

Ejercicios de Matemáticas de 3.º de ESO resueltos

51 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 14 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Fracciones y operaciones combinadas · Operar y simplificar (**ejercicios 1, 2, 3, 4**)

Potencias y notación científica · Propiedades y exponentes negativos (**ejercicios 5, 6, 7, 8**)

Radicales y raíces cuadradas · Extraer factores y racionalizar (**ejercicios 9, 10, 11**)

Divisibilidad: máximo común divisor y mínimo común múltiplo · Descomponer y repartir (**ejercicios 12, 13, 14, 15**)

Porcentajes, regla de tres y proporcionalidad · Subidas, bajadas y repartos (**ejercicios 16, 17, 18, 19**)

Interés simple y compuesto · Intereses a varios años (**ejercicios 20, 21, 22**)

Polinomios: productos notables y factorización · Desarrollar y descomponer (**ejercicios 23, 24, 25, 26**)

División de polinomios, regla de Ruffini y teorema del resto · Cuándo vale Ruffini (**ejercicios 27, 28, 29, 30**)

Ecuaciones de primer y segundo grado · Quitar paréntesis y denominadores (**ejercicios 31, 32, 33**)

Sistemas de ecuaciones · Sustitución, igualación y reducción (**ejercicios 34, 35, 36, 37**)

Teorema de Pitágoras, áreas y volúmenes · Lados, superficies y capacidades (**ejercicios 38, 39, 40, 41**)

Estadística: media, mediana, moda y desviación típica · Centralización, dispersión y gráficos (**ejercicios 42, 43, 44, 45**)

Probabilidad: regla de Laplace y diagrama de árbol · Sucesos y extracciones (**ejercicios 46, 47, 48**)

Teorema de Tales y semejanza · Segmentos proporcionales y razón (**ejercicios 49, 50, 51**)

Material propio de solucionariomatematicas.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionariomatematicas.es

Qué entra y qué no. Entran los catorce bloques del índice, todos con ejercicios resueltos, y seis ejercicios llevan su figura. **No entran** los movimientos en el plano (traslaciones, giros y simetrías), que son del curso y quedan para otra entrega, ni nada de 4.º de ESO ni de Bachillerato: trigonometría, inecuaciones, logaritmos ni el bloque de números reales (intervalos, aproximaciones y errores). Estos ejercicios no sustituyen al temario ni a los del libro.

Ejercicios de Matemáticas de 3.º de ESO resueltos

Fracciones y operaciones combinadas

Lo que hay que saber

Para **sumar o restar** fracciones de distinto denominador hay que ponerles el mismo: se calcula el m.c.m. de los denominadores y cada numerador se multiplica por lo que se ha multiplicado su denominador.

Para **multiplicar**, numerador por numerador y denominador por denominador. Para **dividir**, se multiplica por la inversa de la segunda (se le da la vuelta).

El **orden** no es negociable: primero los paréntesis, después multiplicaciones y divisiones, y al final sumas y restas.

El resultado se **simplifica** dividiendo numerador y denominador por su m.c.d. Está simplificada cuando numerador y denominador ya no tienen ningún divisor común **distinto de 1**.

1 Calcula y simplifica: $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$.

Solución

El m.c.m. de 4, 3 y 6 es **12**, así que las tres fracciones se ponen con denominador 12: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ y $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$.

Ahora ya se puede operar con los numeradores: $\frac{9}{12} - \frac{8}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3}{12}$.

Se simplifica dividiendo arriba y abajo por 3: **$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$** .

2 Calcula: $(\frac{2}{5}) \cdot (\frac{15}{8}) : (\frac{3}{4})$.

Solución

Primero la multiplicación: $(\frac{2}{5}) \cdot (\frac{15}{8}) = \frac{30}{40}$, que simplificado es $\frac{3}{4}$.

Dividir por $\frac{3}{4}$ es multiplicar por su inversa, $\frac{4}{3}$: $(\frac{3}{4}) \cdot (\frac{4}{3}) = \frac{12}{12}$.

El resultado es **1**.

Ojo. No se divide «numerador entre numerador». Dividir es multiplicar por la inversa. Si se multiplica por $\frac{3}{4}$ en vez de por su inversa $\frac{4}{3}$, sale $\frac{9}{16}$ en vez de 1.

3 Calcula: $\frac{1}{2} + (\frac{2}{3}) \cdot (\frac{3}{4} - \frac{1}{6})$.

Solución

El paréntesis va primero. El m.c.m. de 4 y 6 es 12: $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$.

Después la multiplicación: $(\frac{2}{3}) \cdot (\frac{7}{12}) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$.

Y por último la suma. El m.c.m. de 2 y 18 es 18: $\frac{1}{2} + \frac{7}{18} = \frac{9}{18} + \frac{7}{18} = \frac{16}{18}$.

Simplificando por 2: **$\frac{8}{9}$** .

- 4 De un depósito lleno se saca primero $\frac{2}{5}$ del agua y después $\frac{1}{3}$ de lo que había quedado. ¿Qué fracción del depósito queda al final?

Solución

Si se saca $\frac{2}{5}$, queda $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ del depósito.

La segunda vez no se saca $\frac{1}{3}$ del depósito, sino $\frac{1}{3}$ de lo que quedaba: $(\frac{1}{3}) \cdot (\frac{3}{5}) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

Al final queda $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

Queda **$\frac{2}{5}$ del depósito.**

Ojo. Lo que hay que mirar es de qué cantidad se toma la segunda fracción. Si se restara $\frac{1}{3}$ del total en vez de $\frac{1}{3}$ del resto, saldría $\frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$, que es otra cosa.

Potencias y notación científica

Lo que hay que saber

Al **multiplicar** potencias de la misma base se suman los exponentes; al **dividir**, se restan. Una potencia de otra potencia multiplica los exponentes.

Un **exponente negativo** significa la inversa: la base pasa de numerador a denominador (o al contrario) y el exponente cambia de signo. Toda potencia de exponente 0 vale 1.

Un número en **notación científica** se escribe como un número mayor o igual que 1 y menor que 10, multiplicado por una potencia de 10.

Para multiplicar o dividir en notación científica se operan aparte los números y aparte las potencias de 10. Si el número resultante se sale del intervalo de 1 a 10, hay que **reajustar** el exponente.

- 5 Calcula, dejando el resultado como un número entero: $(2^3 \cdot 2^5) : 2^4$.

Solución

Misma base, así que se operan los exponentes: al multiplicar se suman y al dividir se restan. El exponente final es $3 + 5 - 4 = 4$.

Queda $2^4 = 16$.

- 6 Simplifica dejando exponentes positivos: $3^{-2} \cdot 3^5$, y $(x^2)^3 \cdot x^{-4}$.

Solución

En la primera, misma base: $-2 + 5 = 3$, así que $3^{-2} \cdot 3^5 = 3^3 = 27$.

En la segunda, la potencia de una potencia multiplica los exponentes: $(x^2)^3 = x^6$. Y al multiplicar por x^{-4} se suman: $6 + (-4) = 2$.

Queda x^2 .

- 7 Escribe en notación científica y calcula: $0,000045 \cdot 3\,000\,000$.

Solución

$0,000045 = 4,5 \cdot 10^{-5}$, porque la coma se corre cinco lugares a la derecha. Y $3\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$.

Se operan aparte: $4,5 \cdot 3 = 13,5$, y $10^{-5} \cdot 10^6 = 10^1$.

Sale $13,5 \cdot 10^1$, pero 13,5 no está entre 1 y 10, así que hay que reajustar: $13,5 = 1,35 \cdot 10^1$, y $10^1 \cdot 10^1 = 10^2$.

El resultado es **$1,35 \cdot 10^2$** , es decir, 135.

8 Calcula y deja el resultado en notación científica: $(5 \cdot 10^4) \cdot (4 \cdot 10^{-7}) : (2 \cdot 10^{-2})$.

Solución

Los números, aparte: $5 \cdot 4 : 2 = 10$.

Las potencias de 10, aparte: los exponentes se suman al multiplicar y se restan al dividir, así que $4 + (-7) - (-2) = 4 - 7 + 2 = -1$.

Sale $10 \cdot 10^{-1} = 10^1 \cdot 10^{-1} = 10^0$.

El resultado es $1 \cdot 10^0$, es decir, 1.

Ojo. Cuidado con el signo del exponente que se resta: restar -2 es sumar 2, y confundirlo aquí cambia el resultado en cuatro órdenes de magnitud.

Radicales y raíces cuadradas

Lo que hay que saber

Para **extraer factores** de una raíz cuadrada se descompone el número en factores primos: cada par de factores iguales sale fuera de la raíz una sola vez.

Solo se pueden **sumar o restar** radicales *semejantes*, es decir, los que tienen el mismo radicando una vez simplificados. Se suman los números de delante y el radical se deja igual.

Para **multiplicar o dividir** raíces del mismo índice se multiplican o dividen los radicandos y se deja una sola raíz.

Racionalizar es quitar la raíz del denominador: se multiplican numerador y denominador por esa misma raíz, y abajo queda el número sin raíz.

9 Calcula: $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8}$.

Solución

Se extraen factores de cada una. $50 = 2 \cdot 5^2$, así que $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. $18 = 2 \cdot 3^2$, así que $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Y $8 = 2^3 = 2^2 \cdot 2$, así que $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Ahora los tres son semejantes (todos con $\sqrt{2}$) y se pueden sumar: $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = (5 + 3 - 2)\sqrt{2}$.

El resultado es $6\sqrt{2}$.

Ojo. $\sqrt{50} + \sqrt{18}$ no es $\sqrt{68}$. Las raíces no se suman por dentro; hay que extraer factores primero y comprobar que el radicando queda igual.

10 Calcula: $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$, y $\sqrt{45} : \sqrt{5}$.

Solución

Mismo índice, así que se juntan en una sola raíz: $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$.

Y en la división, igual: $\sqrt{45} : \sqrt{5} = \sqrt{9} = 3$.

11 Racionaliza y simplifica: $6/\sqrt{3}$.

Solución

Se multiplican numerador y denominador por $\sqrt{3}$: $(6 \cdot \sqrt{3}) / (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) = 6\sqrt{3} / 3$.

Abajo ya no hay raíz, porque $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$. Y $6 : 3 = 2$.

El resultado es $2\sqrt{3}$.

Divisibilidad: máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Lo que hay que saber

Todo número **natural mayor que 1** se puede **descomponer en factores primos** de una sola manera: se va dividiendo por 2, 3, 5, 7... hasta llegar a 1.

El **m.c.d.** es el producto de los factores primos *comunes*, cada uno con el **menor** exponente con el que aparece.

El **m.c.m.** es el producto de *todos* los factores primos, comunes y no comunes, cada uno con el **mayor** exponente.

En los problemas, el m.c.d. aparece cuando hay que **repartir o cortar en trozos iguales lo más grandes posible**; el m.c.m., cuando algo se **repite y hay que saber cuándo vuelve a coincidir**.

12 Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de 72 y 120.

Solución

Se descomponen los dos: $72 = 2^3 \cdot 3^2$ y $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Para el m.c.d., solo los factores comunes (2 y 3) con el menor exponente: $2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = \mathbf{24}$.

Para el m.c.m., todos los factores con el mayor exponente: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = \mathbf{360}$.

13 Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de 90 y 126.

Solución

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Comunes con el menor exponente: $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = \mathbf{18}$.

Todos con el mayor exponente: $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = \mathbf{630}$.

14 Dos autobuses salen de la misma parada a las 8:00. Uno pasa cada 18 minutos y el otro cada 24. ¿A qué hora vuelven a salir juntos por primera vez?

Solución

«Vuelven a coincidir» es un m.c.m.: hay que buscar el primer momento que es múltiplo de los dos tiempos a la vez.

$18 = 2 \cdot 3^2$ y $24 = 2^3 \cdot 3$. El m.c.m. es $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = \mathbf{72 \text{ minutos}}$.

72 minutos son 1 hora y 12 minutos, así que vuelven a salir juntos a las **9:12**.

15

Se quiere cubrir un suelo rectangular de 120 cm por 156 cm con baldosas cuadradas iguales, lo más grandes posible y sin cortar ninguna. ¿Cuánto mide el lado de cada baldosa y cuántas hacen falta?

Solución

«Trozos iguales lo más grandes posible» es un m.c.d.: el lado tiene que ser un divisor de los dos lados a la vez, y se quiere el mayor.

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$. Comunes con el menor exponente: $2^2 \cdot 3 = 12$ cm.

A lo largo caben $120 : 12 = 10$ baldosas y a lo ancho $156 : 12 = 13$.

En total, $10 \cdot 13 = 130$ baldosas de 12 cm de lado.

Ojo. Dividir el área total entre la de la baldosa da aquí el mismo 130, pero **solo porque el lado es divisor exacto de los dos lados**. Si no lo fuera habría que cortar baldosas, y esa división daría un número que no sirve.

Porcentajes, regla de tres y proporcionalidad

Lo que hay que saber

Calcular el **r % de una cantidad** es multiplicarla por r y dividir entre 100.

Una **subida** del r % se hace multiplicando por $(1 + r/100)$ y una **bajada** del r %, multiplicando por $(1 - r/100)$. Ese número es el *índice de variación*.

Para **deshacer** una subida o una bajada no se aplica el mismo porcentaje al revés: se **divide** por el índice de variación.

En la regla de tres **directa**, si una magnitud crece la otra crece. En la **inversa**, si una crece la otra decrece, y lo que se mantiene constante es el **producto** de las dos.

16

Calcula el 15 % de 340.

Solución

Se multiplica por 15 y se divide entre 100: $340 \cdot 15 = 5\,100$, y $5\,100 : 100 = 51$.

17

El precio de un artículo sube un 20 % y, más tarde, baja un 20 %. ¿Queda igual que al principio? ¿En qué porcentaje ha variado?

Solución

No queda igual. Se puede ver tomando un precio cómodo, 100 €, porque el resultado en porcentaje no depende del precio de partida.

La subida del 20 % multiplica por 1,20: $100 \cdot 1,20 = 120$ €.

La bajada del 20 % multiplica por 0,80, pero se aplica sobre 120, no sobre 100: $120 \cdot 0,80 = 96$ €.

Se ha pasado de 100 a 96, así que el precio ha **bajado un 4 %**.

Ojo. El motivo es que el 20 % de la bajada se calcula sobre una cantidad mayor que el 20 % de la subida. Dos porcentajes iguales de signo contrario nunca se anulan.

- 18 Cinco obreros tardan 12 días en hacer un trabajo. ¿Cuánto tardarían 8 obreros trabajando al mismo ritmo?

Solución

Más obreros, menos días: es una regla de tres **inversa**, así que lo que se mantiene constante es el producto obreros · días.

Con 5 obreros: $5 \cdot 12 = 60$ jornadas de trabajo en total.

Con 8 obreros hacen falta las mismas 60 jornadas, así que los días son $60 : 8 = 7,5$ días.

Ojo. Si se hubiera planteado como directa ($8 \cdot 12 : 5 = 19,2$) saldría que más obreros tardan más, que es absurdo. Antes de operar, conviene preguntarse si el resultado tiene que subir o bajar.

- 19 Un abrigo cuesta 68 € después de aplicarle un descuento del 15 %. ¿Cuál era su precio antes del descuento?

Solución

El descuento del 15 % multiplica el precio original por 0,85, y el resultado de eso es 68 €.

Para deshacerlo hay que **dividir**, no restar: $68 : 0,85 = 80$ €.

Se comprueba: el 15 % de 80 es 12, y $80 - 12 = 68$. Cuadra.

Ojo. Sumarle el 15 % a 68 daría 78,20 €, que no es la respuesta. El porcentaje del descuento está calculado sobre el precio viejo, no sobre el nuevo.

Interés simple y compuesto

Lo que hay que saber

En el **interés simple** los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial y no se acumulan: el interés total es capital · rédito · tiempo, con el rédito en tanto por uno.

En el **interés compuesto** los intereses de cada periodo se suman al capital y en el periodo siguiente también generan intereses.

Con interés compuesto, el capital final se obtiene multiplicando el inicial por el índice de variación **elevado al número de periodos**.

El **interés ganado** es la diferencia entre el capital final y el inicial. ⚠ No confundir el capital final con el interés: son dos preguntas distintas.

- 20 ¿Qué interés produce un capital de 2 500 € al 3 % anual simple durante 4 años?

Solución

En el interés simple se calcula siempre sobre el capital inicial, así que basta multiplicar: $2\,500 \cdot 0,03 \cdot 4$.

El interés de un año es $2\,500 \cdot 0,03 = 75$ €, y en 4 años: $75 \cdot 4 = 300$ €.

El capital final sería $2\,500 + 300 = 2\,800$ €, pero lo que se pedía era el interés.

21 Se depositan 2 000 € al 5 % anual compuesto durante 3 años. ¿Cuál es el capital final?

Solución

El índice de variación de una subida del 5 % es 1,05, y al ser compuesto se eleva al número de años: $2\,000 \cdot 1,05^3$.

$$1,05^3 = 1,157625.$$

Así que el capital final es $2\,000 \cdot 1,157625 = \mathbf{2\,315,25\text{ €}}$.

22 Un capital de 1 000 € se coloca 2 años al 4 % anual. ¿Cuánto más se gana con interés compuesto que con interés simple?

Solución

Con interés **simple**: $1\,000 \cdot 0,04 \cdot 2 = 80\text{ €}$.

Con interés **compuesto**: el capital final es $1\,000 \cdot 1,04^2 = 1\,000 \cdot 1,0816 = 1\,081,60\text{ €}$, así que el interés ganado es $1\,081,60 - 1\,000 = 81,60\text{ €}$.

La diferencia es $81,60 - 80 = \mathbf{1,60\text{ €}}$ a favor del compuesto.

Ojo. La diferencia sale pequeña con dos años, pero crece muy deprisa con el tiempo, porque en el compuesto los intereses de cada año se suman al capital y al año siguiente también generan intereses, mientras que en el simple el capital se queda igual.

Polinomios: productos notables y factorización

Lo que hay que saber

El **cuadrado de una suma** es el cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo. En el cuadrado de una **resta**, el término del medio va con signo menos.

La **suma por diferencia** de dos términos es la diferencia de sus cuadrados: desaparece el término del medio.

Factorizar es escribir el polinomio como un producto. Lo primero que se mira siempre es si hay **factor común**, y se saca.

Después del factor común se comprueba si lo que queda es un producto notable leído al revés: un cuadrado perfecto o una diferencia de cuadrados.

23 Desarrolla: $(2x + 3)^2$.

Solución

Es el cuadrado de una suma: cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Cuadrado del primero: $(2x)^2 = 4x^2$. Doble producto: $2 \cdot 2x \cdot 3 = 12x$. Cuadrado del segundo: $3^2 = 9$.

Queda $\mathbf{4x^2 + 12x + 9}$.

Ojo. $(2x)^2$ es $4x^2$, no $2x^2$: el exponente afecta también al número de delante.

24 Desarrolla: $(3x - 5)(3x + 5)$.

Solución

Son los mismos dos términos, una vez restando y otra sumando: es una suma por diferencia, así que el resultado es la diferencia de los cuadrados y el término del medio se va.

$$(3x)^2 = 9x^2 \text{ y } 5^2 = 25.$$

Queda $9x^2 - 25$.

25 Factoriza: $x^2 - 10x + 25$, y $x^2 - 49$.

Solución

En el primero no hay factor común. Los extremos son cuadrados (x^2 y 5^2) y el del medio es el doble producto con signo menos, $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$, así que es el cuadrado de una resta: $(x - 5)^2$.

El segundo es una diferencia de cuadrados, x^2 y 7^2 , así que se escribe como suma por diferencia: $(x - 7)(x + 7)$.

26 Factoriza por completo: $2x^3 - 18x$.

Solución

Primero el factor común. Los dos términos tienen un 2 y una x : $2x^3 - 18x = 2x(x^2 - 9)$.

Lo que queda dentro del paréntesis es una diferencia de cuadrados, x^2 y 3^2 , así que todavía se puede factorizar: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

El resultado completo es $2x(x - 3)(x + 3)$.

Ojo. «por completo» significa que hay que seguir hasta que no se pueda más. Dejarlo en $2x(x^2 - 9)$ está a medias.

División de polinomios, regla de Ruffini y teorema del resto

Lo que hay que saber

Al dividir polinomios se cumple siempre que **dividendo = divisor · cociente + resto**, y el grado del resto es menor que el del divisor. Esa igualdad es la forma de comprobar el resultado.

La **regla de Ruffini** sirve solo cuando el divisor es de la forma $x - a$. Se escriben los coeficientes del dividendo, **incluidos los ceros de los términos que faltan**, y se baja, se multiplica por a y se suma.

El **teorema del resto** dice que el resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$ es $P(a)$: se puede saber el resto sin hacer la división.

Si $P(a) = 0$, entonces $x - a$ es un factor de $P(x)$. Es la forma de empezar a factorizar un polinomio de grado tres.

⚠ Cuidado con el signo: en $x - a$, el número que se usa es **a** , con su signo. Si el divisor viene escrito con un más, hay que reescribirlo primero como una resta para leer bien ese número.

27 Divide por Ruffini: $(x^3 - 2x^2 + x - 6) : (x - 3)$. Da el cociente y el resto.

Solución

Los coeficientes del dividendo son 1, -2, 1, -6, y el número de Ruffini es 3.

Se baja el 1. Se multiplica por 3 y se suma al siguiente: $-2 + 3 = 1$. Se multiplica 1 por 3 y se suma: $1 + 3 = 4$. Se multiplica 4 por 3 y se suma: $-6 + 12 = 6$.

Los tres primeros números son el cociente y el último es el resto: cociente $x^2 + x + 4$ y resto **6**.

Se comprueba con la igualdad de la división: $(x - 3)(x^2 + x + 4) + 6 = x^3 - 2x^2 + x - 6$. Cuadra.

28 Halla el resto de dividir $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 5$ entre $x + 2$, sin hacer la división.

Solución

Por el teorema del resto, basta sustituir. Pero $x + 2$ es $x - (-2)$, así que el número que hay que sustituir es **-2**, no 2.

$$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 5.$$

Término a término: $2 \cdot (-8) = -16$; $-(-4) = -4$; $3 \cdot (-2) = -6$; y -5 .

Sumando: $-16 - 4 - 6 - 5 = \mathbf{-31}$.

Ojo. $(-2)^3$ es -8 y $(-2)^2$ es $+4$. El exponente impar conserva el signo y el par lo quita. Si se toma $(-2)^3$ como $+8$, el resto sale $+1$ en lugar de -31 : cambia el signo y la cifra.

29 Factoriza por completo usando Ruffini: $x^3 - 7x + 6$.

Solución

Falta el término en x^2 , así que los coeficientes son 1, **0**, -7, 6. Olvidar ese cero descoloca toda la regla.

Se prueba con los divisores del término independiente. Con 1: $1 - 7 + 6 = 0$, así que $x - 1$ es factor.

Aplicando Ruffini con 1 queda 1, 1, -6 y resto 0, es decir, el cociente $x^2 + x - 6$.

Ese cociente de grado dos se factoriza buscando dos números que sumen 1 y multiplicados den -6: son 3 y -2, así que $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.

El resultado completo es **$(x - 1)(x + 3)(x - 2)$** .

30 Divide: $(2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (x^2 + 1)$. Da el cociente y el resto.

Solución

El divisor es de grado dos, así que **no se puede usar Ruffini**: hay que hacer la división larga.

$2x^3$ entre x^2 da $2x$. Se multiplica: $2x(x^2 + 1) = 2x^3 + 2x$, y se resta. Queda $3x^2 - 3x + 5$.

$3x^2$ entre x^2 da 3. Se multiplica: $3(x^2 + 1) = 3x^2 + 3$, y se resta. Queda $-3x + 2$.

Ya es de grado menor que el divisor, así que se para: cociente **$2x + 3$** y resto **$-3x + 2$** .

Ojo. El resto no tiene por qué ser un número. Aquí es un polinomio de grado uno, y está bien: la condición es que su grado sea menor que el del divisor.

Ecuaciones de primer y segundo grado

Lo que hay que saber

Para resolver una ecuación de **primer grado**: se quitan paréntesis, se quitan denominadores multiplicando todo por el m.c.m., se agrupan las x a un lado y los números al otro, y se despeja.

Al quitar denominadores hay que multiplicar **todos** los términos, también los que no tienen denominador.

Una ecuación de **segundo grado** $ax^2 + bx + c = 0$ se resuelve con su fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. El signo $\pm$ quiere decir que hay que hacer la cuenta dos veces, una sumando la raíz y otra restándola.

El **discriminante** (lo de dentro de la raíz) dice cuántas soluciones hay: si es positivo, dos; si es cero, una; si es negativo, ninguna real.

Toda solución se **comprueba** sustituyéndola en la ecuación original, no en una de las intermedias.

31 Resuelve: $3(x - 2) + 5 = 2(x + 4) - 3$.

Solución

Se quitan los paréntesis en los dos lados: $3x - 6 + 5 = 2x + 8 - 3$.

Se agrupan los números de cada lado: $3x - 1 = 2x + 5$.

Se pasan las x a la izquierda y los números a la derecha: $3x - 2x = 5 + 1$, es decir, $x = 6$.

La solución es $x = 6$. Comprobando en la original: a la izquierda $3 \cdot 4 + 5 = 17$, y a la derecha $2 \cdot 10 - 3 = 17$. Cuadra.

32 Resuelve: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Solución

Se identifican los coeficientes: $a = 1$, $b = -5$ y $c = 6$.

El discriminante es $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$. Es positivo, así que hay dos soluciones.

La raíz de 1 es 1, y $-b = 5$, así que las soluciones son $(5 + 1) : 2 = 3$ y $(5 - 1) : 2 = 2$.

Las soluciones son $x = 3$ y $x = 2$.

Ojo. $-b$ con $b = -5$ es $+5$, no -5 . Si se arrastra el signo, salen $x = -3$ y $x = -2$, que no cumplen la ecuación: al sustituirlas dan 30 y 20, no 0.

33 Resuelve: $x/3 + (x - 1)/2 = 2$.

Solución

El m.c.m. de 3 y 2 es 6, así que se multiplica **todo** por 6, incluido el 2 de la derecha.

$x/3$ por 6 da $2x$. $(x - 1)/2$ por 6 da $3(x - 1)$. Y 2 por 6 da 12. Queda $2x + 3(x - 1) = 12$.

Se quita el paréntesis: $2x + 3x - 3 = 12$, o sea $5x = 15$.

La solución es $x = 3$. Comprobando: $3/3 + 2/2 = 1 + 1 = 2$. Cuadra.

Sistemas de ecuaciones

Lo que hay que saber

Por **sustitución**: se despeja una incógnita en una ecuación y se mete esa expresión en la otra, que queda con una sola incógnita.

Por **igualación**: se despeja la *misma* incógnita en las dos ecuaciones y se igualan las dos expresiones.

Por **reducción**: se multiplican las ecuaciones por los números que hagan falta para que una incógnita tenga coeficientes opuestos, y se suman para que desaparezca.

Al despejar la segunda incógnita hay que sustituir en una de las ecuaciones **originales**. Y la solución se comprueba en las **dos**: cumplir solo una no basta.

34 Resuelve por reducción: $x + y = 7$, $2x - y = 8$.

Solución

La y ya tiene coeficientes opuestos (+1 y -1), así que se pueden sumar las dos ecuaciones directamente y la y desaparece.

Sumando: $(x + 2x) + (y - y) = 7 + 8$, es decir, $3x = 15$, así que $x = 5$.

Se sustituye en la primera ecuación original: $5 + y = 7$, así que $y = 2$.

La solución es **$x = 5$, $y = 2$** . En la segunda: $2 \cdot 5 - 2 = 8$. Cuadra.

35 Resuelve por igualación: $3x + 2y = 16$, $x - y = 2$.

Solución

Se despeja la misma incógnita en las dos. De la segunda, $x = y + 2$. De la primera, $x = (16 - 2y)/3$.

Se igualan: $y + 2 = (16 - 2y)/3$. Multiplicando todo por 3: $3y + 6 = 16 - 2y$.

Se agrupa: $3y + 2y = 16 - 6$, o sea $5y = 10$, así que $y = 2$.

Y entonces $x = y + 2 = 4$. La solución es **$x = 4$, $y = 2$** . Comprobando en la primera: $3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16$. Cuadra.

36 Resuelve por reducción: $2x + 3y = 12$, $5x - 2y = 11$.

Solución

Para que la y desaparezca hay que igualar sus coeficientes en valor absoluto: el m.c.m. de 3 y 2 es 6. Se multiplica la primera por 2 y la segunda por 3.

Queda $4x + 6y = 24$ y $15x - 6y = 33$. Ahora los coeficientes de y son opuestos.

Sumando: $19x = 57$, así que $x = 3$.

Se sustituye en la primera original: $2 \cdot 3 + 3y = 12$, o sea $3y = 6$ e $y = 2$.

La solución es **$x = 3$, $y = 2$** . En la segunda: $5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 11$. Cuadra.

- 37** Tres entradas de adulto y dos de niño cuestan 35 €. Dos de adulto y cinco de niño cuestan 38 €. ¿Cuánto cuesta cada entrada?

Solución

Se llama x al precio de la de adulto e y al de la de niño. El sistema es $3x + 2y = 35$ y $2x + 5y = 38$.

Para eliminar la y se multiplica la primera por 5 y la segunda por 2: $15x + 10y = 175$ y $4x + 10y = 76$.

Se restan en vez de sumarse, porque los coeficientes de y son iguales y no opuestos: $15x - 4x = 175 - 76$, es decir, $11x = 99$ y $x = 9$.

Se sustituye en la primera original: $3 \cdot 9 + 2y = 35$, o sea $2y = 8$ e $y = 4$.

La entrada de adulto cuesta **9 €** y la de niño, **4 €**. Comprobando en la segunda: $2 \cdot 9 + 5 \cdot 4 = 38$. Cuadra.

Teorema de Pitágoras, áreas y volúmenes

Lo que hay que saber

En un triángulo rectángulo, el **cuadrado de la hipotenusa** (el lado mayor, el que no toca el ángulo recto) es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos.

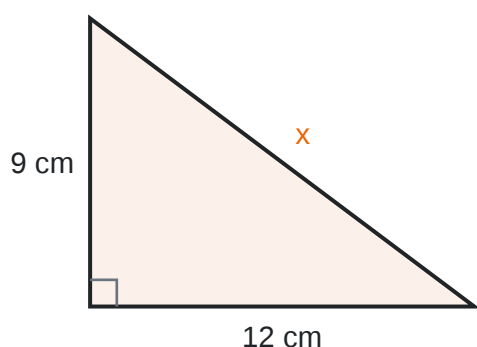
Para hallar un **cateto** la fórmula se usa al revés: se **resta** del cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del cateto conocido, y se saca la raíz.

El **área del círculo** es π por el radio al cuadrado. $\triangle$ Si el dato que dan es el diámetro, hay que dividirlo entre 2 antes de elevarlo.

El **volumen de un cilindro** es el área de su base (un círculo) por la altura.

Al terminar conviene mirar si el resultado es razonable: la hipotenusa siempre tiene que salir **mayor** que cualquiera de los catetos.

- 38** Mira la figura: los catetos del triángulo rectángulo miden 9 cm y 12 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa, marcada con x ?



Triángulo rectángulo: el ángulo recto está marcado con un cuadrado. Los dos catetos miden 12 cm (el de abajo) y 9 cm (el de la izquierda); la hipotenusa es la que se pide, marcada con x .

Solución

La hipotenusa al cuadrado es la suma de los cuadrados de los catetos: $x^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$.

La hipotenusa es la raíz de 225, que es **15 cm**.

Sale mayor que 12, que es el cateto más largo, así que es razonable.

- 39** La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm y uno de sus catetos, 5 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Solución

Ahora se busca un cateto, así que hay que **restar**: el cuadrado del cateto que falta es $13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$.

El cateto es la raíz de 144, que es **12 cm**.

Ojo. Si se hubieran sumado los cuadrados saldría $\sqrt{194} \approx 13,9$ cm, un cateto más largo que la hipotenusa, que es imposible. Ese es el aviso de que se ha usado la fórmula al derecho cuando tocaba al revés.

- 40** Calcula el área de un círculo de 8 cm de diámetro. Deja el resultado en función de π y después en centímetros cuadrados con dos decimales.

Solución

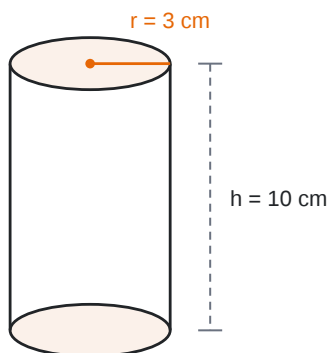
El dato es el **diámetro**, así que primero el radio: $8 : 2 = 4$ cm.

El área es π por el radio al cuadrado: $\pi \cdot 4^2 = 16 \pi \text{ cm}^2$.

Con $\pi \approx 3,1416$: $16 \cdot 3,1416 = 50,2656$, es decir, $\approx 50,27 \text{ cm}^2$.

Ojo. Elevar el diámetro en vez del radio daría 64π , cuatro veces más. Es el fallo que hay que vigilar en cuanto el enunciado da el diámetro.

- 41** Mira la figura y calcula el volumen del cilindro, de 3 cm de radio y 10 cm de altura. Deja el resultado en función de π y después con dos decimales.



Cilindro visto en perspectiva, dibujado a escala. Las dos tapas son círculos de 3 cm de radio: el segmento naranja, trazado en la de arriba, va del centro al borde. La altura, medida de una tapa a la otra, es de 10 cm.

Solución

El volumen es el área de la base por la altura. La base es un círculo de radio 3, así que su área es $\pi \cdot 3^2 = 9 \pi \text{ cm}^2$.

Multiplicando por la altura: $9 \pi \cdot 10 = 90 \pi \text{ cm}^3$.

Con $\pi \approx 3,1416$: $90 \cdot 3,1416 = 282,744$, es decir, $\approx 282,74 \text{ cm}^3$.

El resultado va en centímetros **cúbicos**, porque es un volumen.

Estadística: media, mediana, moda y desviación típica

Lo que hay que saber

La **media** es la suma de todos los datos dividida entre el número de datos.

La **mediana** es el valor que queda en el centro una vez **ordenados** los datos. $\triangle$ Si el número de datos es par no hay un centro: la mediana es la media de los **dos** centrales.

La **moda** es el dato que más veces se repite. Puede no ser única, y si ningún dato se repite, no hay moda.

La **varianza** es la media de los cuadrados de las diferencias de cada dato con la media. La **desviación típica** es su raíz cuadrada, y se mide en las mismas unidades que los datos.

42 Calcula la media, la mediana y la moda de: 4, 7, 7, 9, 10, 11, 15.

Solución

Los datos ya están ordenados y son 7, un número impar.

La media es la suma dividida entre el número de datos. La suma es $4 + 7 + 7 + 9 + 10 + 11 + 15 = 63$, y $63 : 7 = 9$.

La mediana es el valor central. Con 7 datos, el central es el cuarto: **9**.

La moda es el dato que más se repite: el 7 aparece dos veces y los demás una, así que la moda es **7**.

43 Calcula la media, la mediana y la moda de: 3, 5, 8, 8, 12, 14.

Solución

Están ordenados y son 6 datos, un número **par**.

La suma es $3 + 5 + 8 + 8 + 12 + 14 = 50$, y la media es $50 : 6 = 25/3$, es decir, **8,33** aproximadamente.

Al ser par no hay un dato central: los dos centrales son el tercero y el cuarto, que valen 8 y 8. La mediana es su media: $(8 + 8)/2 = 8$.

La moda es **8**, el único dato que se repite.

Ojo. Con un número par de datos, dar como mediana uno de los dos centrales es un error aunque aquí los dos valgan lo mismo y el resultado coincida. Si fueran 8 y 10, la mediana sería 9, que no es ninguno de los datos.

44 Calcula la media y la desviación típica de: 2, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 9.

Solución

Son 8 datos. La suma es $2 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 7 + 9 = 40$, así que la media es $40 : 8 = 5$.

Ahora la diferencia de cada dato con la media, y su cuadrado: -3 y 9; -1 y 1; -1 y 1; -1 y 1; 0 y 0; 0 y 0; 2 y 4; 4 y 16.

La suma de esos cuadrados es $9 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 4 + 16 = 32$, y la varianza es su media: $32 : 8 = 4$.

La desviación típica es la raíz de la varianza: $\sqrt{4} = 2$.

Ojo. La desviación típica es la raíz de la varianza, no la varianza. Dar 4 como desviación típica es confundir las dos.

45

El diagrama de barras de la figura recoge las notas de un examen. Con los datos del gráfico: a) ¿cuántos alumnos hicieron el examen? b) ¿cuál es la moda? c) ¿cuál es la nota media? d) ¿cuál es la mediana?

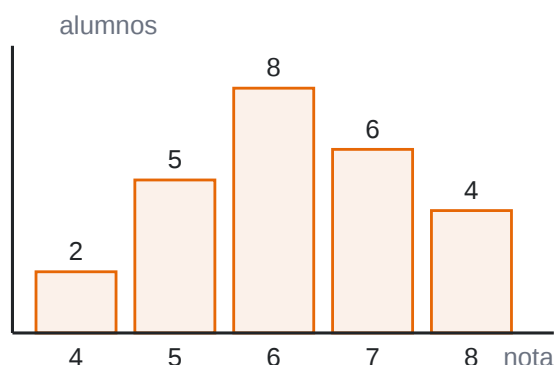


Diagrama de barras con las notas de un examen. Debajo de cada barra está la nota y encima, el número de alumnos que la sacaron: 2 alumnos un 4, 5 un 5, 8 un 6, 6 un 7 y 4 un 8.

Solución

a) El total de alumnos es la suma de todas las barras: $2 + 5 + 8 + 6 + 4 = \mathbf{25 \text{ alumnos}}$.

b) La moda es la nota que más se repite, es decir, la barra más alta: el 6, que lo sacaron 8 alumnos. La moda es **6**.

c) Para la media no se suman las cinco notas y se divide entre 5: cada nota cuenta tantas veces como alumnos la sacaron. Se multiplica nota por frecuencia y se suma: $4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 4 = 8 + 25 + 48 + 42 + 32 = 155$.

Y se divide entre el número de alumnos: $155 : 25 = \mathbf{6,2}$.

d) La mediana es la nota del alumno que queda en el centro. Con 25 datos el centro es el 13.º. Contando barras desde la izquierda van 2, luego $2 + 5 = 7$, y luego $7 + 8 = 15$: el 13.º cae dentro de la tercera barra, así que la mediana es **6**.

Ojo. La media de las notas 4, 5, 6, 7 y 8 sin contar las frecuencias sale 6, que se parece mucho a 6,2 y no es lo mismo. Cada nota pesa lo que su barra.

Probabilidad: regla de Laplace y diagrama de árbol

Lo que hay que saber

La **regla de Laplace** vale cuando todos los casos son igual de probables: la probabilidad de un suceso es el número de casos favorables dividido entre el número de casos posibles.

Toda probabilidad está entre 0 y 1. La probabilidad de que algo **no** ocurra es 1 menos la probabilidad de que ocurra.

En un experimento de **dos extracciones**, la probabilidad de un camino del diagrama de árbol es el **producto** de las probabilidades de sus ramas.

△ Hay que fijarse en si la primera bola **se devuelve** o no: si no se devuelve, en la segunda extracción hay una bola menos en total, y una menos del color que salió.

46

Se lanza un dado de seis caras. Calcula la probabilidad de sacar un número par y la de sacar un número mayor que 4.

Solución

Los casos posibles son 6, y todos son igual de probables.

Pares hay tres: 2, 4 y 6. Así que la probabilidad es $3/6 = 1/2$.

Mayores que 4 hay dos: el 5 y el 6. ⚠ El 4 no cuenta, porque el enunciado dice *mayor* que 4, no «4 o más». Así que la probabilidad es $2/6 = 1/3$.

47

Una urna tiene 5 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes. Se saca una bola al azar. Calcula la probabilidad de que sea roja y la de que no sea azul.

Solución

En total hay $5 + 3 + 2 = 10$ bolas, y todas tienen la misma probabilidad de salir.

Rojas hay 5, así que la probabilidad de roja es $5/10 = 1/2$.

Para «no azul» lo más corto es el suceso contrario: la probabilidad de azul es $3/10$, así que la de no azul es $1 - 3/10 = 7/10$.

Se puede comprobar contando directamente: no azules hay 5 rojas + 2 verdes = 7, y $7/10$ es el mismo resultado.

48

De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se sacan dos bolas, una detrás de otra y **sin devolver** la primera. En la figura están los cuatro caminos posibles. Calcula la probabilidad de que las dos sean blancas.

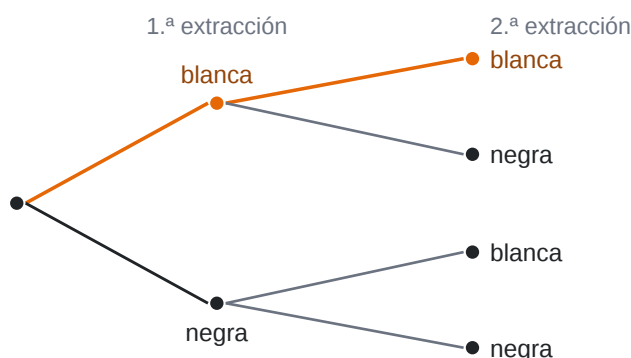


Diagrama de árbol de las dos extracciones: en la primera puede salir blanca o negra y, para cada una de ellas, en la segunda otra vez blanca o negra. Son los cuatro caminos posibles. El camino de arriba del todo, en naranja, es «blanca y blanca». Las probabilidades de cada rama son justo lo que hay que calcular.

Solución

En la primera extracción hay 6 bolas y 4 son blancas, así que la probabilidad de blanca es $4/6$.

Como no se devuelve, en la segunda extracción quedan 5 bolas y, si la primera fue blanca, solo 3 blancas. La probabilidad de la segunda rama es $3/5$.

La probabilidad del camino «blanca y blanca» es el producto de las dos ramas: $(4/6) \cdot (3/5) = 12/30$.

Simplificando: **$2/5$** .

Ojo. Si la bola se devolviera, la segunda rama sería $4/6$ otra vez y el resultado $(4/6) \cdot (4/6) = 4/9$, que es distinto. Lo primero que hay que leer en estos enunciados es si hay devolución.

Teorema de Tales y semejanza

Lo que hay que saber

El **teorema de Tales** dice que si varias rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, los segmentos que determinan en una de ellas son proporcionales a los que determinan en la otra.

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen los mismos ángulos y sus lados correspondientes son proporcionales. Ese cociente constante es la **razón de semejanza**.

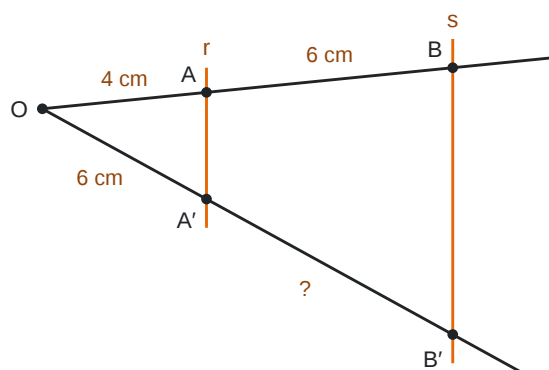
Dos triángulos son semejantes si tienen **dos ángulos iguales**: con eso el tercero también lo es, y los lados salen proporcionales.

Si la razón de semejanza es k , las **áreas** no están en razón k sino en razón k^2 , y los **volúmenes**, en razón k^3 . Es lo que hace que al duplicar los lados de una figura su área se cuadruplique y su volumen se multiplique por ocho.

Para aplicar Tales hay que **emparejar bien** los segmentos: cada trozo de una recta con el trozo que le corresponde de la otra, los dos contados desde el mismo punto. La figura de cada ejercicio dice cuál es cuál.

49

Mira la figura. Las rectas r y s son paralelas. Si $OA = 4$ cm, $AB = 6$ cm y $OA' = 6$ cm, ¿cuánto mide $A'B'$?



Las rectas r y s son paralelas y cortan a las dos rectas que salen del punto O . En la de arriba quedan los puntos A y B ; en la de abajo, A' y B' . Las medidas que se conocen están escritas junto a cada trozo, y el que se pide, con un interrogante. El dibujo no está a escala: los dos tramos de 6 cm no están dibujados iguales.

Solución

Las paralelas r y s cortan a las dos rectas que salen de O , así que por el teorema de Tales los trozos de una son proporcionales a los trozos de la otra: $OA / AB = OA' / A'B'$.

Se sustituye lo que se sabe: $4 / 6 = 6 / A'B'$.

Se despeja multiplicando en cruz: $4 \cdot A'B' = 6 \cdot 6 = 36$, así que $A'B' = 36 : 4$.

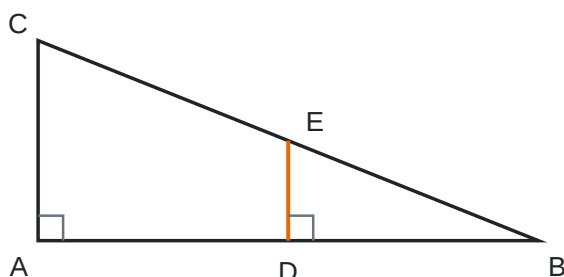
Mide **9 cm**.

Comprobación por otro camino: desde O , $OB = 4 + 6 = 10$ y $OB' = 6 + 9 = 15$. Las razones $10 / 4$ y $15 / 6$ valen las dos 2,5, así que cuadra.

Ojo. El emparejamiento. Si se escribe $4 / 6 = A'B' / 6$ —cruzando los segmentos— sale 4 cm, y si se usa $OB = 10$ en lugar de $AB = 6$ sale 15 cm, que es OB' entero y no el trozo que se pide.

50

En la figura, el triángulo ABC es rectángulo en A y el segmento DE es perpendicular a la base AB, igual que lo es el lado AC. Si $AB = 20$ m, $DB = 10$ m y $AC = 8$ m, ¿cuánto mide DE?



El triángulo ABC es rectángulo en A, dibujado a escala. El segmento DE va de la base AB hasta la hipotenusa CB y es perpendicular a la base, igual que lo es el lado AC.

Solución

Los triángulos ABC y DBE tienen el ángulo de B en común y los dos un ángulo recto (en A y en D), así que tienen dos ángulos iguales: son **semejantes**.

En triángulos semejantes los lados correspondientes son proporcionales. A la base AB le corresponde la base DB, y al lado AC le corresponde DE: $DE / AC = DB / AB$.

Se sustituye: $DE / 8 = 10 / 20 = 1/2$.

Entonces $DE = 8 \cdot 1/2 = 4$ m.

La razón de semejanza es $1/2$, y DE sale la mitad de AC, que es lo que tiene que pasar: el triángulo pequeño es el grande reducido a la mitad.

Ojo. DB es 10, no 20. Tomar $AB = 20$ como lado del triángulo pequeño daría razón 1 y $DE = 8$ m, que no puede ser: el segmento de dentro mediría lo mismo que el lado de fuera.

51

Dos triángulos son semejantes con razón de semejanza $k = 3$. El pequeño tiene un área de 12 cm^2 . ¿Cuánto mide el área del grande? Y si fueran dos cuerpos semejantes con la misma razón y el pequeño tuviera 5 cm^3 de volumen, ¿cuánto mediría el del grande?

Solución

Los lados están en razón 3, pero las áreas no: están en razón $k^2 = 3^2 = 9$.

El área del grande es $12 \cdot 9 = 108 \text{ cm}^2$.

Los volúmenes van en razón $k^3 = 3^3 = 27$, así que el volumen del grande es $5 \cdot 27 = 135 \text{ cm}^3$.

Ojo. Multiplicar el área por 3 en vez de por 9 daría 36 cm^2 , y el volumen por 3 daría 15 cm^3 . La razón k vale para los lados; para las áreas es k^2 y para los volúmenes, k^3 .