

Ejercicios de Matemáticas de 2.º de ESO resueltos

47 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 14 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Potencias y exponente negativo · Propiedades y exponentes negativos (**ejercicios 1, 2, 3, 4**)

Números enteros · Operaciones combinadas con signos (**ejercicios 5, 6, 7**)

Fracciones: operaciones combinadas · Operar, simplificar y problemas (**ejercicios 8, 9, 10, 11**)

Proporcionalidad directa, inversa y compuesta · Proporcionalidad simple y compuesta (**ejercicios 12, 13, 14**)

Porcentajes e interés simple · Subidas, bajadas encadenadas e intereses (**ejercicios 15, 16, 17**)

Expresiones algebraicas y monomios · Valor numérico, sumar y multiplicar (**ejercicios 18, 19, 20, 21**)

Ecuaciones de primer grado con denominadores · Quitar denominadores y paréntesis (**ejercicios 22, 23, 24, 25**)

Sistemas de dos ecuaciones por sustitución · Despejar, sustituir y comprobar (**ejercicios 26, 27, 28**)

Teorema de Pitágoras · Hallar un lado y reconocer rectángulos (**ejercicios 29, 30, 31**)

Áreas y perímetros: polígonos y círculo · Figuras planas y compuestas (**ejercicios 32, 33, 34, 35**)

Poliedros y cuerpos de revolución · Volúmenes de cuerpos (**ejercicios 36, 37, 38**)

Semejanza y escalas · Razón de semejanza y planos (**ejercicios 39, 40, 41**)

Funciones: tablas, gráficas y función lineal · Puntos, pendiente y recta (**ejercicios 42, 43, 44**)

Probabilidad: regla de Laplace · Casos favorables entre posibles (**ejercicios 45, 46, 47**)

Material propio de solucionariomatematicas.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionariomatematicas.es

Qué entra y qué no. Entran los catorce bloques del índice, todos con ejercicios resueltos, y cuatro de ellos llevan su figura. Esta página recoge lo que la de 1.º de ESO dejó anunciado: las potencias de exponente negativo, la proporcionalidad compuesta, las ecuaciones con denominadores, los poliedros y los cuerpos de revolución, y la probabilidad. Se da por sabido lo de 1.º (la divisibilidad, las operaciones con enteros y fracciones sencillas, los ángulos y las áreas de las figuras básicas). **No entran**, por ser de 3.º de ESO: la notación científica, los radicales, los productos notables y la factorización, la división de polinomios y la regla de Ruffini, las ecuaciones de segundo grado, los métodos de igualación y reducción, el interés compuesto, la desviación típica y el diagrama de árbol. Tampoco entra el **teorema de Tales**, que está completo, y con sus dibujos, en la página de 3.º de ESO: aquí entra la semejanza y las escalas, que es la puerta a ese teorema. Estos ejercicios no sustituyen al temario ni a los del libro.

Ejercicios de Matemáticas de 2.º de ESO resueltos

Potencias y exponente negativo

Lo que hay que saber

Para **multiplicar** potencias de la misma base se deja la base y se **suman** los exponentes. Para **dividirlas**, se **restan**.

Una **potencia de otra potencia** se calcula multiplicando los exponentes.

⚠ Estas propiedades solo valen con la **misma base**. Con bases distintas hay que calcular cada potencia por separado.

Un **exponente negativo** significa «uno partido por»: a^{-n} es 1 dividido entre a^n . No quiere decir que el resultado sea negativo.

Toda potencia de exponente **0** vale **1**, sea cual sea la base (salvo el 0).

1 Calcula aplicando las propiedades, y deja el resultado como un número entero: $(2^3 \cdot 2^5) : 2^4$.

Solución

Las tres potencias tienen la misma base, 2, así que se pueden aplicar las propiedades.

En el paréntesis se multiplican, así que se suman los exponentes: $3 + 5 = 8$. Queda 2^8 .

Ahora se divide, así que se restan: $8 - 4 = 4$. Queda 2^4 .

Y $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Ojo. Los exponentes se suman y se restan, pero la base no se toca. El resultado no es 4^8 ni 2^{60} .

2 Escribe con exponente positivo y calcula: 3^{-2} y 5^{-1} .

Solución

Un exponente negativo es «uno partido por» la potencia con el exponente positivo.

$3^{-2} = 1/3^2 = 1/9$.

$5^{-1} = 1/5^1 = 1/5$.

Ojo. 3^{-2} no es -9 ni -6 . El signo menos está en el exponente, no en el resultado, y la potencia sale positiva.

3 Calcula $(4^2)^3 : 4^5$.

Solución

Una potencia de otra potencia se calcula multiplicando los exponentes: $2 \cdot 3 = 6$, así que $(4^2)^3 = 4^6$.

Ahora la división, restando exponentes: $6 - 5 = 1$. Queda 4^1 .

Y $4^1 = 4$.

Ojo. En una potencia de otra potencia los exponentes se MULTIPLICAN; sumándolos saldría 4^5 , y la división daría 1.

4 Calcula $2^0 + 3^0 + 7^{-1} \cdot 7$.

Solución

Toda potencia de exponente 0 vale 1, así que $2^0 = 1$ y $3^0 = 1$.

En $7^{-1} \cdot 7$ las dos tienen base 7, así que se suman los exponentes: $-1 + 1 = 0$. Queda $7^0 = 1$.

La cuenta es $1 + 1 + 1 = 3$.

Se puede comprobar el último sumando por el otro camino: 7^{-1} es $1/7$, y $1/7 \cdot 7 = 1$.

Números enteros

Lo que hay que saber

El **orden** de las operaciones manda también con enteros: primero los paréntesis, después potencias y raíces, luego multiplicaciones y divisiones, y al final sumas y restas.

La **regla de los signos** en el producto y el cociente: dos signos iguales dan más, dos distintos dan menos.

△ En la suma y la resta la regla es otra: con el **mismo signo** se suman los valores y se conserva el signo; con **signos distintos** se resta el pequeño del grande **sin mirar los signos**, y al resultado se le pone el signo del número que era mayor **cuando se miran sin signo**.

Un **menos delante de un paréntesis** cambia el signo de todo lo que hay dentro al quitarlo.

△ Una potencia de **exponente par** de un número negativo sale positiva; de exponente **impar**, negativa.

5 Calcula: $-5 + 3 \cdot (-4) - (-6)$.

Solución

Primero la multiplicación: $3 \cdot (-4)$. Signos distintos, así que el resultado es negativo: -12 .

La cuenta queda $-5 - 12 - (-6)$.

Restar un negativo es sumar: $-5 - 12 + 6$.

Se opera de izquierda a derecha: $-5 - 12 = -17$, y $-17 + 6 = -11$.

Ojo. La multiplicación va antes que las sumas y las restas. Haciendo $-5 + 3$ primero saldría otro número.

6 Calcula: $(-2)^4$ y -2^4 . ¿Dan lo mismo?

Solución

En $(-2)^4$ el paréntesis incluye al signo, así que se multiplica el -2 cuatro veces: $(-2) \cdot (-2) = 4$, $4 \cdot (-2) = -8$ y $-8 \cdot (-2) = 16$. Da **16**.

En -2^4 el exponente afecta solo al 2, y el signo menos se queda fuera: primero $2^4 = 16$ y después se le pone el menos. Da **-16**.

Así que **no dan lo mismo**: el paréntesis cambia el resultado.

Ojo. El paréntesis es lo único que cambia, y le da la vuelta al signo del resultado: 16 frente a -16. Al copiar un enunciado hay que copiarlo con sus paréntesis.

7 Calcula: $-3 \cdot (5 - 8) + (-12) : 4$.

Solución

Primero el paréntesis: $5 - 8 = -3$.

Ahora $-3 \cdot (-3)$: signos iguales, así que da +9.

La división: $(-12) : 4$. Signos distintos, así que da -3.

Queda $9 + (-3) = 9 - 3 = 6$.

Fracciones: operaciones combinadas

Lo que hay que saber

Para **sumar o restar** hay que poner el mismo denominador: se calcula el m.c.m. de los denominadores y cada numerador se multiplica por lo que se ha multiplicado su denominador.

Para **multiplicar**, numerador por numerador y denominador por denominador. Para **dividir**, se multiplica por la inversa de la segunda.

El **orden** no cambia porque haya fracciones: paréntesis, después productos y cocientes, y al final sumas y restas.

Para hallar la **fracción de una cantidad** se divide entre el denominador y se multiplica por el numerador.

△ El resultado se simplifica dividiendo numerador y denominador por su máximo común divisor.

8 Calcula y simplifica: $2/3 + 1/4 \cdot 2/5$.

Solución

El producto va antes que la suma: $1/4 \cdot 2/5 = 2/20$, que simplificado dividiendo por 2 es $1/10$.

Ahora $2/3 + 1/10$. El m.c.m. de 3 y 10 es 30.

$2/3 = 20/30$ (se ha multiplicado por 10 arriba y abajo) y $1/10 = 3/30$ (por 3).

$20/30 + 3/30 = 23/30$, que ya está simplificada porque 23 es primo y no divide a 30.

9 Calcula: $(3/4 - 1/2) : 5/8$.

Solución

Primero el paréntesis. El m.c.m. de 4 y 2 es 4, así que $1/2 = 2/4$.

$3/4 - 2/4 = 1/4$.

Ahora la división: $1/4 : 5/8 = 1/4 \cdot 8/5 = 8/20$.

Se simplifica dividiendo por 4: $8/20 = 2/5$.

- 10 De un depósito de 400 litros se saca primero $\frac{1}{5}$ y después $\frac{3}{8}$ de lo que quedaba. ¿Cuántos litros quedan al final?

Solución

Lo primero que se saca: $\frac{1}{5}$ de 400 es $400 : 5 = 80$ litros.

Después de eso quedan $400 - 80 = 320$ litros.

Lo segundo se calcula sobre lo que QUEDABA, no sobre el total: $\frac{3}{8}$ de 320 es $320 : 8 = 40$ y $40 \cdot 3 = 120$ litros.

Al final quedan $320 - 120 = 200$ litros.

Ojo. El segundo $\frac{3}{8}$ no se calcula sobre los 400 iniciales. Haciéndolo así saldrían 150 litros sacados en vez de 120, y el resultado final sería otro.

- 11 Calcula y simplifica: $\frac{5}{6} : (\frac{1}{3} + \frac{1}{2})$.

Solución

Primero el paréntesis. El m.c.m. de 3 y 2 es 6: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ y $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.

$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$.

Ahora la división: $\frac{5}{6} : \frac{5}{6}$. Dividir un número entre sí mismo da 1.

Hecho con la regla: $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = \frac{30}{30} = 1$.

Proporcionalidad directa, inversa y compuesta

Lo que hay que saber

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al doble de una le corresponde el doble de la otra; son **inversamente proporcionales** cuando al doble de una le corresponde la mitad de la otra.

⚠ Antes de calcular hay que decidir de qué tipo es, porque la cuenta es distinta. La pregunta: si una aumenta, ¿la otra aumenta o disminuye?

En la **proporcionalidad compuesta** intervienen tres o más magnitudes. Se compara la incógnita con **cada una por separado**, decidiendo en cada caso si es directa o inversa.

Un método seguro para la compuesta: se multiplica por la fracción que corresponde a cada magnitud, poniendo el dato nuevo arriba si es directa y abajo si es inversa.

⚠ En la proporcionalidad simple conviene mirar al final si el resultado ha subido o ha bajado como esperabas. En la compuesta ese control no sirve: una magnitud puede subirlo y otra bajarlo a la vez, así que ahí hay que fiarse de las fracciones escritas.

- 12 Seis obreros tardan 12 días en hacer una obra. ¿Cuántos días tardarían 9 obreros al mismo ritmo?

Solución

Más obreros tardan menos días: es **proporcionalidad inversa**.

Se calcula el trabajo total en jornadas de un obrero: $6 \cdot 12 = 72$ jornadas.

Esas 72 jornadas se reparten entre 9 obreros: $72 : 9 = 8$ días.

Tiene sentido: 9 obreros son más que 6, y 8 días son menos que 12.

- 13** Ocho obreros, trabajando 6 horas al día, levantan un muro en 10 días. ¿Cuántos días tardarían 12 obreros trabajando 5 horas al día?

Solución

Hay tres magnitudes, así que se compara la incógnita (los días) con cada una por separado.

Con los obreros: más obreros, menos días → **inversa**, así que se multiplica por $8/12$.

Con las horas al día: menos horas al día, más días → **inversa** también, así que se multiplica por $6/5$.

La cuenta es $10 \cdot 8/12 \cdot 6/5$. Primero $10 \cdot 8 = 80$ y $80 : 12 = 20/3$; después $20/3 \cdot 6/5 = 120/15 = 8$ días.

Ojo. Las dos comparaciones son inversas, pero una sube el resultado y otra lo baja, así que no basta con juntarlas a ojo: hay que escribir las dos fracciones.

- 14** En un mapa, una carretera de 84 km mide 12 cm. ¿Cuál es la escala del mapa? ¿Cuántos kilómetros son 5 cm?

Solución

La escala dice cuántos kilómetros de verdad representa 1 cm del mapa: $84 : 12 = 7$, así que 1 cm son **7 km**. Escrita como $1 : n$ hay que poner las dos medidas en la misma unidad: 7 km son 700 000 cm, así que la escala es **1 : 700 000**.

Para 5 cm se multiplica: $5 \cdot 7 = 35$ km.

Se comprueba hacia atrás: $35 : 7 = 5$ cm.

Porcentajes e interés simple

Lo que hay que saber

Un **porcentaje** es una fracción de denominador 100. Para calcular el tanto por ciento de una cantidad se divide entre 100 y se multiplica por el porcentaje.

Para **subir** un $p\%$, se multiplica por $(100 + p) : 100$; para **bajar** un $p\%$, por $(100 - p) : 100$. Ese número es el **índice de variación**.

⚠ Dos variaciones **encadenadas** se aplican multiplicando sus dos índices, una detrás de otra. **No** se suman ni se restan los porcentajes.

El **interés simple** se calcula sobre el capital inicial, el mismo todos los años: $I = C \cdot r \cdot t : 100$, donde r es el tanto por ciento anual y t , los años.

⚠ En el interés simple los intereses no generan intereses; eso es el compuesto, que es de 3.º.

- 15** Un abrigo cuesta 80 €. En noviembre sube un 25 % y en enero baja un 20 %. ¿Cuánto cuesta en enero?

Solución

La subida del 25 %: el índice es $(100 + 25) : 100 = 1,25$. Así que $80 \cdot 1,25 = 100$ €.

La bajada del 20 % se aplica sobre el precio de noviembre, no sobre el inicial: el índice es $(100 - 20) : 100 = 0,8$, así que $100 \cdot 0,8 = 80$ €.

En enero vuelve a costar lo mismo que al principio.

Ojo. Subir un 25 % y bajar un 20 % no se compensa porque 25 y 20 sean parecidos: se compensa porque $1,25 \cdot 0,8 = 1$ exactamente. Con un 25 % y un 25 % no pasaría.

16 ¿Qué porcentaje de descuento se ha aplicado a un artículo que costaba 60 € y ahora cuesta 51 €?

Solución

El descuento en euros es $60 - 51 = 9$ €.

Ese descuento se compara con el precio de partida: $9/60$.

Para pasarlo a porcentaje se busca la fracción de denominador 100: $9/60$ simplificada por 3 es $3/20$, y $3/20 = 15/100$.

Así que el descuento ha sido del **15 %**.

Se comprueba: el 15 % de 60 es $60 : 100 = 0,6$ y $0,6 \cdot 15 = 9$ €.

17 Se depositan 2 000 € a un interés simple del 3 % anual durante 4 años. ¿Cuánto dinero se tiene al final?

Solución

Los intereses de un año: $2\,000 : 100 = 20$, y $20 \cdot 3 = 60$ € al año.

En 4 años, como es interés simple, se calculan sobre el capital inicial: $60 \cdot 4 = \mathbf{240$ € de intereses.

El dinero final es el capital más los intereses: $2\,000 + 240 = \mathbf{2\,240$ €.

Con la fórmula sale lo mismo: $I = 2\,000 \cdot 3 \cdot 4 : 100 = 24\,000 : 100 = 240$ €.

Expresiones algebraicas y monomios

Lo que hay que saber

Un **monomio** es un producto de un número (el coeficiente) por una o más letras con exponente. El **grado** es la suma de los exponentes de las letras.

Dos monomios son **semejantes** si tienen exactamente la misma parte literal (las mismas letras con los mismos exponentes).

⚠ Solo se pueden **sumar o restar** monomios semejantes: se suman los coeficientes y la parte literal se deja igual. $3x$ y $3x^2$ no se suman.

Para **multiplicar** monomios se multiplican los coeficientes entre sí y las partes literales entre sí (sumando los exponentes de las letras iguales). Esto sí se puede hacer aunque no sean semejantes.

El **valor numérico** se obtiene sustituyendo cada letra por su número y haciendo la cuenta, respetando el orden de las operaciones.

18 Calcula el valor numérico de $3x^2 - 2x + 5$ para $x = -2$.

Solución

Se sustituye la x por -2 , poniendo paréntesis: $3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 5$.

La potencia primero: $(-2)^2 = 4$, así que $3 \cdot 4 = 12$.

El segundo término: $-2 \cdot (-2) = +4$.

Queda $12 + 4 + 5 = \mathbf{21}$.

Ojo. Hay que poner el paréntesis al sustituir. Sin él se escribiría -2^2 , que vale -4 y no 4 , y el resultado cambiaría.

19 Reduce: $5x^2 - 3x + 2x^2 + 7x - x^2$.

Solución

Se agrupan los monomios semejantes. Los de x^2 son $5x^2$, $2x^2$ y $-x^2$.

Sus coeficientes: $5 + 2 - 1 = 6$. Queda $6x^2$.

Los de x son $-3x$ y $7x$: $-3 + 7 = 4$. Queda $4x$.

El resultado es $6x^2 + 4x$.

Ojo. Los de x^2 y los de x no se juntan, porque no son semejantes: el resultado no se puede dejar como $10x$ ni como $10x^2$.

20 Multiplica: $(4x^2y) \cdot (-3xy^3)$.

Solución

Primero los coeficientes: $4 \cdot (-3) = -12$.

Ahora las letras. Las x : $x^2 \cdot x = x^3$ (se suman los exponentes, $2 + 1 = 3$).

Las y : $y \cdot y^3 = y^4$ ($1 + 3 = 4$).

El producto es $-12x^3y^4$, un monomio de grado 7.

21 Escribe en lenguaje algebraico «el doble de un número menos su tercera parte», y calcula cuánto vale si el número es 12.

Solución

Al número se le llama x .

El doble de un número es $2x$. Su tercera parte es $x/3$.

La expresión es $2x - x/3$.

Para $x = 12$: $2 \cdot 12 = 24$ y $12 : 3 = 4$, así que $24 - 4 = 20$.

Ojo. «la tercera parte» es dividir entre 3, no multiplicar por 3. Con $3x$ saldría 36 y el resultado sería negativo.

Ecuaciones de primer grado con denominadores

Lo que hay que saber

Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita que hace que los dos lados valgan lo mismo.

El orden que no falla: primero se quitan los **denominadores**, después los **paréntesis** que queden, luego se agrupan las x a un lado y los números al otro, y al final se despeja. ⚠ Los denominadores van primero porque un paréntesis puede estar DENTRO de un numerador.

Para **quitar denominadores** se multiplican TODOS los términos de los dos lados por el m.c.m. de los denominadores. ⚠ Todos, también los que no tienen denominador.

Lo que está **sumando** pasa al otro lado restando, y lo que está **multiplicando** pasa dividiendo.

⚠ La solución se **comprueba** sustituyéndola en la ecuación original: es la única forma de saber que está bien sin volver a hacerlo todo.

22 Resuelve: $x/2 + x/3 = 10$.

Solución

El m.c.m. de 2 y 3 es 6, así que se multiplican los tres términos por 6.

$6 \cdot x/2 = 3x$; $6 \cdot x/3 = 2x$; $6 \cdot 10 = 60$. La ecuación queda $3x + 2x = 60$.

Se suman las x : $5x = 60$.

Se despeja: $x = 60 : 5 = 12$.

Comprobación: $12/2 + 12/3 = 6 + 4 = 10$. Correcto.

Ojo. Hay que multiplicar también el 10, aunque no tenga denominador. Si no, saldría $5x = 10$ y la solución sería otra.

23 Resuelve: $2(x - 3) = x + 5$.

Solución

Primero se quita el paréntesis multiplicando: $2 \cdot x = 2x$ y $2 \cdot (-3) = -6$, así que queda $2x - 6 = x + 5$.

Se pasan las x a la izquierda y los números a la derecha: $2x - x = 5 + 6$.

Queda $x = 11$.

Comprobación: $2(11 - 3) = 2 \cdot 8 = 16$, y $11 + 5 = 16$. Correcto.

24 Resuelve: $(x + 1)/4 - (x - 2)/6 = 1$.

Solución

El m.c.m. de 4 y 6 es 12, así que se multiplica todo por 12.

$12 \cdot (x + 1)/4 = 3(x + 1)$ y $12 \cdot (x - 2)/6 = 2(x - 2)$. Y $12 \cdot 1 = 12$.

Queda $3(x + 1) - 2(x - 2) = 12$. Se quitan los paréntesis: $3x + 3 - 2x + 4 = 12$.

⚠ El menos delante del segundo paréntesis cambia los dos signos de dentro: $-2 \cdot (-2) = +4$.

Se reduce: $x + 7 = 12$, así que $x = 5$.

Comprobación: $(5 + 1)/4 - (5 - 2)/6 = 6/4 - 3/6 = 1,5 - 0,5 = 1$. Correcto.

25 La suma de tres números consecutivos es 48. ¿Cuáles son?

Solución

Al primero se le llama x . Los consecutivos son $x + 1$ y $x + 2$.

La ecuación es $x + (x + 1) + (x + 2) = 48$.

Se reduce: $3x + 3 = 48$, así que $3x = 45$ y $x = 15$.

Los tres números son **15, 16 y 17**.

Comprobación: $15 + 16 + 17 = 48$. Correcto.

Sistemas de dos ecuaciones por sustitución

Lo que hay que saber

Un **sistema** de dos ecuaciones con dos incógnitas se resuelve buscando la pareja de valores que cumple **las dos a la vez**.

En el **método de sustitución**: se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, se sustituye esa expresión en la OTRA, se resuelve la ecuación de una sola incógnita que queda, y con ese valor se halla la otra.

△ Conviene despejar la incógnita que tenga coeficiente 1 o -1 : así no aparecen fracciones.

△ La sustitución se hace en la **otra** ecuación. Sustituyendo en la misma de la que se despejó, se llega a una igualdad que se cumple sola y no dice nada.

La solución se **comprueba en las dos ecuaciones**, no solo en una.

26 Resuelve por sustitución: $x + y = 10$; $2x - y = 5$.

Solución

En la primera, la y tiene coeficiente 1, así que se despeja ahí: $y = 10 - x$.

Se sustituye en la SEGUNDA: $2x - (10 - x) = 5$.

Se quita el paréntesis: $2x - 10 + x = 5$, es decir $3x - 10 = 5$.

$3x = 15$, así que $x = 5$. Y entonces $y = 10 - 5 = 5$.

Comprobación en las dos: $5 + 5 = 10$ OK y $2 \cdot 5 - 5 = 5$ OK.

27 Resuelve por sustitución: $3x + y = 11$; $x - 2y = -1$.

Solución

En la primera la y tiene coeficiente 1: $y = 11 - 3x$.

Se sustituye en la segunda: $x - 2(11 - 3x) = -1$.

Se quita el paréntesis: $x - 22 + 6x = -1$, es decir $7x - 22 = -1$.

$7x = 21$, así que $x = 3$. Y $y = 11 - 3 \cdot 3 = 11 - 9 = 2$.

Comprobación: $3 \cdot 3 + 2 = 11$ OK y $3 - 2 \cdot 2 = -1$ OK.

- 28** En un aparcamiento hay coches y motos: 30 vehículos en total y 100 ruedas. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay?

Solución

Se llama x a los coches e y a las motos. Los vehículos: $x + y = 30$.

Las ruedas: cada coche tiene 4 y cada moto 2, así que $4x + 2y = 100$.

Se despeja y en la primera: $y = 30 - x$, y se sustituye en la segunda: $4x + 2(30 - x) = 100$.

Se quita el paréntesis: $4x + 60 - 2x = 100$, o sea $2x = 40$, así que $x = \mathbf{20 \text{ coches}}$ e $y = 30 - 20 = \mathbf{10 \text{ motos}}$.

Comprobación: $20 + 10 = 30$ vehículos OK y $4 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 80 + 20 = 100$ ruedas OK.

Teorema de Pitágoras

Lo que hay que saber

En un triángulo **rectángulo**, la **hipotenusa** es el lado de enfrente del ángulo recto —el más largo— y los otros dos son los **catetos**.

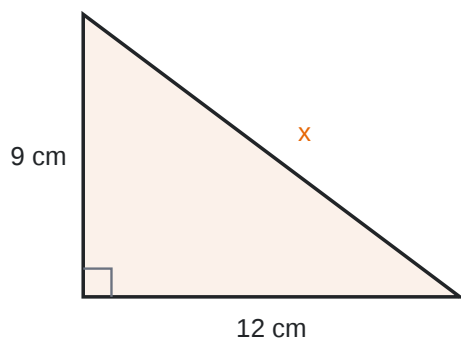
El teorema dice que el cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de los catetos.

Para hallar un **cateto**, la cuenta es al revés: al cuadrado de la hipotenusa se le resta el cuadrado del otro cateto.

⚠ Antes de aplicarlo hay que saber **cuál es la hipotenusa**: confundirla con un cateto cambia la cuenta de sumar a restar.

El teorema también sirve al revés: si el cuadrado del lado mayor es la suma de los cuadrados de los otros dos, el triángulo es rectángulo.

- 29** Calcula la hipotenusa del triángulo rectángulo que aparece en el dibujo, cuyos catetos miden 12 cm y 9 cm.



Triángulo rectángulo dibujado a escala. El ángulo recto es el de abajo a la izquierda, marcado con el cuadradito gris. Los dos lados que lo forman son los catetos: miden 12 cm y 9 cm. El lado de enfrente, el que está marcado con la x , es la hipotenusa, y es la que hay que hallar.

Solución

Los dos lados conocidos son los catetos, así que sus cuadrados se SUMAN.

$$12^2 = 144 \text{ y } 9^2 = 81.$$

La suma es $144 + 81 = 225$, y ese es el cuadrado de la hipotenusa.

La hipotenusa es la raíz cuadrada de 225: como $15 \cdot 15 = 225$, mide **15 cm**.

Tiene sentido: la hipotenusa es el lado más largo, y 15 es mayor que 12 y que 9.

- 30** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 13 m y un cateto, 5 m. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Solución

Aquí se conoce la hipotenusa, así que la cuenta es una RESTA.

$$13^2 = 169 \text{ y } 5^2 = 25.$$

$169 - 25 = 144$, y ese es el cuadrado del cateto que falta.

Como $12 \cdot 12 = 144$, el cateto mide **12 m**.

Ojo. Aquí no se suman los cuadrados. Sumándolos saldría 194, cuya raíz es mayor que la hipotenusa, y un cateto no puede ser más largo que ella.

- 31** ¿Es rectángulo un triángulo cuyos lados miden 8 cm, 15 cm y 17 cm?

Solución

El lado mayor es 17 cm, así que, si fuera rectángulo, esa sería la hipotenusa.

Se calcula su cuadrado: $17^2 = 289$.

Y la suma de los cuadrados de los otros dos: $8^2 = 64$ y $15^2 = 225$, así que $64 + 225 = 289$.

Los dos números coinciden, así que **sí es rectángulo**.

Ojo. Hay que elevar al cuadrado el lado MAYOR. Comparando con otro lado el resultado no cuadraría y se daría por no rectángulo un triángulo que sí lo es.

Áreas y perímetros: polígonos y círculo

Lo que hay que saber

El **perímetro** es lo que mide el contorno: se suman todos los lados. El **área** es la superficie de dentro, y va en unidades cuadradas.

Áreas que hay que saber: rectángulo, base por altura; triángulo, base por altura dividido entre 2; trapecio, suma de las bases por la altura dividido entre 2; rombo, producto de las diagonales dividido entre 2.

En el **círculo**: la longitud de la circunferencia es $2 \cdot \pi \cdot r$ y el área es $\pi \cdot r^2$. Aquí se usa $\pi = 3,14$, así que los resultados son aproximados.

Una **figura compuesta** se parte en figuras conocidas, se calcula el área de cada una y se suman (o se restan, si es un hueco).

△ Al partir una figura compuesta hay que hallar las medidas que no vienen en el dibujo restando las que sí vienen.

- 32** Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de 15 cm de base y 8 cm de altura.

Solución

El área es base por altura: $15 \cdot 8 = 120 \text{ cm}^2$.

El perímetro es la suma de los cuatro lados. Hay dos de 15 cm y dos de 8 cm.

$$15 + 15 + 8 + 8 = 46 \text{ cm}.$$

Ojo. El área va en centímetros cuadrados y el perímetro en centímetros, porque uno mide una superficie y el otro, una longitud.

33

Calcula el área y la longitud de la circunferencia de un círculo de 6 cm de diámetro. Usa $\pi = 3,14$.

Solución

El radio es la mitad del diámetro: $6 : 2 = 3$ cm.

La longitud de la circunferencia es $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3,14 \cdot 3$. Primero $2 \cdot 3,14 = 6,28$, y después $6,28 \cdot 3 = \mathbf{18,84}$ cm.

El área es $\pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 3^2$. El radio al cuadrado es $3 \cdot 3 = 9$, y $3,14 \cdot 9 = \mathbf{28,26}$ cm².

Ojo. El dato del enunciado es el diámetro. Metiendo el 6 en las fórmulas saldría el doble en la longitud y el cuádruple en el área.

34

Calcula el área de la figura en forma de L del dibujo, con las medidas que lleva acotadas.

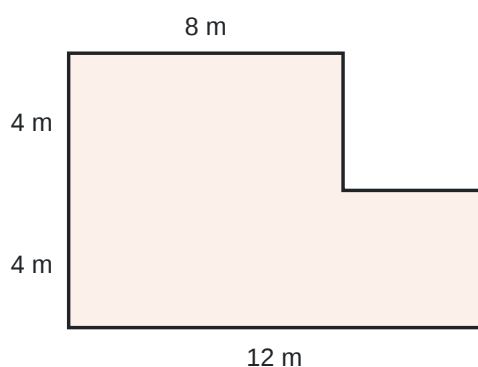


Figura en forma de L dibujada a escala, acotada en metros: el lado de arriba mide 8 m, el de abajo 12 m, y los dos tramos de la izquierda miden 4 m cada uno. Las dos medidas que faltan hay que sacarlas restando las que sí están.

Solución

La figura se parte en dos rectángulos con un corte horizontal, uno encima del otro.

El de arriba mide 8 m de base y 4 m de altura: $8 \cdot 4 = 32$ m².

El de abajo mide 12 m de base y 4 m de altura: $12 \cdot 4 = 48$ m².

El área total es la suma: $32 + 48 = \mathbf{80}$ m².

Se puede comprobar por otro camino: el rectángulo entero de 12 m por 8 m mediría 96 m², y al hueco que le falta, de 4 m por 4 m (el ancho sale de $12 - 8 = 4$), le corresponden 16 m²; y $96 - 16 = 80$ m².

35

Calcula el área de un trapecio cuyas bases miden 14 cm y 8 cm y cuya altura mide 6 cm.

Solución

La fórmula del trapecio: se suman las dos bases, se multiplica por la altura y se divide entre 2.

Las bases suman $14 + 8 = 22$.

Se multiplica por la altura: $22 \cdot 6 = 132$.

Y se divide entre 2: $132 : 2 = \mathbf{66}$ cm².

Poliedros y cuerpos de revolución

Lo que hay que saber

Un **poliedro** tiene todas sus caras planas (prismas y pirámides). Un **cuerpo de revolución** se obtiene girando una figura plana: el cilindro, el cono y la esfera.

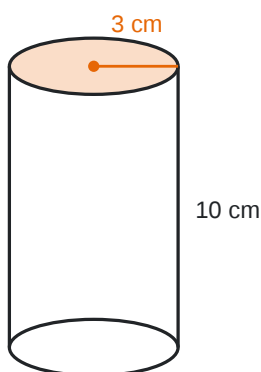
El **volumen de un prisma** (y de un cilindro) es el área de la base por la altura.

El **volumen de una pirámide** (y de un cono) es el área de la base por la altura dividido **entre 3**.

En el **cilindro**, el área de la base es $\pi \cdot r^2$, y el área lateral es la longitud de la circunferencia por la altura: $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$.

⚠ En los cuerpos hay que distinguir el **volumen** (lo que cabe dentro, en unidades cúbicas) del **área** (lo que mide la superficie, en unidades cuadradas). Son preguntas distintas.

- 36** Calcula el volumen del cilindro que aparece en el dibujo, que tiene 3 cm de radio en la base y 10 cm de altura. Usa $\pi = 3,14$.



Cilindro visto en perspectiva y dibujado a escala en el ancho y en el alto: el segmento naranja de la tapa de arriba es el radio de la base y mide 3 cm; el lado derecho, 10 cm, es la altura, y los dos se pueden medir con la regla. ⚠ Lo único que no mide lo que parece es el ALTO de las dos tapas: son circunferencias vistas en perspectiva y se dibujan aplastadas.

Solución

El volumen del cilindro es el área de la base por la altura.

El área de la base es $\pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 3^2$. El radio al cuadrado es 9, así que $3,14 \cdot 9 = 28,26 \text{ cm}^2$.

Ahora se multiplica por la altura: $28,26 \cdot 10 = \mathbf{282,6 \text{ cm}^3}$.

Ojo. El volumen va en centímetros cúbicos. Los $28,26 \text{ cm}^2$ del paso anterior son solo el área de la tapa, no el volumen.

- 37** Un prisma recto tiene por base un cuadrado de 5 cm de lado y mide 12 cm de altura. Calcula su volumen.

Solución

El volumen de un prisma es el área de la base por la altura.

La base es un cuadrado de 5 cm de lado, así que su área es $5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$.

Se multiplica por la altura: $25 \cdot 12 = \mathbf{300 \text{ cm}^3}$.

- 38** Una pirámide tiene por base un cuadrado de 6 cm de lado y mide 10 cm de altura. Calcula su volumen y compáralo con el del prisma que tuviera la misma base y la misma altura.

Solución

El área de la base es $6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$.

El volumen de la pirámide es el área de la base por la altura dividido entre 3: $36 \cdot 10 = 360$, y $360 : 3 = 120 \text{ cm}^3$.

El prisma con la misma base y la misma altura mediría $36 \cdot 10 = 360 \text{ cm}^3$.

Así que la pirámide es **la tercera parte** del prisma: $360 : 120 = 3$.

Ojo. La división entre 3 es lo que diferencia la pirámide del prisma. Sin ella saldría 360 cm^3 , que es el volumen del prisma, no el de la pirámide.

Semejanza y escalas

Lo que hay que saber

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma y distinto tamaño: sus ángulos son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales.

La **razón de semejanza** es el número por el que hay que multiplicar los lados de una para obtener los de la otra.

△ Si la razón de los lados es k , la razón de las **áreas** es k^2 , no k . Al doblar los lados, el área se multiplica por cuatro.

Una **escala** $1 : n$ significa que 1 unidad del plano son n unidades de la realidad.

△ Para pasar de la realidad al plano se divide; del plano a la realidad, se multiplica.

- 39** Dos triángulos son semejantes. Los lados del pequeño miden 3 cm, 4 cm y 5 cm, y el lado mayor del grande mide 15 cm. Calcula los otros dos lados del grande y la razón de semejanza.

Solución

Los lados se corresponden de mayor a mayor: al lado de 5 cm le corresponde el de 15 cm.

La razón de semejanza es $15 : 5 = 3$.

Los otros dos lados se multiplican por 3: $3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}$ y $4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}$.

Se comprueba que son proporcionales: $9/3 = 3$, $12/4 = 3$ y $15/5 = 3$.

- 40** Un rectángulo mide 4 cm por 6 cm. Se hace otro semejante multiplicando los lados por 3. ¿Cuánto mide su área? ¿Cuántas veces mayor es que la del primero?

Solución

Los lados del segundo son $4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}$ y $6 \cdot 3 = 18 \text{ cm}$.

Su área es $12 \cdot 18 = 216 \text{ cm}^2$.

El área del primero es $4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$.

$216 : 24 = 9$, así que el área es nueve veces mayor.

Ojo. Los lados se han multiplicado por 3 y el área por 9, que es 3^2 . El área no se multiplica por la misma razón que los lados.

- 41** En un plano a escala 1 : 200, una habitación aparece como un rectángulo de 3 cm por 2 cm. ¿Cuáles son sus medidas reales en metros? ¿Y su superficie real?

Solución

La escala 1 : 200 dice que 1 cm del plano son 200 cm de verdad, es decir, 2 m.

El lado de 3 cm son $3 \cdot 200 = 600$ cm, o sea **6 m**; el de 2 cm son $2 \cdot 200 = 400$ cm, o sea **4 m**.

La superficie real es $6 \cdot 4 = 24 \text{ m}^2$.

Ojo. La superficie no se halla multiplicando el área del plano por 200. El área del plano es 6 cm^2 , y $6 \cdot 200$ daría 1 200, que no es el resultado: hay que multiplicar por 200^2 o, más sencillo, pasar primero cada lado.

Funciones: tablas, gráficas y función lineal

Lo que hay que saber

Una **función** relaciona cada valor de x con un único valor de y . Se puede dar con una tabla, con una gráfica o con una fórmula.

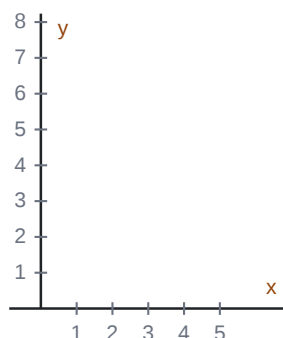
Un **punto** se escribe (x, y) : primero se cuenta en el eje horizontal y después en el vertical.

La **función lineal** es $y = mx$: su gráfica es una recta que pasa por el origen. La **función afín** es $y = mx + n$, y su recta no pasa por el origen.

La **pendiente** m dice cuánto sube la y cuando la x aumenta una unidad. Si m es positiva, la recta sube; si es negativa, baja.

△ Para dibujar una recta bastan **dos puntos**, pero conviene calcular un tercero para comprobar que no hay error: los tres tienen que quedar alineados.

- 42** Haz una tabla de valores de la función $y = 2x + 1$ para $x = 0, 1, 2$ y 3 , y di por qué punto corta al eje de la y . Puedes dibujarla en los ejes que hay en el dibujo.



Ejes de coordenadas vacíos, con las unidades marcadas de 1 en 1 en los dos ejes: el eje horizontal es el de la x y el vertical, el de la y . Sirven para dibujar en ellos la recta del ejercicio; no traen ningún punto puesto.

Solución

Se sustituye cada valor de x en la fórmula.

Para $x = 0$: $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Para $x = 1$: $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.

Para $x = 2$: $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Para $x = 3$: $y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

La tabla es $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$ y $(3, 7)$.

La recta corta al eje de la y donde x vale 0, es decir, en el punto **$(0, 1)$** .

43 ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 5) y (3, 11)? ¿Sube o baja?

Solución

La pendiente es lo que aumenta la y dividido entre lo que aumenta la x.

La y pasa de 5 a 11, así que aumenta $11 - 5 = 6$.

La x pasa de 1 a 3, así que aumenta $3 - 1 = 2$.

La pendiente es $6 : 2 = 3$. Como es positiva, la recta **sube**.

44 Un taxi cobra 3 € de bajada de bandera más 2 € por kilómetro. Escribe la función que da el precio según los kilómetros y calcula lo que cuesta un viaje de 7 km.

Solución

Lo que no depende de los kilómetros son los 3 € fijos; lo que sí depende son los 2 € de cada kilómetro.

Llamando x a los kilómetros, la función es **$y = 2x + 3$** .

Para 7 km: $y = 2 \cdot 7 + 3 = 14 + 3 = 17$ €.

Ojo. Es una función afín, no lineal: su recta no pasa por el origen, porque un viaje de 0 km ya cuesta los 3 € de la bajada de bandera.

Probabilidad: regla de Laplace

Lo que hay que saber

Un **experimento aleatorio** es el que, repetido en las mismas condiciones, puede dar resultados distintos. El conjunto de todos sus resultados es el **espacio muestral**.

La **regla de Laplace** vale cuando todos los resultados son igualmente probables: la probabilidad de un suceso es el número de casos favorables dividido entre el número de casos posibles.

⚠ Si los resultados **no** son igualmente probables, la regla de Laplace no se puede aplicar.

La probabilidad está entre 0 y 1. La del **suceso contrario** es 1 menos la del suceso.

Cuando se hacen dos experimentos —seguidos o a la vez—, los casos posibles se cuentan multiplicando: si uno tiene m resultados y el otro n, en total hay $m \cdot n$.

45 Se lanza un dado de seis caras. Calcula la probabilidad de sacar un número primo y la de no sacarlo.

Solución

Los casos posibles son 6: las caras 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Los primos entre el 1 y el 6 son el 2, el 3 y el 5: tres casos favorables. (El 1 no es primo.)

$P(\text{primo}) = 3/6 = 1/2$.

La del contrario es 1 menos esa: $1 - 1/2 = 1/2$.

Se comprueba contando: los no primos son el 1, el 4 y el 6, también tres casos, y $3/6 = 1/2$.

46

Se lanzan dos monedas a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos caras? ¿Y la de sacar una cara y una cruz?

Solución

Cada moneda tiene 2 resultados, así que los casos posibles son $2 \cdot 2 = 4$: cara-cara, cara-cruz, cruz-cara y cruz-cruz.

Para «dos caras» hay un solo caso favorable: $P = 1/4$.

Para «una cara y una cruz» hay DOS casos favorables, cara-cruz y cruz-cara, porque importa en qué moneda sale cada cosa: $P = 2/4 = 1/2$.

Ojo. «una cara y una cruz» no tiene la misma probabilidad que «dos caras», aunque las dos parezcan «una de las tres combinaciones». Contando cara-cruz una sola vez saldría $1/3$, y no es el resultado.

47

En una urna hay 4 bolas rojas, 6 azules y 10 verdes. Se saca una sin mirar. Calcula la probabilidad de que sea azul y la de que no sea verde.

Solución

Los casos posibles son todas las bolas: $4 + 6 + 10 = 20$.

Para «azul» hay 6 casos favorables: $P = 6/20$, que simplificada dividiendo por 2 es **$3/10$** .

Para «no verde» se cuentan las que no son verdes: $4 + 6 = 10$ bolas. $P = 10/20 = 1/2$.

Se comprueba por el contrario: $P(\text{verde}) = 10/20 = 1/2$, y $1 - 1/2 = 1/2$.