/3$.

La integral es $-2/3 - 2/3 = -4/3$, así que el área es **$4/3$** .

Ojo. Dar $-4/3$ como área sería un error de bulto. La integral puede ser negativa; el área, no.

Vectores en el espacio

Lo que hay que saber

El **producto escalar** de dos vectores es la suma de los productos de sus componentes. Es un **número**, no un vector.

Dos vectores **no nulos** son **perpendiculares** si su producto escalar es cero. (El vector nulo lo tiene cero con todos, y no se dice que sea perpendicular a nada.)

El **producto vectorial** de dos vectores es otro **vector**, perpendicular a los dos. Su módulo es el área del paralelogramo que forman.

▪ No confundirlos: el escalar da un número y el vectorial da un vector. Confundirlos sale caro porque la cuenta se puede hacer igual y el resultado no significa lo mismo.

El **producto mixto** de tres vectores es el determinante que forman, y su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo. Si da cero, los tres son coplanarios.

40 Dados $u = (1, 2, 3)$ y $v = (2, -1, 0)$, calcula su producto escalar y di si son perpendiculares.

Solución

El producto escalar es la suma de los productos de las componentes: $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0$.

Eso es $2 - 2 + 0 = 0$.

Como el producto escalar es cero, los dos vectores **sí son perpendiculares**.

Ojo. El resultado 0 es un número, no el vector nulo. El producto escalar da un número, no un vector.

41 Con los mismos u y v , calcula su producto vectorial y comprueba que es perpendicular a los dos.

Solución

Las componentes del producto vectorial son: $2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) = 3$; $3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 6$; $1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -5$.

Así que $u \times v = (3, 6, -5)$.

Se comprueba con el escalar: $(3, 6, -5) \cdot (1, 2, 3) = 3 + 12 - 15 = 0$ OK.

Y con el otro: $(3, 6, -5) \cdot (2, -1, 0) = 6 - 6 + 0 = 0$ OK. Es perpendicular a los dos.

42 Halla el producto mixto de $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, -1, 0)$ y $w = (0, 1, 1)$, y di si los tres vectores son coplanarios.

Solución

El producto mixto es el determinante que forman los tres vectores por filas: $(1, 2, 3; 2, -1, 0; 0, 1, 1)$.

Se desarrolla por la primera fila: $1 \cdot (-1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 3 \cdot (2 \cdot 1 - (-1) \cdot 0)$.

Cada paréntesis: $-1 - 0 = -1$; $2 - 0 = 2$; $2 - 0 = 2$.

Queda $1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = -1 - 4 + 6 = 1$.

Como no es cero, los tres vectores **no son coplanarios**, y el volumen del paralelepípedo que forman es $|1| = 1$.

Ojo. El producto mixto puede salir negativo, y el volumen es su VALOR ABSOLUTO. Un volumen negativo no existe; lo que el signo dice es la orientación de los tres vectores.

Rectas y planos en el espacio

Lo que hay que saber

Una **recta** queda determinada por un punto y un vector director; un **plano**, por un punto y un vector normal (perpendicular a él).

La **ecuación general** del plano es $Ax + By + Cz + D = 0$, y el vector (A, B, C) es justamente su vector **normal**.

Si el producto escalar del director por el normal es **cero**, la recta no corta al plano en un solo punto: o es **paralela** o está **contenida** en él. Para distinguirlo se mira si un punto de la recta cumple la ecuación del plano: si la cumple, está contenida.

Y es **perpendicular** al plano si su director es paralelo al normal.

- 43** Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y tiene por vector normal $n = (2, -1, 4)$.

Solución

Con el normal $(2, -1, 4)$ la ecuación es de la forma $2x - y + 4z + D = 0$.

Para hallar D se impone que P esté en el plano: $2 \cdot 1 - 2 + 4 \cdot 3 + D = 0$.

Eso es $2 - 2 + 12 + D = 0$, es decir $12 + D = 0$ y $D = -12$.

El plano es **$2x - y + 4z - 12 = 0$** .

Comprobación con P : $2 - 2 + 12 - 12 = 0$ OK.

- 44** ¿Es la recta que pasa por $A(0, 0, 3)$ con vector director $d = (1, 2, 0)$ paralela al plano $2x - y + 4z - 12 = 0$, perpendicular, o está contenida en él?

Solución

El vector normal del plano es $n = (2, -1, 4)$.

Se calcula el producto escalar del director con el normal: $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 = 2 - 2 + 0 = 0$.

Como es cero, el director es perpendicular al normal, así que la recta es paralela al plano **o está contenida** en él.

Perpendicular al plano no es: para serlo su director tendría que ser paralelo al normal, y $(1, 2, 0)$ no es múltiplo de $(2, -1, 4)$ —si lo fuera, de la primera componente saldría el factor $1/2$ y de la segunda, -2 —.

Para distinguirlo se mira si el punto A cumple la ecuación del plano: $2 \cdot 0 - 0 + 4 \cdot 3 - 12 = 12 - 12 = 0$. Sí la cumple.

Así que la recta **está contenida** en el plano.

Ojo. Con el producto escalar cero el ejercicio no está acabado. Faltaba justamente el paso que distingue «paralela» de «contenida».

- 45** Halla el punto donde la recta que pasa por $B(1, 0, 0)$ con director $d = (0, 0, 1)$ corta al plano $2x - y + 4z - 12 = 0$.

Solución

Los puntos de la recta son $(1, 0, t)$, porque solo cambia la tercera componente.

Se sustituyen en la ecuación del plano: $2 \cdot 1 - 0 + 4t - 12 = 0$.

Queda $4t - 10 = 0$, así que $t = 5/2$.

El punto de corte es $(1, 0, 5/2)$.

Comprobación: $2 \cdot 1 - 0 + 4 \cdot 5/2 - 12 = 2 + 10 - 12 = 0$ OK.

Probabilidad: condicionada, total y Bayes

Lo que hay que saber

La **probabilidad condicionada** $P(A|B)$ es la de A sabiendo que B ha ocurrido: los casos posibles se reducen a los de B.

La **probabilidad total** de un suceso que puede llegar por varios caminos incompatibles es la suma de lo que aporta cada camino.

El **teorema de Bayes** va al revés: sabiendo que el suceso ha ocurrido, da la probabilidad de que haya llegado por un camino concreto. Es ese camino dividido entre el total.

△ Bayes y la probabilidad total usan los mismos números: lo que cambia es la pregunta. La total pregunta «¿qué probabilidad hay de que pase?» y Bayes, «si ha pasado, ¿por dónde vino?».

El **diagrama de árbol** lo ordena: cada camino es una rama, y su probabilidad es el producto de las que hay a lo largo de ella.

- 46** Una fábrica tiene dos máquinas: A produce el 60 % de las piezas y B el 40 %. De las de A sale defectuosa el 2 %, y de las de B, el 5 %, como recoge el diagrama del dibujo. ¿Qué probabilidad hay de que una pieza salga defectuosa?

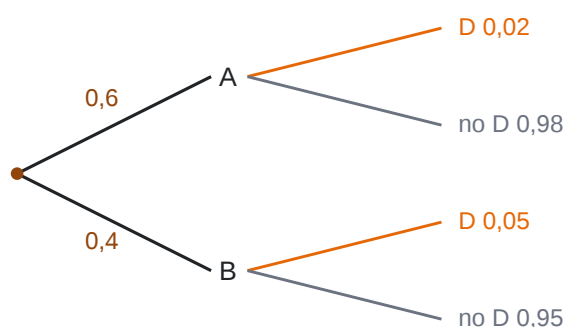


Diagrama de árbol con los datos del enunciado. Del punto de partida salen las dos máquinas, A con probabilidad 0,6 y B con 0,4. De cada una salen dos ramas: la naranja, que es «sale defectuosa» (D), con 0,02 en la máquina A y 0,05 en la B; y la gris, que es «no sale defectuosa», con 0,98 y 0,95: las dos ramas de cada nodo suman 1. △ El dibujo no está a escala: las ramas no son más largas por ser más probables.

Solución

Una pieza defectuosa puede llegar por dos caminos, y cada uno es el producto de las probabilidades de su rama.

Camino A: $0,6 \cdot 0,02 = 0,012$.

Camino B: $0,4 \cdot 0,05 = 0,02$.

Como los dos caminos son incompatibles, la probabilidad total es la suma: $0,012 + 0,02 = 0,032$, es decir, el 3,2 %.

Ojo. No se hace la media de 2 % y 5 %, que daría 3,5 %. Cada camino pesa lo que produce su máquina, y A produce más.

- 47** Con los mismos datos: se toma una pieza y resulta defectuosa. ¿Qué probabilidad hay de que la haya fabricado la máquina A?

Solución

Ahora la pregunta va al revés, así que es el teorema de Bayes.

Lo que se busca es la parte del total que aporta el camino A, dividida entre el total.

El camino A aporta 0,012 y el total es 0,032.

$P(A \mid \text{defectuosa}) = 0,012/0,032 = 3/8$, es decir, 0,375.

Ojo. No es 0,6, que es la probabilidad de que una pieza cualquiera venga de A. Saber que es defectuosa cambia la probabilidad, y la baja, porque A es la máquina que menos defectos produce.

- 48** Con los mismos datos, ¿qué probabilidad hay de que una pieza defectuosa venga de la máquina B? Comprueba el resultado con el del ejercicio anterior.

Solución

Igual que antes, pero con el camino B: aporta 0,02 de un total de 0,032.

$P(B \mid \text{defectuosa}) = 0,02 : 0,032 = 5/8$, es decir, 0,625.

Comprobación: una pieza defectuosa viene de A o de B, no hay más caminos, así que las dos probabilidades tienen que sumar 1.

$3/8 + 5/8 = 8/8 = 1$ OK.

Ojo. B produce menos piezas que A y sin embargo es la causa más probable de un defecto. No es una contradicción: produce menos, pero falla más del doble.