

Ejercicios de Matemáticas B de 4.º de ESO resueltos

48 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 14 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Números reales, intervalos y errores · Clasificar, intervalos y aproximar (**ejercicios 1, 2, 3**)

Radicales y exponente fraccionario · Operar, racionalizar y pasar a potencia (**ejercicios 4, 5, 6, 7**)

Logaritmos · Definición, propiedades y ecuaciones (**ejercicios 8, 9, 10, 11**)

Polinomios y fracciones algebraicas · Factorizar, simplificar y operar (**ejercicios 12, 13, 14, 15**)

Ecuaciones de 2.º grado, bicuadradas y con radicales · Fórmula, cambio de variable y comprobar (**ejercicios 16, 17, 18, 19**)

Sistemas no lineales · Sustitución y comprobar las dos (**ejercicios 20, 21, 22**)

Inecuaciones · De primer y segundo grado (**ejercicios 23, 24, 25**)

Progresiones aritméticas y geométricas · Término general y suma (**ejercicios 26, 27, 28**)

Trigonometría · Razones y triángulos rectángulos (**ejercicios 29, 30, 31, 32**)

Geometría analítica: vectores y recta · Vector, módulo y ecuación (**ejercicios 33, 34, 35**)

Funciones: cuadrática, exponencial y logarítmica · Vértice, cortes y crecimiento (**ejercicios 36, 37, 38, 39**)

Estadística: parámetros y datos agrupados · Media, mediana, moda y dispersión (**ejercicios 40, 41, 42**)

Combinatoria · Permutaciones, variaciones y combinaciones (**ejercicios 43, 44, 45**)

Probabilidad condicionada y total · Condicionada, sin reposición y total (**ejercicios 46, 47, 48**)

Material propio de solucionariomatematicas.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionariomatematicas.es

Qué entra y qué no. Entran los catorce bloques del índice, todos con ejercicios resueltos, y tres de ellos llevan su figura. Esta es la página de **Matemáticas B**, la opción más académica de 4.º: si tu asignatura es **Matemáticas A**, busca la página de 4.º A, porque **no es el mismo temario con menos dificultad**: allí entran las matemáticas financieras y la lectura crítica de gráficos estadísticos, y aquí entran los logaritmos, la geometría analítica, las inecuaciones y las ecuaciones con radicales, que allí no están. Esta página recoge además lo que la de 3.º de ESO dejó anunciado: la trigonometría, las inecuaciones, los logaritmos y el bloque de números reales con los intervalos y los errores. Lo que 3.º ya trata —polinomios, ecuaciones, sistemas, estadística y probabilidad— entra aquí un escalón más arriba: de factorizar a las fracciones algebraicas, de la ecuación de segundo grado a las bicuadradas y las que llevan radicales, de los sistemas lineales a los no lineales, de la desviación típica a los datos agrupados, y de la regla de Laplace a la probabilidad condicionada. **No entran**, por ser de Bachillerato: los límites, las derivadas, las integrales, las matrices, los determinantes, los números complejos ni los vectores en el espacio. Estos ejercicios no sustituyen al temario ni a los del libro.

Ejercicios de Matemáticas B de 4.º de ESO resueltos

Números reales, intervalos y errores

Lo que hay que saber

Los **racionales** se pueden escribir como una fracción de enteros; su expresión decimal es exacta o periódica. Los **irracionales**, no: su parte decimal es infinita y sin periodo. Los dos juntos son los **reales**.

△ Una raíz no es irracional por llevar el símbolo: lo es si su resultado NO se puede escribir como fracción de enteros. $\sqrt{36} = 6$ es racional; $\sqrt{3}$ no lo es. Y todo decimal periódico es racional, por largo que sea el periodo: $0,272727\dots$ es $3/11$.

Un **intervalo** se escribe con corchete si el extremo entra y con paréntesis si no entra. El infinito lleva paréntesis, porque no es un número al que se pueda llegar.

El **error absoluto** de una aproximación es la diferencia, en valor absoluto, entre el valor exacto y el aproximado. El **error relativo** es ese error dividido entre el valor exacto, y se suele dar en tanto por ciento.

△ El error relativo es el que dice si una aproximación es buena: equivocarse en 1 cm midiendo una habitación y midiendo un tornillo no es lo mismo.

- 1 Clasifica estos números en racionales e irracionales: 7 , $-3/4$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{2}$, $0,333\dots$ y π .

Solución

7 es racional: todo entero lo es ($7 = 7/1$).

$-3/4$ es racional: ya está escrito como fracción.

$\sqrt{9}$ es racional, y conviene calcularlo antes de decidir: $\sqrt{9} = 3$, que es entero. El símbolo de raíz no lo hace irracional.

$0,333\dots$ es racional: es periódico, y de hecho es la fracción $1/3$.

$\sqrt{2}$ y π son irracionales: sus decimales no se acaban ni se repiten con un periodo.

Ojo. $\sqrt{9}$ y $\sqrt{2}$ llevan el mismo símbolo y están en grupos distintos. Lo que decide es si el resultado se puede escribir como fracción de enteros, no cómo esté escrita la raíz.

- 2 Escribe en forma de intervalo: (a) los números que cumplen $x \geq -2$ y $x < 5$; (b) los que cumplen $|x| < 3$.

Solución

(a) El -2 entra, así que lleva corchete; el 5 no entra, así que lleva paréntesis.

El intervalo es $[-2, 5)$.

(b) $|x| < 3$ significa que x está a menos de 3 unidades del cero, por los dos lados: es decir, $-3 < x < 3$.

Ninguno de los dos extremos entra, así que el intervalo es $(-3, 3)$.

Ojo. $|x| < 3$ no es solo $x < 3$. Si se olvida el lado negativo se cuelean todos los números menores que -3 , que no cumplen la condición.

3

Redondea 3,7846 a las centésimas y calcula el error absoluto y el error relativo de esa aproximación.

Solución

Para redondear a las centésimas se mira la cifra siguiente, que es un 4: como es menor que 5, la centésima se queda igual. Queda **3,78**.

El error absoluto es la diferencia en valor absoluto: $3,7846 - 3,78 = 0,0046$.

El error relativo es ese error dividido entre el valor exacto: $0,0046 : 3,7846 = 0,001215\dots$, es decir, aproximadamente **0,12 %**.

Ojo. El error relativo se divide entre el valor EXACTO, no entre el aproximado. Con estos números la diferencia es pequeña, pero la definición es esa.

Radicales y exponente fraccionario

Lo que hay que saber

Una raíz se puede escribir como potencia de **exponente fraccionario**: el índice de la raíz va en el denominador y el exponente del radicando, en el numerador.

Para **extraer factores** de una raíz cuadrada se descompone el radicando y sale fuera un factor por cada par de factores iguales.

⚠ Solo se pueden **sumar o restar** radicales **semejantes**, es decir, con el mismo índice y el mismo radicando. $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ no se suman.

Racionalizar es quitar la raíz del denominador. Si el denominador es una sola raíz, se multiplica arriba y abajo por esa raíz; si es una suma o una resta, por su **conjugado** (la misma expresión con el signo cambiado).

El conjugado funciona porque $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, y así la raíz desaparece al elevarse al cuadrado.

4

Escribe como potencia de exponente fraccionario: $\sqrt{x}$ y la raíz cúbica de x^2 . Después calcula $8^{2/3}$.

Solución

En $\sqrt{x}$ el índice es 2 y el exponente de la x es 1, así que $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

En la raíz cúbica de x^2 el índice es 3 y el exponente es 2, así que es $x^{2/3}$.

Para $8^{2/3}$ conviene hacer primero la raíz: es la raíz cúbica de 8, que es 2, elevada al cuadrado. $2^2 = 4$.

Se puede comprobar por el otro camino: $8 = 2^3$, así que $8^{2/3} = 2^{3 \cdot 2/3} = 2^2 = 4$.

5 Calcula: $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8}$.

Solución

No se suman tal cual: hay que extraer factores para ver si son semejantes.

$\sqrt{50}$: como $50 = 25 \cdot 2$ y $\sqrt{25} = 5$, queda $5\sqrt{2}$.

$\sqrt{18}$: como $18 = 9 \cdot 2$ y $\sqrt{9} = 3$, queda $3\sqrt{2}$.

$\sqrt{8}$: como $8 = 4 \cdot 2$ y $\sqrt{4} = 2$, queda $2\sqrt{2}$.

Ahora los tres son semejantes (todos con $\sqrt{2}$), así que se operan los números de delante: $5 + 3 - 2 = 6$. El resultado es $6\sqrt{2}$.

Ojo. $\sqrt{50} + \sqrt{18}$ no es $\sqrt{68}$. Las raíces no se suman sumando los radicandos; hay que extraer factores y ver si son semejantes.

6 Racionaliza: $6/\sqrt{3}$ y $2/(\sqrt{5} - 1)$.

Solución

En la primera el denominador es una sola raíz, así que se multiplica arriba y abajo por

$\sqrt{3}$: $(6 \cdot \sqrt{3})/(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) = (6\sqrt{3})/3$.

Se simplifica dividiendo entre 3: $2\sqrt{3}$.

En la segunda el denominador es una resta, así que se multiplica por el conjugado, $\sqrt{5} + 1$: el denominador queda $(\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4$.

El numerador queda $2(\sqrt{5} + 1)$, así que la fracción es $2(\sqrt{5} + 1)/4$, y simplificando entre 2 queda $(\sqrt{5} + 1)/2$.

Ojo. Con una resta en el denominador hay que usar el conjugado, no la misma expresión: multiplicar por $\sqrt{5} - 1$ dejaría otra raíz abajo.

7 Calcula $16^{3/4}$ y $(\sqrt{2})^4$.

Solución

$16^{3/4}$ es la raíz cuarta de 16, elevada al cubo. La raíz cuarta de 16 es 2, porque $2^4 = 16$.

$2^3 = 8$.

$(\sqrt{2})^4$: como $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, al elevarlo a 4 se multiplican los exponentes: $1/2 \cdot 4 = 2$.

Así que $(\sqrt{2})^4 = 2^2 = 4$.

Logaritmos

Lo que hay que saber

El **logaritmo en base a** de un número es el exponente al que hay que elevar la base para obtener ese número. Es la operación contraria de la potencia.

Cuando no se escribe la base se entiende que es **10** (logaritmo decimal).

Las tres propiedades: el logaritmo de un **producto** es la suma de los logaritmos; el de un **cociente**, la resta; y el de una **potencia**, el exponente por el logaritmo.

⚠ No existe el logaritmo de un número **negativo** ni del **cero**, porque ninguna potencia de una base positiva da eso.

El **cambio de base** permite calcular cualquier logaritmo con los que se tengan: el logaritmo en base a de x es el logaritmo de x dividido entre el logaritmo de a, los dos en la misma base nueva.

8 Calcula, por la definición: $\log_2 32$, $\log 1000$ y $\log_5 (1/25)$.

Solución

$\log_2 32$ pregunta a qué hay que elevar 2 para obtener 32. Como $2^5 = 32$, la respuesta es **5**.

$\log 1000$ es en base 10. Como $10^3 = 1000$, la respuesta es **3**.

$\log_5 (1/25)$ pregunta a qué hay que elevar 5 para obtener 1/25. Como $5^2 = 25$, para obtener 1/25 hace falta el exponente negativo: $5^{-2} = 1/25$, así que la respuesta es **-2**.

Ojo. Que el resultado del logaritmo sea negativo no tiene nada que ver con que el número sea negativo. 1/25 es positivo; lo negativo es el exponente.

9 Calcula sin calculadora, usando las propiedades: $\log 20 + \log 5$ y $\log 300 - \log 3$.

Solución

La suma de logaritmos es el logaritmo del producto: $\log 20 + \log 5 = \log (20 \cdot 5) = \log 100$.

Y $\log 100 = 2$, porque $10^2 = 100$.

La resta es el logaritmo del cociente: $\log 300 - \log 3 = \log (300 : 3) = \log 100$.

Que también es **2**.

Ojo. $\log 20 + \log 5$ no es $\log 25$. La suma de logaritmos es el logaritmo del PRODUCTO, no el de la suma.

10 Resuelve: $2^x = 64$ y $\log_3 x = 4$.

Solución

En la primera hay que encontrar el exponente, así que se toma el logaritmo en base 2 de los dos lados: $x = \log_2 64$.

Como $2^6 = 64$, queda $x = 6$.

En la segunda la incógnita está dentro del logaritmo, así que se aplica la definición: si $\log_3 x = 4$, entonces $x = 3^4$.

$3^4 = 81$.

Las dos se comprueban: $2^6 = 64$ y $\log_3 81 = 4$, porque $3^4 = 81$.

11 Calcula $\log_4 64$ por cambio de base y comprueba el resultado. Después calcula $\log_2 8 + \log_2 4$.

Solución

Por cambio de base a base 2: $\log_4 64 = \log_2 64 : \log_2 4$.

$\log_2 64 = 6$ (porque $2^6 = 64$) y $\log_2 4 = 2$ (porque $2^2 = 4$), así que queda $6 : 2 = 3$.

Se comprueba por la definición: $4^3 = 64$. Correcto.

Para la segunda: $\log_2 8 = 3$ y $\log_2 4 = 2$, así que la suma es **5**.

Y cuadra con la propiedad del producto: $8 \cdot 4 = 32$ y $\log_2 32 = 5$, porque $2^5 = 32$.

Polinomios y fracciones algebraicas

Lo que hay que saber

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto. El primer paso es sacar **factor común**; después se buscan identidades notables y, si no las hay, raíces.

La **regla de Ruffini** divide un polinomio entre $(x - a)$. Si el resto sale **0**, entonces a es raíz y $(x - a)$ es un factor.

⚠ Las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros hay que buscarlas entre los **divisores del término independiente**; probar otros números es perder el tiempo.

Una **fracción algebraica** se simplifica factorizando arriba y abajo y quitando los factores comunes. ▪ Se tachan factores, no sumandos.

⚠ Al simplificar hay que decir qué valores de x quedan excluidos: los que anulan el denominador original.

12 Factoriza $x^3 - 4x$ y di cuáles son sus raíces.

Solución

Lo primero es sacar factor común: en los dos sumandos hay una x , así que $x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$.

Lo de dentro del paréntesis es una diferencia de cuadrados: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$.

La factorización completa es **$x(x + 2)(x - 2)$** .

Las raíces son los valores que anulan cada factor: **0, -2 y 2**.

Ojo. Hay que sacar el factor común antes de nada. Si se empieza buscando raíces una a una se llega al mismo sitio, pero con dos pasadas de Ruffini en vez de una línea.

13 Divide $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ entre $(x - 1)$ por Ruffini y factoriza el polinomio entero.

Solución

Se escriben los coeficientes: 1, -2, -5 y 6, y se divide entre $x - 1$, así que se usa el 1.

Se baja el 1. Después: $1 \cdot 1 = 1$, y $-2 + 1 = -1$. Luego $-1 \cdot 1 = -1$, y $-5 - 1 = -6$. Y por último $-6 \cdot 1 = -6$, y $6 - 6 = 0$.

El resto es 0, así que 1 es raíz y el cociente es $x^2 - x - 6$.

Ese cociente se factoriza buscando sus RAÍCES: dos números que sumen 1 (el opuesto del coeficiente de x) y multipliquen -6. Son 3 y -2, así que $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$: cada raíz entra con el signo cambiado.

La factorización completa es **$(x - 1)(x - 3)(x + 2)$** .

14 Simplifica la fracción algebraica $(x^2 - 9)/(x^2 + 6x + 9)$ e indica qué valores de x quedan excluidos.

Solución

Se factoriza el numerador: $x^2 - 9$ es una diferencia de cuadrados, $(x + 3)(x - 3)$.

Y el denominador: $x^2 + 6x + 9$ es el cuadrado de una suma, $(x + 3)^2$.

Se tacha el factor común $(x + 3)$, que está arriba una vez y abajo dos: queda $(x - 3)/(x + 3)$.

El valor excluido es el que anula el denominador original: $x = -3$.

Ojo. No se puede tachar el 9 de arriba con el 9 de abajo. Se tachan factores de un producto, y ahí el 9 es un sumando.

15 Opera y simplifica: $1/(x - 1) + 1/(x + 1)$.

Solución

El denominador común es el producto de los dos: $(x - 1)(x + 1)$.

La primera fracción se multiplica arriba y abajo por $(x + 1)$ y la segunda por $(x - 1)$: queda $(x + 1)/[(x - 1)(x + 1)] + (x - 1)/[(x - 1)(x + 1)]$.

Se suman los numeradores: $(x + 1) + (x - 1) = 2x$.

Y el denominador, por ser suma por diferencia, es $x^2 - 1$.

El resultado es $2x/(x^2 - 1)$.

Ecuaciones de 2.º grado, bicuadradas y con radicales

Lo que hay que saber

La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ se resuelve con la fórmula general: menos b , más o menos la raíz de $b^2 - 4ac$, todo dividido entre $2a$.

Lo de dentro de la raíz es el **discriminante**. Si es positivo hay dos soluciones; si es cero, una (doble); y si es negativo, ninguna real.

Una **bicuadrada** (solo con potencias pares de x : x^4 , x^2 y el término independiente) se resuelve con el **cambio de variable** $t = x^2$: queda una de segundo grado. $\triangle$ Al deshacer el cambio, cada t positiva da **dos** valores de x ; la $t = 0$ da una sola, $x = 0$; y las t negativas no dan ninguna.

En una ecuación **con radicales** se aísla la raíz y se elevan al cuadrado los dos lados.

Al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones **falsas**, así que en estas ecuaciones comprobar no es opcional: hay que sustituir todas en la ecuación original y descartar las que no la cumplan.

16 Resuelve $x^2 - 5x + 6 = 0$ y comprueba las soluciones.

Solución

Aquí $a = 1$, $b = -5$ y $c = 6$.

El discriminante es $b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$, que es positivo: habrá dos soluciones.

La fórmula da $(5 \pm 1) : 2$, así que las soluciones son $(5 + 1) : 2 = 3$ y $(5 - 1) : 2 = 2$.

Comprobación con $x = 3$: $9 - 15 + 6 = 0$. Correcto.

Comprobación con $x = 2$: $4 - 10 + 6 = 0$. Correcto.

17 Resuelve la bicuadrada $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Solución

Se hace el cambio $t = x^2$, y la ecuación queda $t^2 - 13t + 36 = 0$.

El discriminante es $169 - 144 = 25$, y su raíz es 5.

Las soluciones en t son $(13 + 5) : 2 = 9$ y $(13 - 5) : 2 = 4$.

Ahora se deshace el cambio. De $t = 9$: $x^2 = 9$, así que $x = 3$ y $x = -3$. De $t = 4$: $x^2 = 4$, así que $x = 2$ y $x = -2$.

Las cuatro soluciones son **3, -3, 2 y -2**.

Ojo. ESTA bicuadrada tiene cuatro soluciones, no dos. Quedarse en $t = 9$ y $t = 4$ es dejar el ejercicio a medias: esos son valores de x^2 , no de x .

18 Resuelve $\sqrt{x + 7} = x - 5$ y comprueba.

Solución

La raíz ya está aislada, así que se elevan al cuadrado los dos lados: $x + 7 = (x - 5)^2$.

Se desarrolla el cuadrado: $x + 7 = x^2 - 10x + 25$.

Se pasa todo a un lado: $x^2 - 11x + 18 = 0$.

El discriminante es $121 - 72 = 49$, y su raíz es 7, así que las candidatas son $(11 + 7) : 2 = 9$ y $(11 - 7) : 2 = 2$.

Comprobación con $x = 9$: $\sqrt{16} = 4$ y $9 - 5 = 4$. **Vale.**

Comprobación con $x = 2$: $\sqrt{9} = 3$ y $2 - 5 = -3$. No vale, porque una raíz cuadrada no da un número negativo.

La única solución es **$x = 9$** .

Ojo. El 2 sale de la ecuación elevada al cuadrado, no de la original. Es una solución falsa, y por eso en estas ecuaciones la comprobación no es un extra.

19 Sin resolverlas, di cuántas soluciones reales tienen $x^2 - 6x + 9 = 0$ y $x^2 + x + 1 = 0$.

Solución

Basta con el discriminante.

En la primera: $36 - 36 = 0$, así que tiene **una sola solución** (doble). Hallarla no hace falta: lo que se pedía es cuántas hay.

En la segunda: $1 - 4 = -3$, que es negativo, así que **no tiene ninguna solución real**.

Ojo. «ninguna solución real» no es lo mismo que «la ecuación está mal». Simplemente su parábola no corta al eje de las x .

Sistemas no lineales

Lo que hay que saber

Un sistema es **no lineal** cuando alguna de sus ecuaciones no es de primer grado: lleva cuadrados, productos de incógnitas o raíces.

El método que mejor funciona aquí es la **sustitución**: se despeja una incógnita en la ecuación más sencilla (la lineal, si la hay) y se lleva a la otra.

△ Al sustituir suele quedar una ecuación de segundo grado, así que lo normal es que haya **dos parejas** de soluciones, no una.

Cada valor de una incógnita **arrastra el suyo** de la otra: las soluciones van emparejadas y no se mezclan.

La comprobación se hace en **las dos ecuaciones y con las dos parejas**. Y si el problema tiene contexto (medidas, cantidades), hay que mirar además si alguna pareja no vale por no tener sentido.

20 Resuelve el sistema: $x + y = 5$; $x^2 + y^2 = 13$.

Solución

Se despeja en la lineal: $y = 5 - x$.

Se sustituye en la segunda: $x^2 + (5 - x)^2 = 13$.

Se desarrolla el cuadrado: $x^2 + 25 - 10x + x^2 = 13$, es decir $2x^2 - 10x + 12 = 0$.

Se divide todo entre 2: $x^2 - 5x + 6 = 0$, cuyas soluciones son 3 y 2.

Cada una arrastra la suya: si $x = 3$, $y = 5 - 3 = 2$; si $x = 2$, $y = 5 - 2 = 3$.

Las soluciones son **(3, 2) y (2, 3)**.

Comprobación de la primera: $3 + 2 = 5$ y $9 + 4 = 13$. Y de la segunda: $2 + 3 = 5$ y $4 + 9 = 13$. Las dos parejas cumplen las dos ecuaciones.

21 Resuelve: $x \cdot y = 12$; $x - y = 1$.

Solución

Se despeja en la lineal: $x = y + 1$.

Se sustituye en la primera: $(y + 1) \cdot y = 12$, es decir $y^2 + y - 12 = 0$.

El discriminante es $1 + 48 = 49$, y su raíz es 7, así que $y = (-1 + 7) : 2 = 3$ e $y = (-1 - 7) : 2 = -4$.

Cada una arrastra la suya: si $y = 3$, $x = 4$; si $y = -4$, $x = -3$.

Las soluciones son **(4, 3) y (-3, -4)**.

Comprobación de la primera pareja: $4 \cdot 3 = 12$ y $4 - 3 = 1$. Y de la segunda: $(-3) \cdot (-4) = 12$ y $-3 - (-4) = 1$. Las dos se cumplen.

Ojo. La pareja con los dos negativos es una solución de verdad, no un descarte. Aquí no hay contexto que la impida; en un problema de medidas habría que mirarlo.

22 Un rectángulo tiene 34 cm de perímetro y 60 cm² de área. Calcula sus lados.

Solución

Se llaman x e y a los lados. El perímetro: $2(x + y) = 34$, así que $x + y = 17$.

El área: $x \cdot y = 60$.

Se despeja $y = 17 - x$ y se sustituye: $x(17 - x) = 60$, es decir $x^2 - 17x + 60 = 0$.

El discriminante es $289 - 240 = 49$, y su raíz es 7, así que $x = (17 + 7) : 2 = 12$ y $x = (17 - 7) : 2 = 5$.

Las dos parejas son (12, 5) y (5, 12), que son **el mismo rectángulo**: sus lados miden **12 cm y 5 cm**.

Comprobación: $2(12 + 5) = 34$ cm de perímetro y $12 \cdot 5 = 60$ cm² de área.

Inecuaciones

Lo que hay que saber

Una **inecuación** se resuelve casi igual que una ecuación: lo que está sumando pasa restando y lo que está multiplicando pasa dividiendo.

La diferencia que lo cambia todo: al multiplicar o dividir los dos lados por un número **negativo**, hay que **dar la vuelta al signo** de la desigualdad.

La solución no es un número: es un **conjunto**, y se escribe como intervalo.

Una inecuación de **segundo grado** se resuelve hallando primero las raíces del polinomio; esas raíces parten la recta en tramos, y en cada tramo el polinomio tiene un signo constante.

⚠ Para saber el signo de cada tramo basta con probar **un** número de dentro; no hace falta probar varios.

23 Resuelve $3x - 5 < 7$ y escribe la solución como intervalo.

Solución

El 5 está restando, así que pasa sumando: $3x < 12$.

El 3 está multiplicando, así que pasa dividiendo. Es positivo, así que el signo no cambia: $x < 4$.

La solución es **$(-\infty, 4)$** .

Se comprueba con un número de dentro, por ejemplo el 0: $3 \cdot 0 - 5 = -5$, que es menor que 7. Correcto.

24 Resuelve $-2x + 1 \geq 9$.

Solución

El 1 pasa restando: $-2x \geq 8$.

Ahora hay que dividir entre -2, que es **negativo**, así que la desigualdad se da la vuelta: $x \leq -4$.

La solución es **$(-\infty, -4]$** , y el -4 entra porque la desigualdad no es estricta.

Ojo. Sin dar la vuelta al signo saldría $x \geq -4$, que son todos los números que **NO** cumplen la desigualdad, más el propio -4, que sí la cumple ($-2 \cdot (-4) + 1 = 9$, y 9 sí es mayor o igual que 9). Se comprueba con el -5: $-2 \cdot (-5) + 1 = 11$, que sí es mayor o igual que 9.

25 Resuelve $x^2 - x - 6 > 0$.

Solución

Primero las raíces de $x^2 - x - 6 = 0$: dos números que sumen 1 y multipliquen -6 son 3 y -2 , así que el polinomio es $(x - 3)(x + 2)$ y las raíces son 3 y -2 .

Esas raíces parten la recta en tres tramos: menores que -2 , entre -2 y 3, y mayores que 3.

Se prueba un número de cada tramo. Con $x = -3$: $9 + 3 - 6 = 6$, positivo. Con $x = 0$: -6 , negativo. Con $x = 4$: $16 - 4 - 6 = 6$, positivo.

Como se piden los valores en que es mayor que 0, la solución son el primero y el tercero:
 $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

Ojo. Las raíces no entran, porque ahí el polinomio vale 0 y se pedía estrictamente mayor que 0.

Progresiones aritméticas y geométricas

Lo que hay que saber

En una progresión **aritmética** cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad fija, la **diferencia** d . Su término general es $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

En una progresión **geométrica** cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija, la **razón** r . Su término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

△ En las dos fórmulas el exponente y el factor son **$n - 1$** , no n : desde el primer término hasta el n -ésimo hay $n - 1$ pasos.

La **suma** de los n primeros términos de una aritmética es $(a_1 + a_n) \cdot n$, dividido entre 2.

La de una geométrica es $a_1(r^n - 1)$ dividido entre $(r - 1)$.

26 En una progresión aritmética el primer término es 5 y la diferencia es 3. Calcula el término 20 y la suma de los 20 primeros.

Solución

El término general: $a_{20} = 5 + (20 - 1) \cdot 3 = 5 + 19 \cdot 3$.

$19 \cdot 3 = 57$, así que $a_{20} = 5 + 57 = 62$.

La suma: $(5 + 62) \cdot 20 : 2$.

$5 + 62 = 67$, y $67 \cdot 20 = 1340$, que entre 2 es **670**.

Ojo. El factor es 19, no 20. Del término 1 al 20 hay 19 saltos; con 20 saldría 65, que es el término 21.

27 En una progresión geométrica el primer término es 3 y la razón es 2. Calcula el término 8 y la suma de los 8 primeros.

Solución

El término general: $a_8 = 3 \cdot 2^{8-1} = 3 \cdot 2^7$.

$2^7 = 128$, así que $a_8 = 3 \cdot 128 = 384$.

La suma: $3 \cdot (2^8 - 1) : (2 - 1)$.

$2^8 = 256$, así que queda $3 \cdot 255 : 1 = 765$.

28

Di de qué tipo es cada progresión y calcula el término que se pide: (a) 2, 6, 18, 54, ... el término 6; (b) 7, 11, 15, ... el término 10.

Solución

(a) Se mira si la diferencia es constante: $6 - 2 = 4$ pero $18 - 6 = 12$, así que no es aritmética. Se mira el cociente: $6 : 2 = 3$, $18 : 6 = 3$ y $54 : 18 = 3$, así que es **geométrica de razón 3**.

$a_6 = 2 \cdot 3^5$. Como $3^5 = 243$, queda $2 \cdot 243 = 486$.

(b) $11 - 7 = 4$ y $15 - 11 = 4$, así que es **aritmética de diferencia 4**.

$a_{10} = 7 + 9 \cdot 4 = 7 + 36 = 43$.

Ojo. Para decidir el tipo hay que mirar al menos dos diferencias o dos cocientes. Con un solo par, 2 y 6 valdrían tanto para $d = 4$ como para $r = 3$.

Trigonometría

Lo que hay que saber

En un triángulo rectángulo, el **seno** de un ángulo agudo es el cateto opuesto dividido entre la hipotenusa; el **coseno**, el cateto contiguo entre la hipotenusa; y la **tangente**, el opuesto entre el contiguo.

△ «Opuesto» y «contiguo» se deciden **respecto al ángulo** del que se habla: el mismo cateto es opuesto para un ángulo y contiguo para el otro.

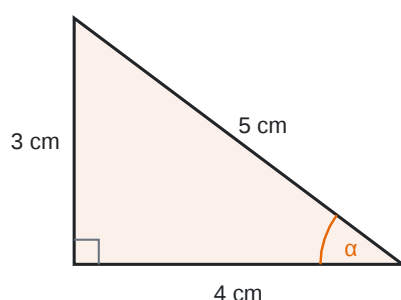
La **relación fundamental** dice que el seno al cuadrado más el coseno al cuadrado vale 1, sea cual sea el ángulo. Sirve para hallar una razón a partir de otra.

Y la tangente es el seno dividido entre el coseno.

Hay tres ángulos cuyas razones conviene saber de memoria: 30° , 45° y 60° . El seno de 30° es $1/2$ y el coseno de 60° también; el coseno de 30° y el seno de 60° valen $(\sqrt{3})/2$; y en 45° el seno y el coseno son iguales, $(\sqrt{2})/2$.

29

Calcula el seno, el coseno y la tangente del ángulo α del triángulo que aparece en el dibujo, cuyos catetos miden 4 cm y 3 cm y cuya hipotenusa mide 5 cm.



Triángulo rectángulo dibujado a escala. El ángulo recto está abajo a la izquierda, marcado con el cuadradito gris. Los catetos miden 4 cm (abajo) y 3 cm (a la izquierda), y la hipotenusa, 5 cm. El arco naranja de la derecha marca el ángulo α , que está en el vértice de la derecha.

Solución

El ángulo α está abajo a la derecha. Respecto a él, el cateto **opuesto** es el de 3 cm (el de la izquierda, el que no lo toca) y el **contiguo** es el de 4 cm.

$\text{sen } \alpha = \text{opuesto entre hipotenusa} = 3/5 = 0,6$.

$\cos \alpha = \text{contiguo entre hipotenusa} = 4/5 = \mathbf{0,8}$.

$\text{tg } \alpha = \text{opuesto entre contiguo} = 3/4 = \mathbf{0,75}$.

Se comprueba con la relación fundamental: $0,6^2 + 0,8^2 = 0,36 + 0,64 = 1$. Correcto.

30

De un ángulo agudo se sabe que su seno vale 0,28. Calcula su coseno y su tangente sin hallar el ángulo.

Solución

Por la relación fundamental: $\cos^2 = 1 - \text{sen}^2$.

$\text{sen}^2 = 0,28^2 = 0,0784$, así que $\cos^2 = 1 - 0,0784 = 0,9216$.

El coseno es la raíz de 0,9216, que es **0,96**. Se toma la positiva porque el ángulo es agudo; se comprueba elevando: $0,96^2 = 0,9216$.

La tangente es el seno entre el coseno: $0,28 : 0,96 = 28/96 = \mathbf{7/24}$, que es 0,29166... con infinitas cifras, así que se deja en fracción.

Ojo. El coseno no es $1 - 0,28 = 0,72$. La relación fundamental es con los CUADRADOS, y restando sin elevar saldría 0,72, que no cumple $0,28^2 + 0,72^2 = 1$ (da 0,5968).

31

En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 30° y la hipotenusa, 10 cm. Calcula los dos catetos.

Solución

El cateto opuesto al ángulo de 30° sale del seno: $\text{opuesto} = \text{hipotenusa} \cdot \text{sen } 30^\circ$.

Como $\text{sen } 30^\circ = 1/2$, queda $10 \cdot 1/2 = \mathbf{5 \text{ cm}}$.

El cateto contiguo sale del coseno: $\text{contiguo} = \text{hipotenusa} \cdot \cos 30^\circ$.

Como $\cos 30^\circ = (\sqrt{3})/2$, queda $10 \cdot (\sqrt{3})/2 = \mathbf{5\sqrt{3} \text{ cm}}$, que son aproximadamente 8,66 cm.

Se comprueba con Pitágoras: $5^2 + (5\sqrt{3})^2 = 25 + 75 = 100$, que es 10^2 . Correcto.

32

Una escalera de 6 m está apoyada en una pared formando un ángulo de 60° con el suelo. ¿A qué altura llega y a qué distancia de la pared está su base?

Solución

La escalera es la hipotenusa; la altura es el cateto opuesto al ángulo de 60° y la distancia a la pared es el contiguo.

Altura = $6 \cdot \text{sen } 60^\circ = 6 \cdot (\sqrt{3})/2 = \mathbf{3\sqrt{3} \text{ m}}$, aproximadamente 5,20 m.

Distancia = $6 \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot 1/2 = \mathbf{3 \text{ m}}$.

Ojo. El ángulo se mide con el SUELO, así que la altura va con el seno y la distancia con el coseno. Si el ángulo se diera con la pared, los dos se cambiarían.

Geometría analítica: vectores y recta

Lo que hay que saber

El **vector** que va de A a B se calcula restando: las coordenadas de B menos las de A, cada una con la suya.

El **módulo** de un vector es su longitud, y se calcula con Pitágoras: la raíz de la suma de los cuadrados de sus componentes.

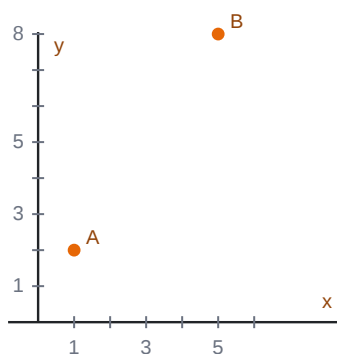
La **pendiente** de la recta que pasa por dos puntos es lo que aumenta la y dividido entre lo que aumenta la x.

Con un punto y la pendiente, la recta es $y - y_0 = m(x - x_0)$.

⚠ Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente, y **perpendiculares** si el producto de sus pendientes es -1 (es decir, una es la inversa de la otra con el signo cambiado).

33

Calcula el vector que va de A a B y su módulo, con los puntos A(1, 2) y B(5, 8) que están marcados en el dibujo.



Ejes de coordenadas a escala, con las marcas de una en una y rotuladas de dos en dos: en el eje x están escritas 1, 3 y 5, y en el de la y, 1, 3, 5 y además el 8. Los dos puntos naranjas son los del enunciado: A está en el (1, 2) y B, en el (5, 8). El dibujo no trae trazado ningún vector ni ninguna recta.

Solución

El vector es B menos A, componente a componente: $(5 - 1, 8 - 2)$.

Queda el vector **(4, 6)**.

El módulo es la raíz de la suma de los cuadrados: $\sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$.

Se extraen factores: $52 = 4 \cdot 13$, así que $\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$, aproximadamente 7,21.

Ojo. El vector es $B - A$, en ese orden. Restando al revés saldría $(-4, -6)$, que es el vector que va de B a A: el mismo módulo, pero el sentido contrario.

34 Halla la ecuación de la recta que pasa por A(1, 2) y B(5, 8).

Solución

Primero la pendiente: lo que aumenta la y entre lo que aumenta la x, es decir $(8 - 2) : (5 - 1) = 6 : 4 = 3/2$.

Con el punto A y esa pendiente: $y - 2 = 3/2 \cdot (x - 1)$.

Se quita el paréntesis: $y - 2 = 3/2 x - 3/2$.

Y se despeja la y: $y = 3/2 x - 3/2 + 2 = 3/2 x + 1/2$.

Se comprueba con B: $3/2 \cdot 5 + 1/2 = 15/2 + 1/2 = 16/2 = 8$. Correcto.

35 Dada la recta $y = 2x - 3$, halla la paralela y la perpendicular a ella que pasan por el punto (1, 4).

Solución

La pendiente de la recta dada es 2.

La **paralela** tiene la misma pendiente: $y - 4 = 2(x - 1)$, así que $y = 2x - 2 + 4$, es decir, **$y = 2x + 2$** .

La **perpendicular** tiene pendiente $-1/2$, porque $2 \cdot (-1/2) = -1$.

Queda $y - 4 = -1/2 (x - 1)$, es decir $y = -1/2 x + 1/2 + 4$, es decir, **$y = -1/2 x + 9/2$** .

Las dos se comprueban en el punto: $2 \cdot 1 + 2 = 4$ y $-1/2 \cdot 1 + 9/2 = 8/2 = 4$. Correcto.

Funciones: cuadrática, exponencial y logarítmica

Lo que hay que saber

La gráfica de una **función cuadrática** $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola. Si a es positivo se abre hacia arriba y si es negativo, hacia abajo.

La primera coordenada del **vértice** es $-b$ dividido entre $2a$; la segunda se obtiene sustituyendo ese valor en la función.

Los **cortes con el eje x** son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, y el corte con el eje y es el punto (0, c).

La **exponencial** $y = a^x$ (con $a > 1$) crece cada vez más deprisa. $\triangle$ No corta al eje x: no llega a valer 0. Para saber por dónde corta una función al eje de la y, se calcula su valor en $x = 0$.

La **logarítmica** $y = \log_a x$ (también con $a > 1$) solo existe para x positivos, y su gráfica sube cada vez más despacio. No corta al eje y, porque en $x = 0$ no está definida; y corta al eje x en el punto (1, 0), porque $\log_a 1 = 0$ para cualquier a.

36 Dada la parábola $y = x^2 - 4x + 3$, halla su vértice y sus cortes con los dos ejes, y di hacia dónde se abre.

Solución

Como $a = 1$ es positivo, la parábola se abre **hacia arriba**.

La primera coordenada del vértice es $-b : 2a = 4 : 2 = 2$.

La segunda se obtiene sustituyendo: $2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$. El vértice es **(2, -1)**.

Los cortes con el eje x salen de $x^2 - 4x + 3 = 0$: el discriminante es $16 - 12 = 4$ y su raíz es 2, así que $x = (4 + 2) : 2 = 3$ y $x = (4 - 2) : 2 = 1$. Son los puntos **(1, 0) y (3, 0)**.

El corte con el eje y es (0, c), es decir **(0, 3)**.

37 Haz una tabla de valores de $y = 2^x$ para $x = -1, 0, 1, 2$ y 3 , y di por qué punto corta al eje de la y .

Solución

Para $x = -1$: $2^{-1} = 1/2$.

Para $x = 0$: $2^0 = 1$. Para $x = 1$: 2 . Para $x = 2$: 4 . Para $x = 3$: 8 .

La tabla es $(-1, 1/2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ y $(3, 8)$.

Corta al eje de la y en el punto **(0, 1)**, como todas las de la forma $y = a^x$.

Ojo. Los valores no llegan a 0 ni bajan de él, por muy negativa que sea la x : se acercan al eje sin tocarlo.

38 Un cultivo tiene 1000 bacterias y se duplica cada hora. ¿Cuántas habrá a las 5 horas? ¿Cuánto tardará en llegar a 64 000?

Solución

Cada hora se multiplica por 2, así que a las n horas hay $1000 \cdot 2^n$.

A las 5 horas: $2^5 = 32$, así que hay $1000 \cdot 32 = \mathbf{32\ 000}$ bacterias.

Para llegar a 64 000 hay que resolver $1000 \cdot 2^n = 64\ 000$, es decir $2^n = 64$.

Como $2^6 = 64$, tardará **6 horas**.

Ojo. De 32 000 a 64 000 va solo una hora más, aunque la diferencia sea de 32 000 bacterias. Al **DUPLICARSE**, cada hora se suma más de lo que se había crecido en todas las anteriores juntas: el salto de 32 000 es mayor que las 31 000 bacterias que habían aparecido en las cinco horas previas.

- Esto no vale para cualquier crecimiento exponencial: si en vez de duplicarse creciera un 50 % cada hora (es decir, se multiplicara por 1,5), los saltos serían 500, 750 y 1 125, y 1 125 ya no llega a $500 + 750$.

39 Haz una tabla de $y = \log_2 x$ para $x = 1, 2, 4$ y 8 , y explica qué relación tiene con la función del ejercicio anterior.

Solución

$\log_2 1 = 0$, porque $2^0 = 1$.

$\log_2 2 = 1$; $\log_2 4 = 2$; $\log_2 8 = 3$.

La tabla es $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(4, 2)$ y $(8, 3)$.

Son cuatro de los cinco pares de $y = 2^x$, pero **con las coordenadas cambiadas de sitio**: donde la exponencial tenía $(3, 8)$, la logarítmica tiene $(8, 3)$. Por eso se dice que una es la **inversa** de la otra.

Estadística: parámetros y datos agrupados

Lo que hay que saber

La **media** es la suma de los datos entre su número. La **moda** es el valor que más se repite. La **mediana** es el valor central una vez ordenados y, si el número de datos es **par**, la media de los dos centrales.

⚠ Sin ordenar no se puede hallar la mediana, y ordenar mal es el camino más corto a equivocarse en ella.

La **varianza** es la media de los cuadrados de las diferencias con la media, y la **desviación típica** es su raíz cuadrada.

La desviación típica dice cómo de juntos están los datos: cuanto mayor es, más separados. Va en las mismas unidades que los datos, y por eso se usa más que la varianza.

Con **datos agrupados** en intervalos no se conocen los valores uno a uno, así que cada intervalo se representa por su **marca de clase**, que es el punto medio.

40 Calcula la media, la mediana y la moda de estos ocho datos: 4, 7, 5, 8, 6, 7, 9 y 4.

Solución

La suma es $4 + 7 + 5 + 8 + 6 + 7 + 9 + 4 = 50$, y son 8 datos, así que la media es $50 : 8 = 6,25$.

Para la mediana se ordenan: 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9. Son 8 datos, un número par, así que los centrales son el cuarto y el quinto: 6 y 7.

La mediana es su media: $(6 + 7) : 2 = 6,5$.

Para la moda se cuenta: el 4 sale dos veces y el 7 también; los demás, una. Hay **dos modas, 4 y 7**: la distribución es bimodal.

Ojo. Que haya dos modas no es un fallo de los datos ni hay que elegir una. Lo que sí sería un error es dar como moda el valor más grande de los que se repiten sin más motivo.

41 Calcula la desviación típica de: 2, 4, 4, 4, 5, 5, 7 y 9.

Solución

Primero la media: la suma es 40 y son 8 datos, así que la media es $40 : 8 = 5$.

Ahora las diferencias con la media, al cuadrado: $(2 - 5)^2 = 9$; $(4 - 5)^2 = 1$, y hay tres cuatros, así que $1 + 1 + 1 = 3$; $(5 - 5)^2 = 0$, dos veces; $(7 - 5)^2 = 4$; $(9 - 5)^2 = 16$.

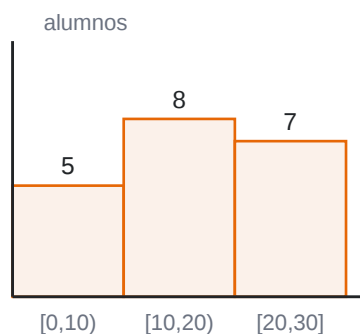
La suma de todos esos cuadrados es $9 + 3 + 0 + 4 + 16 = 32$.

La varianza es $32 : 8 = 4$, y la desviación típica es su raíz: **2**.

Ojo. La desviación típica es la raíz de la varianza, no la varianza. Dar 4 es dar la varianza, que además va en unidades al cuadrado.

42

El dibujo recoge las puntuaciones de 20 alumnos en un test de 30 preguntas, agrupadas en tres intervalos: $[0, 10)$ con 5 alumnos, $[10, 20)$ con 8 y $[20, 30]$ con 7. Calcula la media.



Histograma de los tres intervalos del enunciado, a escala: la altura de cada barra es el número de alumnos, y ese número está escrito encima de cada una. En el eje horizontal los intervalos van rotulados con sus corchetes, igual que en el enunciado: $[0,10)$, $[10,20)$ y $[20,30]$. Las barras van pegadas porque los intervalos son seguidos: en un histograma la variable es continua y va agrupada en intervalos, y por eso se tocan. Aquí la altura vale como número de alumnos porque los tres intervalos miden lo mismo.

Solución

Con datos agrupados cada intervalo se representa por su marca de clase, que es su punto medio.

Las marcas son 5, 15 y 25.

Se multiplica cada marca por su frecuencia y se suma: $5 \cdot 5 = 25$; $15 \cdot 8 = 120$; $25 \cdot 7 = 175$. La suma es $25 + 120 + 175 = 320$.

Y se divide entre el total de datos: $320 : 20 = 16$.

Ojo. No se puede hacer la media de las tres marcas (5, 15 y 25), que daría 15. Cada marca pesa lo que diga su frecuencia.

Lo que hay que saber

Hacen falta **tres** preguntas, y la primera sola no decide: **¿importa el orden?** separa las combinaciones (no importa) de las variaciones y las permutaciones (sí importa); **¿entran todos?** separa las permutaciones (entran todos) de las variaciones (solo algunos); y **¿se puede repetir?** avisa de que, si se puede, las fórmulas de este tema no valen.

Permutaciones de n elementos: se colocan TODOS en fila, y hay $n!$ formas (el factorial: el producto de todos los números del 1 al n).

Variaciones de n elementos tomados de m en m : se eligen m de los n Y el orden importa. Son $n \cdot (n - 1) \cdot \dots$, con m factores.

Combinaciones: se eligen m de los n y el orden NO importa. Son las variaciones divididas entre $m!$, porque cada grupo se ha contado $m!$ veces.

△ La trampa que hay que mirar: los tres primeros puestos de un podio son variaciones (el orden importa, y no entran todos); el orden de llegada COMPLETO de la carrera es una permutación, porque llegan todos; y una mano de cartas o un equipo de tres personas son combinaciones (no importa el orden). △ Ojo con «los delegados de una clase»: si se elige delegado Y subdelegado son cargos distintos, y entonces el orden importa. ▀ Una matrícula de coche NO sirve de ejemplo aquí: en ella las cifras y las letras se pueden repetir, y eso son variaciones CON repetición, que se cuentan con n elevado a m y no con esta fórmula.

43

¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en 5 sillas en fila? ¿Y de cuántas se pueden repartir los tres puestos de un podio entre esas 5 personas?

Solución

En el primer caso se colocan todas, así que son permutaciones de 5: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

$5 \cdot 4 = 20$, $20 \cdot 3 = 60$, $60 \cdot 2 = 120$ formas.

En el podio se eligen 3 de las 5 y el orden importa (no es lo mismo ser primero que tercero), así que son variaciones: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Ojo. Son tres factores porque son tres puestos, empezando en 5 y bajando de uno en uno. No es el factorial de 5 ni el de 3.

44

¿Cuántos equipos de 3 personas se pueden formar con 8 personas?

Solución

En un equipo el orden no importa: da igual en qué orden se nombre a sus miembros.

Así que son combinaciones de 8 tomadas de 3 en 3: primero las variaciones, $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Y se divide entre $3! = 6$, porque cada equipo se ha contado 6 veces (una por cada orden de sus tres miembros).

$336 : 6 = 56$ equipos.

45

Con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar? ¿Y cuántos de ellos son pares?

Solución

El orden importa (134 y 431 son números distintos) y no se repiten cifras, así que son variaciones de 5 tomadas de 3 en 3: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Para que sea par, la última cifra tiene que ser 2 o 4: hay 2 maneras de elegirla.

Elegida la última, quedan 4 cifras para las dos primeras posiciones, y el orden sigue importando: $4 \cdot 3 = 12$.

Por cada final par hay 12 números, así que son $2 \cdot 12 = 24$ números pares.

Ojo. Hay que empezar por la cifra con condición, la última. Empezando por la primera habría que distinguir después si la cifra par ya se ha usado o no, y la cuenta se complica sin necesidad.

Probabilidad condicionada y total

Lo que hay que saber

La **probabilidad condicionada** $P(A | B)$ es la probabilidad de A sabiendo que B ya ha ocurrido. Al saber que B ha ocurrido, los casos posibles ya no son todos: son solo los de B.

Cuando los datos vienen repartidos en dos grupos (en una tabla o en el propio texto), la condicionada usa como total el del grupo que ya se sabe, no el total general.

Dos sucesos son **independientes** si saber que uno ha ocurrido no cambia la probabilidad del otro.

En extracciones **sin reposición**, la segunda probabilidad cambia: hay una bola menos en total, y **del color que ya ha salido** hay una menos; de los demás colores siguen estando todas.

La **probabilidad total** de un suceso que puede llegar por varios caminos es la suma de lo que aporta cada camino: la probabilidad del camino por la del suceso dentro de él.

46

En un instituto hay 100 alumnos: 60 chicas y 40 chicos. Llevan gafas 30 chicas y 10 chicos. Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar lleve gafas, y la de que lleve gafas sabiendo que es chica.

Solución

Los que llevan gafas son $30 + 10 = 40$, de 100 alumnos.

$P(\text{gafas}) = 40/100 = 2/5$.

Para la condicionada, al saber que es chica los casos posibles ya no son 100: son las 60 chicas.

De esas 60, llevan gafas 30. $P(\text{gafas} | \text{chica}) = 30/60 = 1/2$.

Ojo. La condicionada no se divide entre 100. El dato de que es chica reduce los casos posibles a 60, y olvidarlo daría $30/100$, que es otra cosa.

47

En una urna hay 5 bolas rojas y 3 azules. Se sacan dos bolas, una detrás de otra y **sin reponer** la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?

Solución

Para la primera: hay 5 rojas de 8 bolas, así que la probabilidad es $5/8$.

Para la segunda, sabiendo que la primera fue roja: ya no hay 8 bolas sino 7, y de rojas quedan 4. Así que la probabilidad es $4/7$.

Se multiplican las dos: $5/8 \cdot 4/7 = 20/56$.

Simplificando entre 4: **$5/14$** .

Ojo. La segunda fracción no es $5/8$ otra vez. Sin reposición cambian los dos números, el de arriba y el de abajo.

48

Una fábrica tiene dos máquinas: la A produce el 60 % de las piezas y la B, el 40 %. De las de A sale defectuosa el 2 %, y de las de B, el 5 %. ¿Qué porcentaje de piezas defectuosas produce la fábrica?

Solución

Una pieza defectuosa puede llegar por dos caminos: venir de A y salir defectuosa, o venir de B y salir defectuosa.

Camino A: $0,6 \cdot 0,02 = 0,012$.

Camino B: $0,4 \cdot 0,05 = 0,02$.

La probabilidad total es la suma: $0,012 + 0,02 = 0,032$, es decir, el **3,2 %**.

Ojo. No se hace la media de 2 % y 5 %, que daría 3,5 %. Cada camino pesa lo que produce su máquina, y A produce más que B.