

Ejercicios de Matemáticas A de 4.º de ESO resueltos

47 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 14 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Números reales y aproximación · Redondear y errores (**ejercicios 1, 2, 3**)

Potencias y notación científica · Escribir y operar números grandes (**ejercicios 4, 5, 6**)

Proporcionalidad y porcentajes · Subidas, bajadas y comparaciones (**ejercicios 7, 8, 9, 10**)

Matemáticas financieras · Interés simple, compuesto y préstamos (**ejercicios 11, 12, 13, 14**)

Expresiones algebraicas y ecuaciones · Traducir y resolver problemas (**ejercicios 15, 16, 17**)

Ecuaciones de segundo grado y sistemas · Fórmula, sistemas y problemas (**ejercicios 18, 19, 20, 21**)

Semejanza, escalas y planos · Medidas reales desde un plano (**ejercicios 22, 23, 24**)

Áreas y volúmenes de cuerpos · Cilindro, cono, cubo y capacidad (**ejercicios 25, 26, 27**)

Trigonometría aplicada · Medir alturas y distancias (**ejercicios 28, 29, 30**)

Leer e interpretar gráficas · Qué cuenta una gráfica (**ejercicios 31, 32, 33**)

Funciones lineales y cuadráticas · Rectas, parábolas y máximos (**ejercicios 34, 35, 36**)

Estadística: frecuencias y parámetros · Frecuencias, media y dispersión (**ejercicios 37, 38, 39, 40**)

Gráficos estadísticos que engañan · Leer con desconfianza (**ejercicios 41, 42, 43**)

Probabilidad y recuento · Laplace, sin reposición y contar (**ejercicios 44, 45, 46, 47**)

Material propio de solucionariomatematicas.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionariomatematicas.es

Qué entra y qué no. Entran los catorce bloques del índice, todos con ejercicios resueltos, y tres de ellos llevan su figura. Esta es la página de **Matemáticas A**, la opción aplicada de 4.º (antes se llamaba «matemáticas aplicadas»). Si tu asignatura es **Matemáticas B**, busca la página de 4.º B: **no es el mismo temario con más dificultad**, son dos materias distintas. Aquí entran las matemáticas financieras, la lectura de gráficas y los gráficos estadísticos que engañan, que aquí tienen un peso central; y **no entran** los logaritmos, la geometría analítica con vectores, las inecuaciones ni las ecuaciones con radicales, que son de B. Esta página recoge además lo que la de 3.º de ESO dejó anunciado que era de 4.º: la trigonometría —aquí en su uso para medir alturas y distancias— y las aproximaciones con sus errores. **Tampoco entra** nada de Bachillerato: ni límites, ni derivadas, ni matrices. Estos ejercicios no sustituyen al temario ni a los del libro.

Ejercicios de Matemáticas A de 4.º de ESO resueltos

Números reales y aproximación

Lo que hay que saber

Redondear a una cifra es mirar la siguiente: si es 5 o más, se sube una unidad; si es menor, se deja igual. **Truncar** es cortar sin más.

El **error absoluto** es la diferencia, en valor absoluto, entre el valor exacto y el aproximado. Va en las mismas unidades que el dato.

El **error relativo** es el error absoluto dividido entre el valor exacto, y se suele dar en tanto por ciento. Es el que dice si la aproximación es buena.

△ Un mismo error absoluto puede ser aceptable o enorme según lo que se mida: 1 cm en una carretera no es 1 cm en un tornillo. Para comparar hay que usar el relativo.

Los **irracionales** (π , $\sqrt{2}$) tienen infinitos decimales sin periodo, así que al usarlos se trabaja con una aproximación, y conviene decir con cuál.

- 1 Redondea $2/3$ a las milésimas y calcula el error absoluto que se comete.

Solución

$2 : 3 = 0,6666\dots$ con infinitos seises.

Para redondear a las milésimas se mira la cifra siguiente, que es otro 6: como es mayor que 5, la milésima sube de 6 a 7. Queda **0,667**.

El error absoluto es la diferencia: $0,667 - 0,6666\dots = 0,000333\dots$, es decir, aproximadamente 0,0003.

Ojo. Aquí la aproximación es mayor que el valor exacto, porque se ha redondeado hacia arriba. El error absoluto se toma en valor absoluto, así que es positivo de todos modos.

- 2 Una báscula marca 72,4 kg y el peso real es 72,5 kg. Calcula el error absoluto y el relativo, y di si la báscula es aceptable para pesar personas.

Solución

El error absoluto es la diferencia: $72,5 - 72,4 = 0,1$ kg.

El relativo es ese error entre el valor exacto: $0,1 : 72,5 = 0,00137\dots$, es decir, aproximadamente el **0,14 %**.

Un error del 0,14 % al pesar una persona es **aceptable**: 100 g sobre 72 kg no cambia ninguna decisión.

Ojo. La misma báscula con el mismo error absoluto de 0,1 kg sería inservible para pesar 200 g de levadura, porque allí el error relativo sería del 50 %.

3

Calcula el área de un círculo de 3 m de radio usando $\pi = 3,14$ y después usando $\pi = 3,1416$. ¿Cuánto se diferencian?

Solución

Con $\pi = 3,14$: el radio al cuadrado es $3 \cdot 3 = 9$, y $3,14 \cdot 9 = 28,26 \text{ m}^2$.

Con $\pi = 3,1416$: $3,1416 \cdot 9 = 28,2744 \text{ m}^2$.

La diferencia es $28,2744 - 28,26 = 0,0144 \text{ m}^2$, es decir, unos 144 cm^2 .

Ojo. Ninguno de los dos es el área exacta, porque π no se puede escribir entero. Lo importante es decir con qué aproximación se ha trabajado.

Potencias y notación científica

Lo que hay que saber

La **notación científica** escribe un número como un número entre 1 y 10 multiplicado por una potencia de 10.

El **exponente** dice cuántos lugares hay que correr la coma: positivo para números grandes y negativo para los pequeños.

Para **multiplicar** en notación científica se multiplican los números de delante y se suman los exponentes; para dividir, se dividen y se restan.

△ Si al operar el número de delante se sale del rango 1-10, hay que **ajustarlo** moviendo la coma y cambiando el exponente.

La notación científica sirve para **comparar** de un vistazo: entre dos números **positivos y bien escritos** (el de delante, entre 1 y 10), el del exponente mayor es mayor, y solo si empatan hay que mirar el número de delante. ▀ Con números negativos es al revés: $-3 \cdot 10^5$ tiene el exponente mayor y es mucho menor que $-2 \cdot 10^3$.

4

Escribe en notación científica: 285 000 y 0,00045.

Solución

En 285 000 la coma se corre hasta dejar un solo dígito delante: 2,85. Se ha corrido 5 lugares hacia la izquierda, así que el exponente es 5.

Queda **$2,85 \cdot 10^5$** .

En 0,00045 hay que correr la coma hacia la derecha hasta el 4: son 4 lugares, así que el exponente es negativo.

Queda **$4,5 \cdot 10^{-4}$** .

Se comprueban deshaciéndolos: $2,85 \cdot 100\ 000 = 285\ 000$ y $4,5 : 10\ 000 = 0,00045$.

5 Calcula y deja el resultado en notación científica: $(3 \cdot 10^4) \cdot (5 \cdot 10^3)$.

Solución

Se multiplican los números de delante: $3 \cdot 5 = 15$.

Y se suman los exponentes: $4 + 3 = 7$. Por ahora queda $15 \cdot 10^7$.

Pero 15 no está entre 1 y 10, así que hay que ajustarlo: $15 = 1,5 \cdot 10$, y esa potencia se suma al exponente.

El resultado es $1,5 \cdot 10^8$.

Ojo. Dejar $15 \cdot 10^7$ no está mal calculado, pero no es notación científica: el número de delante tiene que quedar entre 1 y 10.

6 La distancia de la Tierra al Sol es de unos $1,5 \cdot 10^8$ km y la de la Tierra a la Luna, de unos $3,8 \cdot 10^5$ km. ¿Cuántas veces más lejos está el Sol?

Solución

Hay que dividir: $(1,5 \cdot 10^8) : (3,8 \cdot 10^5)$.

Se dividen los números de delante: $1,5 : 3,8 = 0,3947\dots$

Y se restan los exponentes: $8 - 5 = 3$. Queda $0,3947 \cdot 10^3$.

Ajustando para que el número quede entre 1 y 10: $0,3947 \cdot 10^3 = 3,947 \cdot 10^2$, es decir, unas **395 veces** más lejos.

Ojo. El redondeo se hace al FINAL, no a mitad de camino. Redondeando 0,3947 a 0,39 en el primer paso saldrían 390, casi cinco unidades menos.

Ojo. Al ajustar hacia arriba el número de delante, el exponente BAJA. Es fácil equivocarse de sentido: conviene comprobar que el resultado final sigue siendo el mismo número.

Proporcionalidad y porcentajes

Lo que hay que saber

Para **subir** un $p\%$, se multiplica por $(100 + p) : 100$; para **bajar**, por $(100 - p) : 100$. Ese número es el **índice de variación**.

⚠ Dos variaciones **encadenadas** se aplican multiplicando sus índices. ▪ No se suman ni se restan los porcentajes.

El **índice total** de una cadena dice de un vistazo qué ha pasado: si es mayor que 1 ha subido, si es menor ha bajado, y si es 1 se ha quedado igual.

Para hallar **qué porcentaje** es una cantidad de otra se escribe la fracción «parte entre total» y se convierte en una de denominador 100.

⚠ Un porcentaje va referido a algo. «Sube un 20 %» no significa nada sin decir sobre qué.

7

Un artículo cuesta 180 €. Primero sube un 40 % y después baja un 25 %. ¿Cuánto cuesta al final? ¿Ha subido o ha bajado respecto al precio inicial?

Solución

El índice de la subida es $(100 + 40) : 100 = 1,4$, así que tras subir cuesta $180 \cdot 1,4 = 252$ €.

El índice de la bajada es $(100 - 25) : 100 = 0,75$, y se aplica sobre los 252 €: $252 \cdot 0,75 = 189$ €.

Para compararlo con el principio se divide: $189 : 180 = 1,05$, que es el **105 %** del precio inicial.

Así que ha **subido un 5 %** en total.

Ojo. Subir un 40 % y bajar un 25 % NO es subir un 15 %: los porcentajes no se restan. El índice total es $1,4 \cdot 0,75 = 1,05$, es decir un 5 %, y ese 1,05 es todo lo que hay que mirar.

8

En unas rebajas, una chaqueta de 250 € tiene un 60 % de descuento. ¿Cuánto se ahorra y cuánto cuesta?

Solución

El descuento es el 60 % de 250: $250 : 100 = 2,5$, y $2,5 \cdot 60 = 150$ € de ahorro.

El precio final es $250 - 150 = 100$ €.

Se comprueba por el otro camino: si se descuenta el 60 %, se paga el 40 %, y el 40 % de 250 es $2,5 \cdot 40 = 100$ €.

9

En un instituto, 45 de los 300 alumnos van en autobús. ¿Qué porcentaje son? Si el curso que viene el instituto pasa a tener 400 alumnos y el porcentaje se mantiene, ¿cuántos irán en autobús?

Solución

La fracción es 45/300. Para pasarla a denominador 100 se divide entre 3 arriba y abajo: $45 : 3 = 15$ y $300 : 3 = 100$.

Queda 15/100, es decir, el **15 %**.

Con 400 alumnos y el mismo porcentaje: $400 : 100 = 4$, y $4 \cdot 15 = 60$ **alumnos**.

Ojo. El número de alumnos en autobús sube de 45 a 60 aunque el porcentaje no cambie. El porcentaje es una proporción, no una cantidad.

10

Un depósito tiene 800 litros y se vacía un 30 % el lunes y un 30 % de lo que queda el martes. ¿Cuántos litros quedan el miércoles?

Solución

El lunes se queda con el 70 %: el índice es 0,7, así que $800 \cdot 0,7 = 560$ litros.

El martes se vuelve a quedar con el 70 %, pero de los 560 que había: $560 \cdot 0,7 = 392$ **litros**.

El índice total de los dos días es $0,7 \cdot 0,7 = 0,49$, es decir, queda el 49 % de lo que había: $800 \cdot 0,49 = 392$ litros. Sale lo mismo.

Ojo. Dos bajadas del 30 % no son una bajada del 60 %. Con el 60 % quedarían 320 litros, y quedan 392.

Lo que hay que saber

En el **interés simple** los intereses se calculan sobre el capital inicial, el mismo todos los años, y no se suman a él.

En el **interés compuesto** los intereses se van sumando al capital, así que cada año se calculan sobre una cantidad mayor. El capital final es el inicial multiplicado por $(1 + r/100)$ elevado a los años.

△ A igualdad de plazo y tipo, el primer año los dos dan **lo mismo**, y a partir del segundo el compuesto da **más** que el simple, con una diferencia que crece con los años.

En un **préstamo**, lo que se devuelve es el capital más los intereses, repartido en cuotas. La cuota es el total a devolver dividido entre el número de cuotas.

△ El **tipo de interés** va referido a un periodo, que suele ser el año. Un 3 % mensual y un 3 % anual no se parecen en nada.

- 11** Se depositan 1 000 € al 3 % anual durante 3 años a interés compuesto. ¿Cuánto dinero hay al final y cuántos intereses se han generado?

Solución

El índice de cada año es $1 + 3/100 = 1,03$.

Como son 3 años y es compuesto, se multiplica tres veces: $1\,000 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03$, es decir $1\,000 \cdot 1,03^3$.

$1,03^3 = 1,092727$, así que el capital final es 1 092,727 €, que redondeado a los céntimos son **1 092,73 €**.

Los intereses son la diferencia: $1\,092,73 - 1\,000 = \mathbf{92,73\ €}$.

- 12** Con los mismos datos del ejercicio anterior, ¿cuánto se habría ganado a interés simple? ¿Cuál es la diferencia?

Solución

A interés simple los intereses de cada año se calculan sobre los 1 000 € iniciales: $1\,000 : 100 = 10$, y $10 \cdot 3 = 30$ € al año.

En 3 años: $30 \cdot 3 = \mathbf{90\ €}$ de intereses, y el capital final sería $1\,000 + 90 = \mathbf{1\,090\ €}$.

La diferencia con el compuesto es $1\,092,73 - 1\,090 = \mathbf{2,73\ €}$.

Ojo. Con 3 años y un 3 % la diferencia es pequeña, pero no es cero, y crece deprisa con el plazo. Decir que «da igual» sería falso.

- 13** Un banco presta 12 000 € para devolver en 48 cuotas mensuales iguales, con 1 440 € de intereses en total. ¿Cuánto se paga cada mes y cuánto se devuelve en total?

Solución

El total a devolver es el capital más los intereses: $12\,000 + 1\,440 = 13\,440$ €.

La cuota mensual es ese total entre el número de cuotas: $13\,440 : 48 = 280$ €.

Se puede ver qué parte es interés: sin intereses la cuota habría sido $12\,000 : 48 = 250$ €, así que de cada cuota 30 € son intereses.

Ojo. La cuota no es $12\,000 : 48$. Los intereses también se pagan, y olvidarlos deja la cuota 30 € por debajo de la real.

- 14** ¿Qué porcentaje de lo prestado representan los 1 440 € de intereses del ejercicio anterior?

Solución

Se compara con el capital prestado: 1 440 sobre 12 000.

La fracción es $1\,440/12\,000$. Dividiendo entre 120 arriba y abajo: $1\,440 : 120 = 12$ y $12\,000 : 120 = 100$.

Queda $12/100$, es decir, el **12 %**.

Ojo. Ese 12 % es el coste TOTAL de los cuatro años, no un tipo anual. Un préstamo al 12 % anual durante cuatro años costaría bastante más.

Expresiones algebraicas y ecuaciones

Lo que hay que saber

Traducir un enunciado es ponerle nombre a lo que no se sabe y escribir con letras lo que dice la frase, en el mismo orden en que se lee.

Las traducciones que más se usan: «el doble» es $2x$, «la mitad» es $x/2$, «tres más que» es $x + 3$, y «tres veces más» conviene evitarlo porque se entiende de dos maneras.

Para **resolver**: quitar denominadores, quitar paréntesis, agrupar las x a un lado y los números al otro, y despejar.

▪ La solución de un problema se comprueba **en el enunciado**, no solo en la ecuación: puede que la ecuación esté bien resuelta y mal planteada.

⚠ Y hay que mirar si el resultado **tiene sentido**: un número de personas no puede ser decimal ni negativo.

- 15** Resuelve $3(x - 2) + 5 = 11$ y comprueba la solución.

Solución

Se quita el paréntesis: $3x - 6 + 5 = 11$, es decir $3x - 1 = 11$.

Se pasa el -1 sumando: $3x = 12$.

Se despeja: $x = 12 : 3 = 4$.

Comprobación en la ecuación original: $3(4 - 2) + 5 = 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$. Correcto.

- 16 Tres amigos se reparten 240 € de forma que el segundo recibe el doble que el primero y el tercero, el quíntuple que el primero. ¿Cuánto recibe cada uno?

Solución

Se llama x a lo que recibe el primero. El segundo recibe $2x$ y el tercero, $5x$.

La ecuación es $x + 2x + 5x = 240$, es decir $8x = 240$.

Se despeja: $x = 240 : 8 = 30$ € el primero.

El segundo recibe $2 \cdot 30 = 60$ € y el tercero, $5 \cdot 30 = 150$ €.

Comprobación en el enunciado: $30 + 60 + 150 = 240$ €, el segundo es el doble del primero y el tercero el quíntuple. Correcto.

- 17 La edad de un padre es el triple que la de su hijo, y dentro de 12 años será el doble. ¿Qué edad tienen ahora?

Solución

Se llama x a la edad del hijo ahora; la del padre es $3x$.

Dentro de 12 años el hijo tendrá $x + 12$ y el padre, $3x + 12$. Y entonces el padre será el doble: $3x + 12 = 2(x + 12)$.

Se quita el paréntesis: $3x + 12 = 2x + 24$.

Se agrupan: $3x - 2x = 24 - 12$, así que $x = 12$ años el hijo y $3 \cdot 12 = 36$ años el padre.

Comprobación en el enunciado: 36 es el triple de 12; y dentro de 12 años tendrán 24 y 48, y 48 es el doble de 24. Correcto.

Ecuaciones de segundo grado y sistemas

Lo que hay que saber

La ecuación de segundo grado se resuelve con la fórmula general: menos b , más o menos la raíz de $b^2 - 4ac$, todo entre $2a$.

⚠ Antes de aplicarla hay que dejar la ecuación **igualada a cero** y ordenada; si no, los coeficientes a , b y c no son los que parecen.

Un **sistema** de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver por **sustitución**: despejando una incógnita en la más sencilla y sustituyéndola en la otra. Es el método que se usa aquí.

▪ En un problema con contexto, una solución matemáticamente correcta puede no valer: una longitud negativa o un número de objetos decimal se descartan, y se dice por qué.

La comprobación se hace en **las dos ecuaciones** y, si hay contexto, también contra el enunciado.

- 18 Resuelve $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Solución

Los coeficientes son $a = 1$, $b = -7$ y $c = 10$.

Lo de dentro de la raíz: $49 - 40 = 9$, y su raíz es 3.

La fórmula da $(7 \pm 3) : 2$, así que las soluciones son **5 y 2**.

Comprobación: $25 - 35 + 10 = 0$ y $4 - 14 + 10 = 0$. Las dos valen.

19 Un rectángulo tiene 46 m de perímetro y 126 m² de área. Calcula sus lados.

Solución

Se llaman x e y a los lados. El perímetro: $2(x + y) = 46$, así que $x + y = 23$. El área: $x \cdot y = 126$.

Se despeja $y = 23 - x$ y se sustituye: $x(23 - x) = 126$, es decir $x^2 - 23x + 126 = 0$.

Lo de dentro de la raíz: $529 - 504 = 25$, y su raíz es 5.

Las soluciones son $(23 + 5) : 2 = 14$ y $(23 - 5) : 2 = 9$, así que los lados miden **14 m y 9 m**.

Comprobación en el enunciado: $2(14 + 9) = 46$ m de perímetro y $14 \cdot 9 = 126$ m² de área. Correcto.

20 En un aparcamiento hay motos y coches: 40 vehículos y 110 ruedas en total. ¿Cuántos hay de cada clase?

Solución

Se llama x a las motos e y a los coches. Los vehículos: $x + y = 40$. Las ruedas, a 2 por moto y 4 por coche: $2x + 4y = 110$.

Se despeja $x = 40 - y$ y se sustituye: $2(40 - y) + 4y = 110$, es decir $80 - 2y + 4y = 110$.

Queda $2y = 30$, así que $y =$ **15 coches**, y $x = 40 - 15 =$ **25 motos**.

Comprobación: $25 + 15 = 40$ vehículos y $2 \cdot 25 + 4 \cdot 15 = 50 + 60 = 110$ ruedas. Correcto.

21 El producto de dos números enteros consecutivos es 72. ¿Cuáles son?

Solución

Se llama x al primero; el siguiente es $x + 1$.

La ecuación es $x(x + 1) = 72$, es decir $x^2 + x - 72 = 0$.

Lo de dentro de la raíz: $1 + 288 = 289$, y su raíz es 17.

Las soluciones son $(-1 + 17) : 2 = 8$ y $(-1 - 17) : 2 = -9$.

Las dos valen, porque el enunciado dice enteros: los números son **8 y 9**, o bien **-9 y -8**.

Comprobación en el enunciado: $8 \cdot 9 = 72$ y $(-9) \cdot (-8) = 72$. Las dos parejas son de enteros consecutivos y dan 72.

Ojo. Aquí la solución negativa NO se descarta, porque se piden enteros. Si el enunciado hubiera dicho «naturales», la pareja -9 y -8 habría que dejarla fuera, y diciendo por qué.

Semejanza, escalas y planos

Lo que hay que saber

Dos figuras son **semejantes** si tienen la misma forma: sus ángulos son iguales y sus lados, proporcionales. El número que relaciona los lados es la **razón de semejanza**.

Una **escala** $1 : n$ significa que 1 unidad del plano son n unidades de la realidad. Para pasar del plano a la realidad se multiplica; al revés, se divide.

△ Si los lados se multiplican por k , las **áreas** se multiplican por k^2 y los **volúmenes** por k^3 . No por k .

△ Antes de dar una medida real hay que mirar las **unidades**: una escala suele dar centímetros, y la respuesta se suele querer en metros.

En los triángulos basta con que dos ángulos sean iguales para que sean semejantes.

22 En un plano a escala $1 : 50$, una pared mide 4 cm. ¿Cuánto mide de verdad?

Solución

La escala $1 : 50$ dice que 1 cm del plano son 50 cm de verdad.

Para pasar del plano a la realidad se multiplica: $4 \cdot 50 = 200$ cm.

Se pasa a metros, que es como se mide una pared: $200 \text{ cm} = 2 \text{ m}$.

Ojo. El resultado en centímetros no está mal, pero decir «200» sin unidad o dar «200 m» sí. La escala da centímetros.

23 Dos triángulos son semejantes. Un lado del pequeño mide 2 cm y su correspondiente del grande, 6 cm. Si otro lado del pequeño mide 5 cm, ¿cuánto mide el suyo en el grande?

Solución

La razón de semejanza es $6 : 2 = 3$.

El otro lado se multiplica por la misma razón: $5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}$.

Se comprueba que las dos parejas dan la misma razón: $6/2 = 3$ y $15/5 = 3$.

24 Una finca dibujada en un plano ocupa 20 cm^2 de papel. Se vuelve a dibujar en otro plano en el que todas las longitudes son el triple de largas. ¿Qué superficie ocupará ahora?

Solución

Si los lados se multiplican por 3, la superficie se multiplica por $3^2 = 9$.

Así que ocupará $20 \cdot 9 = 180 \text{ cm}^2$ en el plano nuevo.

Ojo. La superficie no se multiplica por 3. Con 3 saldrían 60 cm^2 , que es la tercera parte de lo que de verdad ocupa.

Áreas y volúmenes de cuerpos

Lo que hay que saber

El **volumen** de un prisma o un cilindro es el área de la base por la altura.

El de una **pirámide** o un **cono** es el área de la base por la altura dividido entre 3.

En el **cilindro**, el área de la base es $\pi \cdot r^2$. Aquí se usa $\pi = 3,14$, así que los resultados son aproximados.

△ La **capacidad** y el volumen van unidos: $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litro}$, y $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ litros}$.

△ Las tres medidas tienen que estar en la **misma unidad** antes de multiplicar.

- 25** Un depósito cilíndrico tiene 5 m de radio y 8 m de altura. Calcula su volumen y cuántos litros de agua caben. Usa $\pi = 3,14$.

Solución

El área de la base es $\pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 5^2$. El radio al cuadrado es 25, así que $3,14 \cdot 25 = 78,5 \text{ m}^2$.

El volumen es el área de la base por la altura: $78,5 \cdot 8 = 628 \text{ m}^3$, aproximadamente.

Como 1 m^3 son 1 000 litros: $628 \cdot 1\,000 = 628\,000 \text{ litros}$.

Ojo. El resultado es aproximado porque π se ha tomado como 3,14. Con más decimales de π saldrían unos 319 litros más.

- 26** La tolva de una fábrica tiene forma de cono de 3 m de radio y 10 m de altura. Calcula su volumen. Usa $\pi = 3,14$.

Solución

El área de la base es $3,14 \cdot 3^2 = 3,14 \cdot 9 = 28,26 \text{ m}^2$.

El volumen del cono es el área de la base por la altura, dividido entre 3: $28,26 \cdot 10 = 282,6$, y $282,6 : 3 = 94,2 \text{ m}^3$, aproximadamente.

Ojo. La división entre 3 no se puede olvidar. Sin ella saldrían $282,6 \text{ m}^3$, que es el volumen del cilindro que envolvería al cono, el triple de lo que hay.

- 27** Una caja cúbica de 6 cm de arista se llena de agua. ¿Cuántos centilitros caben?

Solución

El volumen del cubo es la arista al cubo: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \text{ cm}^3$.

Como 1 dm^3 es 1 litro y 1 dm^3 son $1\,000 \text{ cm}^3$, 216 cm^3 son 0,216 litros.

Y 1 litro son 100 centilitros, así que $0,216 \cdot 100 = 21,6 \text{ centilitros}$.

Trigonometría aplicada

Lo que hay que saber

En un triángulo rectángulo: el **seno** de un ángulo agudo es el cateto opuesto entre la hipotenusa; el **coseno**, el contiguo entre la hipotenusa; y la **tangente**, el opuesto entre el contiguo.

El **ángulo de elevación** es el que forma la visual con la horizontal cuando se mira hacia arriba.

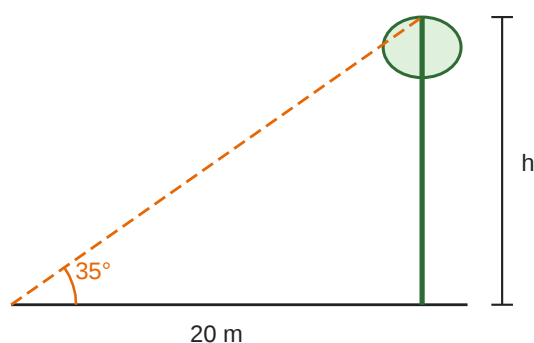
△ Para medir una altura desde una distancia conocida, la razón que sirve es la **tangente**: relaciona los dos catetos y no hace falta la hipotenusa, que es la que no se puede medir cuando se mira una altura desde lejos. △ Si lo conocido ES la hipotenusa —una escalera, el cable de una tirolina—, entonces las razones que sirven son el seno y el coseno.

Hay tres ángulos con valores exactos que conviene saber: el seno de 30° es $1/2$ y el coseno de 60° también; el coseno de 30° y el seno de 60° valen $(\sqrt{3})/2$; y en 45° el seno y el coseno son iguales, $(\sqrt{2})/2$, así que su tangente vale 1.

△ Para los demás ángulos se usa la calculadora y el resultado es **aproximado**; conviene decir con qué valor se ha trabajado.

28

Desde un punto situado a 20 m del pie de un árbol, su copa se ve con un ángulo de elevación de 35° , como en el dibujo. ¿Cuánto mide el árbol? Usa $\text{tg } 35^\circ = 0,70$.



El observador está en el extremo izquierdo, a 20 m del pie del árbol. La línea naranja de puntos es su visual hasta la copa, y el arco naranja marca el ángulo de elevación, 35° . La h de la derecha es la altura del árbol, que es lo que hay que hallar, y está acotada a la derecha con dos marcas. El dibujo está a escala: la cima del árbol, el final de la visual y la marca de arriba de la cota están a la misma altura, que con 20 m de base son los 14 m de la solución, y la visual forma 35° con el suelo. Se puede comprobar con regla y transportador.

Solución

Los datos son el cateto contiguo (los 20 m del suelo) y el ángulo; lo que se busca es el cateto opuesto (la altura). La razón que los relaciona es la tangente.

$\text{tg } 35^\circ = \text{altura} : 20$, así que $\text{altura} = 20 \cdot \text{tg } 35^\circ$.

Con $\text{tg } 35^\circ = 0,70$: $20 \cdot 0,70 = 14 \text{ m}$, aproximadamente.

Ojo. El resultado es aproximado porque la tangente de 35° no es exactamente 0,70. Con el valor de la calculadora, que es 0,700208, saldrían unos 14,004 m.

29 El cable de una tirolina mide 20 m y forma 30° con el suelo. ¿Qué desnivel salva?

Solución

El cable es la hipotenusa y el desnivel es el cateto opuesto al ángulo de 30° , así que la razón que sirve es el seno.

$$\text{desnivel} = 20 \cdot \sin 30^\circ.$$

Como $\sin 30^\circ = 1/2$, queda $20 \cdot 1/2 = \mathbf{10 \text{ m}}$.

Ojo. Aquí el dato es la LONGITUD del cable, no la distancia por el suelo. Con la tangente saldría otro número, porque la tangente no usa la hipotenusa.

30 Una escalera de 6 m apoyada en una pared forma 60° con el suelo. ¿A qué altura llega y a qué distancia de la pared está su base?

Solución

La escalera es la hipotenusa. La altura es el cateto opuesto a los 60° y la distancia es el contiguo.

$$\text{Altura} = 6 \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot (\sqrt{3})/2 = \mathbf{3\sqrt{3} \text{ m}}, \text{ aproximadamente } 5,20 \text{ m}.$$

$$\text{Distancia} = 6 \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot 1/2 = \mathbf{3 \text{ m}}.$$

Se comprueba con Pitágoras: $3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 9 + 27 = 36$, que es 6^2 . Correcto.

Leer e interpretar gráficas

Lo que hay que saber

Lo primero de una gráfica son sus **ejes**: qué mide cada uno y en qué unidades. Sin eso no se puede leer nada.

Un tramo que **sube** significa que la magnitud aumenta; uno que **baja**, que disminuye; y uno **horizontal**, que se mantiene.

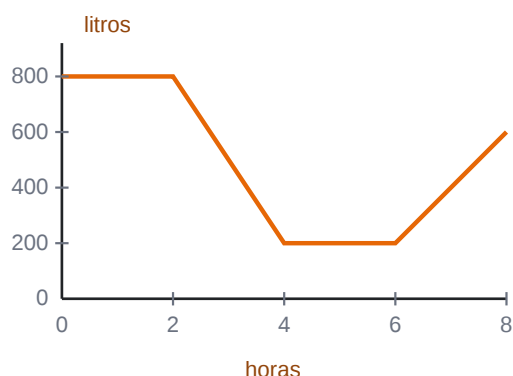
△ Un tramo horizontal no significa «no pasa nada»: significa que la cantidad no cambia, que puede ser justo lo interesante.

Cuanto más **inclinado** es un tramo, más deprisa cambia la magnitud.

Los **máximos** y **mínimos** son los puntos más alto y más bajo, y los **cortes con los ejes** dicen cuándo valía cero o de cuánto se partía.

31

La gráfica que aparece en el dibujo muestra los litros de agua de un depósito durante 8 horas. Di cuánta agua había al principio, qué pasa en cada tramo y cuánta hay al final.



Gráfica del agua que hay en un depósito durante ocho horas. El eje horizontal son las horas, de dos en dos, y el vertical, los litros, de 200 en 200. La línea naranja es constante las dos primeras horas, baja entre la 2 y la 4, se mantiene entre la 4 y la 6, y sube entre la 6 y la 8.

Solución

Al principio, en la hora 0, la línea está a la altura de los 800 litros: había **800 litros**.

De la hora 0 a la 2 el tramo es horizontal: la cantidad **no cambia**, sigue habiendo 800 litros.

De la 2 a la 4 el tramo baja hasta los 200 litros: el depósito se está **vaciando**, y pierde $800 - 200 = 600$ litros, pero no llega a vaciarse del todo: quedan 200.

De la 4 a la 6 vuelve a ser horizontal: se mantiene en 200 litros.

De la 6 a la 8 sube hasta los 600 litros: se **llena**, y gana $600 - 200 = 400$ litros. Al final hay **600 litros**.

32

En esa misma gráfica, ¿en qué tramo cambia el agua más deprisa, y cuántos litros por hora?

Solución

Hay dos tramos inclinados: el que baja (de la hora 2 a la 4) y el que sube (de la 6 a la 8). Los dos duran 2 horas.

En el que baja se pierden 600 litros en 2 horas: $600 : 2 = 300$ litros por hora.

En el que sube se ganan 400 litros en 2 horas: $400 : 2 = 200$ litros por hora.

Así que donde más deprisa cambia es en el tramo que **baja**, a **300 litros por hora**.

Ojo. Para comparar la rapidez hay que dividir entre el tiempo, no mirar solo cuánto cambia. Aquí los dos tramos duran lo mismo, pero si uno durase el doble la comparación a ojo engañaría.

33

La gráfica del gasto mensual de una tarifa de móvil es una recta que corta el eje vertical en 20 € y que por cada giga de más sube 5 €. (a) ¿Qué significan en la factura esos dos números? (b) ¿Cuánto se paga con 3 gigas de más? (c) ¿A partir de cuántos gigas de más se pasa de 50 €?

Solución

(a) El punto por donde corta al eje vertical es lo que se paga con 0 gigas de más: la **cuota fija**, 20 € al mes.

Lo que sube por cada giga es la inclinación de la recta: el **precio de cada giga**, 5 €.

(b) Con esos dos números la función es $y = 5x + 20$, y sustituyendo $x = 3$ se llega a $5 \cdot 3 + 20 = 15 + 20 = \mathbf{35 \text{ €}}$.

(c) Se prueba con valores: con 6 gigas de más se pagan $5 \cdot 6 + 20 = 50 \text{ €}$ justos, y con 7, $5 \cdot 7 + 20 = 55 \text{ €}$. Así que se pasa de 50 € a partir de los **7 gigas** de más.

Ojo. Esta recta no pasa por el origen, y por eso el gasto NO es proporcional a los gigas: con 0 gigas de más ya se pagan 20 €, y con el doble de gigas no se paga el doble (con 6 gigas son 50 €, no 70).

Funciones lineales y cuadráticas

Lo que hay que saber

La **función afín** $y = mx + n$ tiene por gráfica una recta: m es la **pendiente** (cuánto sube la y al aumentar la x en 1) y n , el valor por donde corta al eje de la y .

Si m es positiva la recta sube; si es negativa, baja; y si es 0, es horizontal.

La **función cuadrática** $y = ax^2 + bx + c$ tiene por gráfica una parábola, que se abre hacia arriba si a es positivo y hacia abajo si es negativo.

La primera coordenada del **vértice** es $-b$ entre $2a$. Si la parábola se abre hacia abajo, el vértice es el **máximo**, y es lo que suele pedir un problema.

⚠ En un problema con contexto hay que mirar qué valores de x tienen sentido: no sirven los negativos si x son unidades vendidas o metros.

34

Un taxi cobra 3 € de bajada de bandera y 1,20 € por kilómetro. Escribe la función del precio y calcula lo que cuesta un viaje de 12 km.

Solución

La parte fija son 3 € y la variable, 1,20 € por kilómetro.

Llamando x a los kilómetros: **$y = 1,20x + 3$** .

Para 12 km: $1,20 \cdot 12 = 14,40$, y $14,40 + 3 = \mathbf{17,40 \text{ €}}$.

La pendiente es 1,20: cada kilómetro de más sube el precio en 1,20 €.

35

Halla el vértice de la parábola $y = x^2 - 6x + 5$, di si es un máximo o un mínimo y halla sus cortes con los ejes.

Solución

Aquí $a = 1$ y $b = -6$. Como a es positivo, la parábola se abre hacia arriba y el vértice es un **mínimo**.

La primera coordenada es $-b : 2a = 6 : 2 = 3$.

La segunda se obtiene sustituyendo: $3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$.

El vértice es **(3, -4)**, y es el punto más bajo de la parábola.

Los cortes con el eje x son las soluciones de $x^2 - 6x + 5 = 0$: el discriminante es $36 - 20 = 16$ y su raíz, 4, así que $x = (6 + 4) : 2 = 5$ y $x = (6 - 4) : 2 = 1$. Son **(1, 0)** y **(5, 0)**.

El corte con el eje y es el término independiente: **(0, 5)**.

Ojo. El vértice no está en $x = 6$. La primera coordenada es $-b$ dividido entre $2a$, no $-b$; con 6 saldría $6^2 - 36 + 5 = 5$, y el punto (6, 5) está en la parábola pero lejos del vértice: el mínimo vale -4 .

36

Una empresa vende x camisetas y su beneficio, en euros, es $B = -x^2 + 80x$. ¿Cuántas camisetas tiene que vender para ganar lo máximo? ¿Cuánto gana entonces?

Solución

El coeficiente de x^2 es negativo, así que la parábola se abre hacia abajo y el vértice es el máximo beneficio.

La primera coordenada del vértice es $-80 : (-2) = 40$ **camisetas**.

El beneficio en ese punto: $-40^2 + 80 \cdot 40 = -1\,600 + 3\,200 = 1\,600$ €.

Ojo. Vender más de 40 no aumenta el beneficio, lo baja. Y los valores negativos de x no tienen sentido aquí, porque no hay camisetas negativas.

Estadística: frecuencias y parámetros

Lo que hay que saber

La **frecuencia absoluta** de un valor es las veces que aparece; la **relativa** es esa frecuencia dividida entre el total, y se puede dar en tanto por ciento.

La **media** con los datos agrupados por frecuencias se calcula multiplicando cada valor por su frecuencia, sumando todo y dividiendo entre el total.

⚠ No se puede hacer la media de los valores sin más: cada uno pesa lo que diga su frecuencia.

La **moda** es el valor que más se repite; si ninguno se repite, no hay moda, y si empatan varios, hay varias.

La **varianza** es la media de los cuadrados de las diferencias con la media, y la **desviación típica** es su raíz cuadrada. Dice cómo de juntos están los datos, y va en las mismas unidades que ellos; la varianza, no.

⚠ Dos conjuntos pueden tener la **misma media** y ser muy distintos: por eso hace falta también un parámetro de dispersión.

- 37** En una clase se ha contado el número de hermanos de cada alumno: 0 lo tienen 4, 1 lo tienen 10, 2 lo tienen 5 y 3 lo tiene 1. Calcula la media.

Solución

El total de alumnos es $4 + 10 + 5 + 1 = 20$.

Se multiplica cada valor por su frecuencia: $0 \cdot 4 = 0$; $1 \cdot 10 = 10$; $2 \cdot 5 = 10$; $3 \cdot 1 = 3$.

La suma es $0 + 10 + 10 + 3 = 23$.

Y se divide entre el total: $23 : 20 = 1,15$ **hermanos** de media.

Ojo. La media de 0, 1, 2 y 3 sería 1,5, y no es la respuesta: cada valor pesa lo que diga su frecuencia, y el 1 pesa diez veces.

- 38** Con los mismos datos, ¿qué porcentaje de alumnos tiene al menos un hermano?

Solución

Tienen al menos uno todos menos los que tienen 0: $10 + 5 + 1 = 16$ alumnos.

La fracción es $16/20$. Para pasarla a denominador 100 se multiplica por 5 arriba y abajo: $16 \cdot 5 = 80$ y $20 \cdot 5 = 100$.

Queda $80/100$, es decir, el **80 %**.

Se comprueba por el contrario: los que no tienen ninguno son 4 de 20, que es el 20 %, y $100 - 20 = 80$ %.

- 39** Calcula la media y la desviación típica de estas cinco notas: 3, 5, 6, 7 y 9.

Solución

La suma es $3 + 5 + 6 + 7 + 9 = 30$, y son 5 notas, así que la media es $30 : 5 = 6$.

Las diferencias con la media, al cuadrado: $(3 - 6)^2 = 9$; $(5 - 6)^2 = 1$; $(6 - 6)^2 = 0$; $(7 - 6)^2 = 1$; $(9 - 6)^2 = 9$.

La suma es $9 + 1 + 0 + 1 + 9 = 20$, y la varianza es $20 : 5 = 4$.

La desviación típica es la raíz de la varianza: **2**.

Ojo. Estas cinco notas no tienen moda, porque ninguna se repite. No es un error de los datos: hay conjuntos sin moda.

- 40** Dos grupos tienen la misma nota media, 6. En el primero las notas son 6, 6, 6, 6 y 6; en el segundo, 2, 4, 6, 8 y 10. ¿En cuál están más repartidas y cómo se nota en la desviación típica?

Solución

En el primero todas las notas valen 6, así que todas las diferencias con la media son 0: la varianza es 0 y la desviación típica es **0**.

En el segundo las diferencias al cuadrado son 16, 4, 0, 4 y 16, que suman 40. La varianza es $40 : 5 = 8$ y la desviación típica es la raíz de 8, aproximadamente **2,83**.

Están **más repartidas en el segundo**, y se nota en que su desviación típica es mayor.

Ojo. La media no distingue los dos grupos, porque en los dos es 6. Mirar solo la media aquí daría la impresión de que son iguales, y no lo son.

Gráficos estadísticos que engañan

Lo que hay que saber

Un gráfico puede ser **exacto en sus datos y engañoso en su aspecto**. Las cifras no mienten, pero la impresión que dejan sí puede.

Una trampa conocida es el **eje vertical que no empieza en cero**: una diferencia pequeña se ve enorme.

Otra es comparar con **dibujos o áreas**: si se dobla el alto y el ancho de una figura para representar el doble, el área queda cuatro veces mayor y aparenta mucho más.

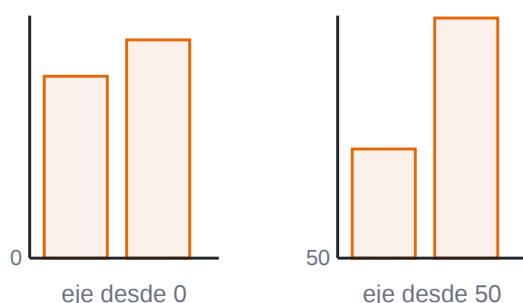
Y otra es elegir **solo un trozo** del periodo, el que conviene, o usar intervalos de distinta anchura sin avisar.

Y lo mismo vale sin dibujo ninguno: un **titular con un porcentaje** engaña si no dice respecto de qué se calcula ni de qué cantidad se parte, ni si el porcentaje es lo que SUBE o lo que QUEDA: subir un 200 % deja el triple, y ser el 200 % deja el doble.

△ Lo que hay que mirar en cualquier gráfico: dónde empieza el eje, qué unidades usa, qué periodo cubre y de dónde salen los datos.

41

Los dos diagramas que aparecen en el dibujo representan los mismos dos datos, 60 y 72. En el de la izquierda el eje empieza en 0 y en el de la derecha, en 50. Calcula el aumento real en porcentaje y explica qué impresión da cada diagrama.



Dos diagramas con **los mismos dos datos**, 60 y 72. En el de la izquierda el eje vertical empieza en 0; en el de la derecha empieza en 50. Las alturas de las barras no son las mismas en los dos, y esa es justamente la cuestión del ejercicio.

Solución

El aumento real es $72 - 60 = 12$ sobre 60.

En porcentaje: $12/60 = 2/10 = 20/100$, es decir, un **20 %**.

En el diagrama de la izquierda, con el eje desde 0, la segunda barra se ve algo más alta que la primera: se corresponde con ese 20 %.

En el de la derecha, con el eje desde 50, la primera barra representa 10 unidades por encima del corte y la segunda, 22: se ve **más del doble**, cuando el aumento es del 20 %.

Ojo. Los dos diagramas son correctos en sus números. El de la derecha no miente, pero deja una impresión falsa, y por eso lo primero que hay que mirar es dónde empieza el eje.

42

Un titular dice: «las ventas se han disparado un 300 %». Si antes se vendían 20 unidades, ¿cuántas se venden ahora?

Solución

Un aumento del 300 % significa que se suman tres veces la cantidad inicial.

El 300 % de 20 es $20 : 100 = 0,2$, y $0,2 \cdot 300 = 60$.

Así que ahora se venden $20 + 60 = 80$ unidades.

Ojo. «aumentar un 300 %» no es lo mismo que «ser el 300 %». Ser el 300 % de 20 serían 60 unidades; aumentar un 300 % son 80. El titular con el porcentaje es correcto, pero se presta a confusión, y por eso conviene dar también la cifra.

43

Una empresa presenta un gráfico con las ventas de los meses de octubre, noviembre y diciembre, en el que suben, y titula «crecimiento sostenido». ¿Qué habría que preguntar antes de creerlo?

Solución

Lo primero, **qué periodo cubre**: tres meses no son una tendencia, y además son los meses de las compras de Navidad, así que la subida puede ser estacional y repetirse todos los años.

Lo segundo, **dónde empieza el eje vertical**: si no empieza en cero, la subida se ve mayor de lo que es.

Lo tercero, **con qué se compara**: lo que dice si hay crecimiento es comparar con los mismos meses del año anterior, no con los meses de antes.

Y lo cuarto, **de dónde salen los datos** y si están completos.

Ojo. El gráfico puede ser verdadero y el titular, falso. «Sostenido» es una afirmación sobre una tendencia, y con tres meses de una temporada alta no hay datos para sostenerla.

Probabilidad y recuento

Lo que hay que saber

Cuando todos los resultados son igualmente probables, la probabilidad de un suceso es los **casos favorables entre los posibles** (regla de Laplace).

Para contar los casos posibles de varias elecciones seguidas se **multiplica** el número de opciones de cada una.

En una extracción **sin reposición**, la segunda probabilidad cambia: hay un elemento menos en total, y **uno menos de la clase a la que pertenecía el primero**; las demás clases siguen igual. Por eso la segunda probabilidad hay que calcularla sabiendo qué salió la primera vez.

La probabilidad del **suceso contrario** es 1 menos la del suceso. Muchas veces es más fácil contar lo contrario.

⚠ La probabilidad está entre 0 y 1. Si sale mayor que 1, la cuenta está mal.

44

De una baraja española de 40 cartas se saca una. Calcula la probabilidad de que sea de oros y la de que sea un as.

Solución

Los casos posibles son las 40 cartas.

De oros hay 10 (una de cada número del palo), así que $P(\text{oros}) = 10/40 = \mathbf{1/4}$.

Ases hay 4, uno por palo, así que $P(\text{as}) = 4/40 = \mathbf{1/10}$.

Ojo. La baraja española tiene 40 cartas y 4 palos de 10. Con una baraja francesa de 52 cartas, la de un palo cualquiera saldría IGUAL (13 de 52 también es $1/4$), pero la del as sería $4/52 = 1/13$ en vez de $4/40 = 1/10$. Por eso el enunciado tiene que decir qué baraja es.

45

Un menú tiene 3 primeros, 4 segundos y 2 postres. ¿Cuántos menús distintos se pueden pedir?

Solución

Por cada primero se puede elegir cualquiera de los 4 segundos: $3 \cdot 4 = 12$ combinaciones de primero y segundo.

Y por cada una de esas 12 se puede elegir cualquiera de los 2 postres: $12 \cdot 2 = \mathbf{24 \text{ menús}}$.

Ojo. No se suman las opciones. Con $3 + 4 + 2$ saldrían 9, que es el número de platos distintos de la carta, no el de menús.

46

En una caja hay 10 bombillas, de las que 3 están fundidas. Se sacan dos sin reponer. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos estén fundidas?

Solución

Para la primera: 3 fundidas de 10 bombillas, así que la probabilidad es $3/10$.

Para la segunda, sabiendo que la primera estaba fundida: quedan 9 bombillas y 2 fundidas, así que la probabilidad es $2/9$.

Se multiplican: $3/10 \cdot 2/9 = 6/90$.

Simplificando entre 6: $\mathbf{1/15}$.

Ojo. La segunda fracción no es $3/10$ otra vez. Sin reposición cambian los dos números.

47

Con los mismos datos, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar dos bombillas al menos una esté bien?

Solución

«Al menos una bien» es el suceso contrario de «las dos fundidas», que ya se ha calculado: $1/15$.

Así que la probabilidad es $1 - 1/15 = \mathbf{14/15}$.

Ojo. Contar directamente «al menos una bien» obligaría a sumar tres casos que no se pisen: solo la primera bien ($7/10 \cdot 3/9 = 21/90$), solo la segunda bien ($3/10 \cdot 7/9 = 21/90$) y las dos bien ($7/10 \cdot 6/9 = 42/90$), que suman $84/90 = 14/15$. ■ No vale sumar «la primera bien» y «la segunda bien» tal cual: se solapan en «las dos bien» y saldría más de 1. Por el contrario sale en una línea, y esa es la razón de que exista la regla.