

Ejercicios de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I de 1.º de Bachillerato resueltos

48 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 14 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Números reales, aproximación y error · Clasificar, redondear y notación científica (**ejercicios 1, 2, 3**)

Porcentajes, aumentos y descuentos · Índices de variación y variaciones encadenadas (**ejercicios 4, 5, 6, 7**)

Matemática financiera: interés simple, compuesto y TAE · Capitalizar, despejar el capital y comparar productos (**ejercicios 8, 9, 10, 11**)

Polinomios, Ruffini y fracciones algebraicas · Dividir, factorizar y simplificar (**ejercicios 12, 13, 14**)

Ecuaciones y sistemas · Segundo grado, racionales y sistemas lineales (**ejercicios 15, 16, 17, 18**)

Inecuaciones y sistemas de inecuaciones · De segundo grado, racionales y sistemas (**ejercicios 19, 20, 21**)

Funciones: dominio y funciones a trozos · Dominios con raíz, denominador y logaritmo (**ejercicios 22, 23, 24**)

Exponenciales y logaritmos · Propiedades, ecuaciones y modelos de crecimiento (**ejercicios 25, 26, 27, 28**)

Límites y continuidad · Indeterminaciones y saltos (**ejercicios 29, 30, 31**)

Derivadas y sus aplicaciones · Reglas, recta tangente, máximos y mínimos (**ejercicios 32, 33, 34, 35**)

Estadística: media, mediana, moda y dispersión · Parámetros de centralización y de dispersión (**ejercicios 36, 37, 38**)

Estadística bidimensional: regresión y correlación · Covarianza, correlación y predicción (**ejercicios 39, 40, 41**)

Probabilidad, condicionada y tablas de contingencia · Laplace, árbol, probabilidad total e independencia (**ejercicios 42, 43, 44, 45**)

Binomial, normal y muestreo · $B(n, p)$, tipificar en la normal y qué es una muestra (**ejercicios 46, 47, 48**)

Material propio de solucionariomatematicas.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionariomatematicas.es

Qué entra y qué no. Entran los catorce temas del índice, todos con ejercicios resueltos, y siete de esos ejercicios llevan su figura: son cuatro figuras distintas. Esta página es la de **Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I**, la de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. Si tu asignatura es **Matemáticas I**, busca su página: **no es el mismo temario**; allí entran la trigonometría, los vectores, la geometría analítica y los números complejos, que aquí **no están**, y aquí entran la matemática financiera, la estadística bidimensional y las tablas de contingencia, que allí no están. **Y hay dos temas que se parten con CCSS II:** de la **matemática financiera**, aquí entran el interés simple, el compuesto y la TAE, y allí las rentas, la amortización de un préstamo y el valor actual; del **muestreo**, aquí entran las técnicas (qué es una muestra y cuándo representa a la población) y allí las distribuciones muestrales, los intervalos de confianza y el contraste de hipótesis. **Tampoco entran**, por ser de CCSS II: las matrices, los sistemas por Gauss, la programación lineal y las integrales; eso está en la página de 2.º. Estos ejercicios no sustituyen al temario ni a los del libro.

Ejercicios de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I de 1.º de Bachillerato resueltos

Números reales, aproximación y error

Lo que hay que saber

Un número es **racional** si se puede escribir como una fracción de enteros con el denominador distinto de cero. Lo son los enteros, los decimales exactos y los decimales periódicos. Los que no, como π , son **irracionales**, y entre los dos grupos forman los **reales**.

Al aproximar, el **error absoluto** es la diferencia (en valor absoluto) entre el valor exacto y el aproximado, y el **error relativo** es ese error dividido por el valor exacto. El relativo no tiene unidades y se suele dar en tanto por ciento.

La **notación científica** escribe el número como $a \cdot 10^n$ con $1 \leq a < 10$. Al multiplicar dos, se multiplican las mantisas (los números de delante, cada uno con una sola cifra entera) y se **suman** los exponentes; si el producto de las mantisas se sale de $[1, 10)$, hay que reajustar.

- 1 Clasifica estos números en racionales o irracionales, y escribe en forma de fracción los racionales que no lo estén: 7, $-3/4$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{2}$, 0,25 y 1,333... (periódico).

Solución

El 7 es entero, y todo entero es racional: $7 = 7/1$.

El $-3/4$ ya está escrito como fracción, así que es **racional**.

$\sqrt{9}$ no es irracional por llevar raíz: $\sqrt{9} = 3 = 3/1$, que es entero y por tanto racional.

$\sqrt{2}$ no se puede escribir como fracción de enteros: es **irracional**.

0,25 es un decimal exacto: $0,25 = 1/4$, racional.

1,333... es periódico, y todo periódico es racional: $1,333... = 4/3$.

Ojo. La raíz no decide nada. $\sqrt{9}$ es racional y $\sqrt{2}$ no lo es; lo que decide es si el resultado se puede escribir como fracción de enteros.

- 2 Redondea 3,14159 a dos decimales y calcula el error absoluto y el error relativo en tanto por ciento, con tres cifras significativas. Toma el 3,14159 como valor exacto (no es π : π tiene infinitas cifras).

Solución

La tercera cifra decimal es 1, menor que 5, así que se baja: el redondeo es **3,14**.

Error absoluto: $3,14159 - 3,14 = 0,00159$.

Error relativo: $0,00159 : 3,14159 = 0,000506$, y en tanto por ciento, **0,0506 %**.

Ojo. Aquí el valor exacto es el **3,14159 del enunciado**, no π . $\triangle$ No da igual: tomando π el error relativo saldría 0,000507 en vez de 0,000506, y el enunciado pide tres cifras significativas. El error relativo se divide por el valor EXACTO, no por el aproximado. Dividiendo por 3,14 saldría 0,000506 también con tres cifras, pero el criterio importa en cuanto el error es grande: la referencia es el valor exacto, y es ese valor el que define la medida.

3 Escribe en notación científica 0,000045 y 32 500 000, y calcula su producto.

Solución

Para 0,000045 se corre la coma cinco lugares a la derecha, así que el exponente es negativo:
 $0,000045 = 4,5 \cdot 10^{-5}$.

Para 32 500 000 se corre la coma siete lugares a la izquierda: $32\ 500\ 000 = 3,25 \cdot 10^7$.

El producto: $4,5 \cdot 3,25 = 14,625$ y los exponentes se suman, $-5 + 7 = 2$, así que queda $14,625 \cdot 10^2$.

Pero 14,625 no está entre 1 y 10, así que hay que reajustar: $14,625 \cdot 10^2 = 1,4625 \cdot 10^3$, que son 1 462,5.

Ojo. Los exponentes se suman, no se multiplican. Multiplicándolos saldría 10^{-35} , que no se parece en nada al resultado.

Porcentajes, aumentos y descuentos

Lo que hay que saber

Para aumentar un $p\%$, se multiplica por el **índice de variación** $1 + p/100$; para disminuirlo, por $1 - p/100$. Así un 30% de subida es multiplicar por 1,30.

Las variaciones **encadenadas** se multiplican entre sí. El índice total es el producto de los índices, y de él se lee el porcentaje total.

⚠ Para deshacer un aumento hay que **dividir** por su índice, no restar el mismo porcentaje: son dos operaciones distintas.

4 Un artículo cuesta 80 €. Sube un 15% y después baja un 15% . ¿Cuál es el precio final?

Solución

La subida del 15% multiplica por 1,15: $80 \cdot 1,15 = 92$ €.

La bajada del 15% multiplica por 0,85: $92 \cdot 0,85 = 78,20$ €.

El precio final es **78,20 €**.

También se ve con el índice total: $1,15 \cdot 0,85 = 0,9775$, que es menor que 1, así que el precio baja: $80 \cdot 0,9775 = 78,20$.

Ojo. No vuelve a los 80 €. El 15% de subida se calcula sobre 80 y el de bajada sobre 92, que es más, así que se quita más de lo que se había puesto.

5 Un sueldo sube un 3% un año y un 2% el siguiente. ¿Cuál es el aumento total en tanto por ciento?

Solución

Los índices son 1,03 y 1,02, y se multiplican: $1,03 \cdot 1,02 = 1,0506$.

Un índice de 1,0506 es un aumento del **5,06 %**.

Ojo. No es el 5 %. Sumar los porcentajes deja fuera el 2% del 3% que ya se había subido, y por eso falta un $0,06\%$.

6 El precio de un producto con el IVA del 21 % incluido es 121 €. ¿Cuál es el precio sin IVA?

Solución

El precio con IVA es el precio base multiplicado por 1,21, así que para deshacerlo hay que dividir.

$$121 : 1,21 = 100.$$

El precio sin IVA es **100 €**.

Comprobación: $100 \cdot 1,21 = 121$.

Ojo. No se resta el 21 % de 121. Eso daría 95,59 €, y al volver a aplicarle el IVA saldrían 115,66 €, que no son los 121 de partida.

7 Una población de 50 000 habitantes crece un 2 % cada año. ¿Cuántos habitantes habrá dentro de 3 años, redondeando a habitantes enteros?

Solución

Cada año se multiplica por 1,02, y tres años son tres veces: hay que multiplicar por $1,02^3$.

$$1,02^3 = 1,061208.$$

$50\,000 \cdot 1,061208 = 53\,060,4$, así que habrá **53 060 habitantes**.

Ojo. No son 53 000. Multiplicar el 2 % por tres años (un 6 %) olvida que el segundo año el 2 % se calcula sobre una población que ya había crecido.

Matemática financiera: interés simple, compuesto y TAE

Lo que hay que saber

En el **interés simple** los intereses no se suman al capital: $I = C \cdot r \cdot t$, con r en tanto por uno y t en años. El capital final es $C + I$.

En el **interés compuesto** los intereses se suman al capital y generan más intereses: $C_t = C \cdot (1 + r)^t$.

La **TAE** es el tanto anual equivalente: el interés anual que daría lo mismo que el que se aplica en periodos más cortos. Con un tanto i por periodo y n periodos al año, $TAE = (1 + i)^n - 1$.

8 Se depositan 5 000 € al 4 % anual de interés SIMPLE durante 3 años. ¿Cuánto interés se gana y cuál es el capital final?

Solución

El 4 % en tanto por uno es 0,04, y el tiempo son 3 años.

$$I = 5\,000 \cdot 0,04 \cdot 3 = 600 \text{ €}.$$

El capital final es el inicial más los intereses: $5\,000 + 600 = 5\,600 \text{ €}$.

Ojo. En el interés simple los 200 € del primer año no generan intereses el segundo. Por eso los tres años dan exactamente el triple que uno.

9

Se depositan 5 000 € al 4 % anual de interés COMPUESTO durante 3 años. ¿Cuál es el capital final, con dos decimales? ¿Cuánto más que con interés simple?

Solución

Con interés compuesto se multiplica por el índice tantas veces como años: $C_f = 5\,000 \cdot 1,04^3$.

$1,04^3 = 1,124864$, así que $5\,000 \cdot 1,124864 = 5\,624,32$ €.

Con interés simple el capital final era 5 600 €, así que la diferencia es $5\,624,32 - 5\,600 = 24,32$ €.

Esos 24,32 € son los intereses que han producido los intereses de los dos primeros años.

Ojo. La diferencia no es cero ni enorme. Con pocos años y un tanto pequeño es poca cosa, pero crece muy deprisa con el tiempo: lo que cambia no es la cuenta de un año, es que se repite sobre lo ya ganado.

10

Un capital produce 1 200 € de interés SIMPLE en 4 años al 5 % anual. ¿Cuál era el capital?

Solución

De $I = C \cdot r \cdot t$ se despeja el capital: $C = I : (r \cdot t)$.

$r \cdot t = 0,05 \cdot 4 = 0,2$.

$C = 1\,200 : 0,2 = 6\,000$ €.

Comprobación: $6\,000 \cdot 0,05 \cdot 4 = 1\,200$.

Ojo. No se divide solo por el tanto. Dividiendo 1 200 entre 0,05 saldrían 24 000 €, que es el capital que daría esos intereses en UN año, no en cuatro.

11

Un depósito paga un 0,5 % mensual. ¿Cuál es su TAE, con dos decimales?

Solución

El tanto por periodo es $i = 0,005$ y hay $n = 12$ periodos en un año.

$TAE = 1,005^{12} - 1$.

$1,005^{12} = 1,0616778...$, así que la TAE es $0,0616778... = 6,17$ %.

Ojo. La TAE no es el 6 %. Multiplicar 0,5 por 12 da el 6 % nominal, que ignora que cada mes los intereses del mes anterior ya están dentro: con más de un periodo al año la TAE es algo mayor que el nominal (con un tanto del 0 % serían iguales).

Polinomios, Ruffini y fracciones algebraicas

Lo que hay que saber

La **regla de Ruffini** divide un polinomio entre $x - a$: se bajan los coeficientes (con los ceros de los grados que falten), se baja el primero, se multiplica por a y se suma al siguiente, y así hasta el final. El último número es el **resto**.

El **teorema del resto** dice que ese resto es $P(a)$. Si vale 0, $x - a$ es un factor del polinomio.

Para **simplificar** una fracción algebraica se factorizan el numerador y el denominador y se cancelan los factores comunes. ⚠ Los valores que anulan el denominador original quedan fuera del dominio aunque desaparezcan al simplificar.

12 Divide $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ entre $x - 2$ por Ruffini, y comprueba el resto con el teorema del resto.

Solución

Los coeficientes son 2, -3, 4 y -5, y $a = 2$.

Se baja el 2. Luego $2 \cdot 2 = 4$ y $4 + (-3) = 1$.

$1 \cdot 2 = 2$ y $2 + 4 = 6$.

$6 \cdot 2 = 12$ y $12 + (-5) = 7$.

El cociente es $2x^2 + x + 6$ y el resto es 7.

Comprobación con el teorema del resto: $P(2) = 16 - 12 + 8 - 5 = 7$. Coincide.

Ojo. El divisor es $x - 2$, así que en Ruffini se usa $a = 2$, no -2. Con -2 saldría $P(-2) = -41$, que es el resto de dividir entre $x + 2$.

13 Factoriza $x^3 - 7x + 6$.

Solución

Falta el término de grado 2, así que los coeficientes son 1, 0, -7 y 6.

Se prueban los divisores de 6. Para $a = 1$: $1 - 7 + 6 = 0$, así que $x - 1$ es factor.

Ruffini con 1 deja el cociente $x^2 + x - 6$.

Ese trinomio se factoriza buscando dos números que sumen 1 y multipliquen -6: son 3 y -2, así que $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.

La factorización completa es $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

Ojo. El cero que falta hay que escribirlo en Ruffini. Si se bajan solo 1, -7 y 6 se está dividiendo un polinomio de grado 2, y el resultado no tiene nada que ver.

14

Simplifica $(x^2 - 9) : (x^2 - x - 6)$ e indica para qué valores de x no está definida la expresión original.

Solución

El numerador es una diferencia de cuadrados: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

El denominador se factoriza con dos números que sumen -1 y multipliquen -6 : son -3 y 2 , así que $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$.

Se cancela el factor $(x - 3)$: la fracción simplificada es $(x + 3) : (x + 2)$.

La expresión original no está definida donde se anula su denominador, o sea en $x = 3$ y $x = -2$.

Ojo. El $x = 3$ sigue fuera del dominio aunque el factor se haya cancelado. La fracción simplificada sí vale en 3 , pero no es la misma función: se diferencian justo en ese punto.

Ecuaciones y sistemas

Lo que hay que saber

La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, **con $a \neq 0$** (si a fuera 0 no sería de segundo grado y la fórmula dividiría entre cero), se resuelve con $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. El **discriminante** $b^2 - 4ac$ dice cuántas soluciones hay: dos si es positivo, una si es cero y ninguna real si es negativo.

En una ecuación con la x en un denominador hay que **comprobar** al final que la solución no anula ese denominador.

Un **sistema** de dos ecuaciones lineales se resuelve por sustitución, igualación o reducción, y la solución se comprueba en las **dos** ecuaciones, no solo en una.

15

Resuelve $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

Solución

Aquí $a = 2$, $b = -5$ y $c = -3$.

El discriminante: $(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$. Es positivo, así que hay dos soluciones.

$\sqrt{49} = 7$, y $x = \frac{5 \pm 7}{4}$.

Con el más: $\frac{5 + 7}{4} = 3$. Con el menos: $\frac{5 - 7}{4} = -\frac{1}{2}$.

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Ojo. El $-b$ del numerador es $+5$, no -5 . Con $b = -5$, el $-b$ cambia de signo; olvidarlo da -3 y $1/2$, que no cumplen la ecuación.

16 Resuelve el sistema $3x + 2y = 12$, $x + y = 5$.

Solución

De la segunda se despeja $x = 5 - y$.

Se sustituye en la primera: $3(5 - y) + 2y = 12$, o sea $15 - 3y + 2y = 12$.

Queda $-y = -3$, así que $y = 3$.

Y entonces $x = 5 - 3 = 2$.

Comprobación en las dos: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$ OK y $2 + 3 = 5$ OK.

Ojo. Hay que comprobar en las dos ecuaciones. Un error de signo al sustituir puede dar un par que cumple una y no la otra, y entonces no es solución del sistema.

17 Resuelve $3 : (x - 1) + 2 = 5$.

Solución

Se pasa el 2 al otro lado: $3 : (x - 1) = 3$.

Si una fracción de numerador 3 vale 3, su denominador es 1: $x - 1 = 1$.

Así que $x = 2$.

Comprobación: el denominador vale $2 - 1 = 1$, que no es cero, y $3 : 1 + 2 = 5$ OK.

Ojo. Hay que comprobar que la solución no anula el denominador. Si hubiera salido $x = 1$, no sería solución por mucho que apareciera al despejar: la expresión no existe ahí.

18 La suma de dos números es 30 y su diferencia es 8. ¿Cuáles son?

Solución

Se llaman x e y , con x el mayor: $x + y = 30$ y $x - y = 8$.

Sumando las dos ecuaciones desaparece la y : $2x = 38$, así que $x = 19$.

Y entonces $y = 30 - 19 = 11$.

Los números son **19** y **11**. Comprobación: $19 + 11 = 30$ OK y $19 - 11 = 8$ OK.

Ojo. La diferencia es 8, no 8 veces. Si se leyera «su diferencia es 8» como «uno es 8 veces el otro», el sistema sería otro y la solución no cumpliría la resta.

Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

Lo que hay que saber

Para una inecuación de segundo grado se buscan las raíces. Si no hay ninguna real, el signo es el mismo en TODA la recta y basta probar un valor; si las hay, se dividen los reales en intervalos y se mira el **signo** en cada uno con un valor de prueba. La solución es la unión de los intervalos que cumplen.

En una inecuación **racional** hay que tener en cuenta los valores que anulan el denominador: ahí la expresión no existe, así que nunca entran en la solución, ni siquiera con $\leq$ o $\geq$.

La solución de un **sistema** de inecuaciones es la **intersección** de las soluciones de cada una, no su unión.

19 Resuelve $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Solución

Primero las raíces: $x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene discriminante $25 - 24 = 1$, así que $x = (5 \pm 1) : 2$, o sea $x = 2$ y $x = 3$.

Factorizado: $(x - 2)(x - 3) > 0$.

Las raíces parten la recta en tres intervalos. Se prueba un valor de cada uno: en $x = 0$ queda $(-2)(-3) = 6$, positivo; en $x = 2,5$ queda $(0,5)(-0,5) = -0,25$, negativo; en $x = 4$ queda $(2)(1) = 2$, positivo.

La solución es $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

Ojo. El 2 y el 3 no entran. La desigualdad es estricta, y en las raíces la expresión vale 0, que no es mayor que 0.

20 Resuelve $(2x - 1) : (x + 3) \leq 0$.

Solución

El numerador se anula en $x = 1/2$ y el denominador en $x = -3$.

Esos dos valores parten la recta en tres trozos. Se prueba uno de cada: en $x = -4$ queda $(-9) : (-1) = 9$, positivo; en $x = 0$ queda $(-1) : 3$, negativo; en $x = 1$ queda $1 : 4$, positivo.

El trozo que cumple ≤ 0 es el del medio. El $1/2$ **sí** entra, porque ahí la fracción vale 0; el -3 **no**, porque ahí no existe.

La solución es $[-3, 1/2]$.

Ojo. Aunque la desigualdad no sea estricta, el -3 queda fuera. Un valor que anula el denominador nunca entra: no es que no cumpla, es que la expresión no está definida ahí.

21 Resuelve el sistema $2x - 1 > 3$, $x + 4 < 10$.

Solución

De la primera: $2x > 4$, así que $x > 2$.

De la segunda: $x < 6$.

La solución del sistema es la intersección de las dos, o sea los números que cumplen las dos a la vez: **(2, 6)**.

Ojo. No es la unión. Con la unión entraría, por ejemplo, el 0, que cumple la segunda y no la primera; el sistema pide las dos.

Funciones: dominio y funciones a trozos

Lo que hay que saber

El **dominio** son los valores de x para los que la fórmula tiene sentido. Tres restricciones mandan: un denominador no puede ser cero, lo de dentro de una raíz par no puede ser negativo, y lo de dentro de un logaritmo tiene que ser estrictamente positivo.

Una función **a trozos** se define con una fórmula distinta en cada intervalo. Para evaluarla, primero se mira en qué trozo cae la x y después se usa esa fórmula.

△ Hay que fijarse en si los extremos de cada trozo están incluidos o no: eso decide qué fórmula se aplica justo en el punto de corte.

22 Halla el dominio de $f(x) = (x + 1) : (x^2 - 4)$.

Solución

La única restricción es el denominador, que no puede ser cero.

$x^2 - 4 = 0$ se cumple en $x = 2$ y $x = -2$.

El dominio es todos los reales menos esos dos: **Dom f = todos los reales menos el -2 y el 2 .**

Ojo. El numerador no restringe nada. Que se anule en $x = -1$ solo significa que ahí la función vale 0, que es un valor perfectamente válido.

23 Halla el dominio de $g(x) = \sqrt{x - 3}$ y de $h(x) = \ln(5 - x)$.

Solución

En g , lo de dentro de la raíz no puede ser negativo: $x - 3 \geq 0$, o sea $x \geq 3$.

Dom g = $[3, +\infty)$, con el 3 incluido porque $\sqrt{0} = 0$ existe.

En h , lo de dentro del logaritmo tiene que ser estrictamente positivo: $5 - x > 0$, o sea $x < 5$.

Dom h = $(-\infty, 5)$, con el 5 excluido.

Ojo. El 3 entra y el 5 no, y no es un descuido. La raíz admite el 0 y el logaritmo no: $\ln 0$ no existe.

24 Dada $f(x) = x + 2$ si $x < 0$; x^2 si $0 \leq x < 2$; 5 si $x \geq 2$, calcula $f(-1)$, $f(0)$ y $f(3)$.

Solución

Para $f(-1)$: el -1 es menor que 0 , así que se usa $x + 2$. $f(-1) = -1 + 2 = 1$.

Para $f(0)$: el 0 cumple $0 \leq x < 2$, así que se usa x^2 . $f(0) = 0^2 = 0$.

Para $f(3)$: el 3 cumple $x \geq 2$, así que se usa el trozo constante. $f(3) = 5$.

Ojo. En $x = 0$ no se usa $x + 2$. El primer trozo pide $x < 0$ estrictamente, y el 0 pertenece al segundo: con el primero saldría 2 en vez de 0 .

Exponenciales y logaritmos

Lo que hay que saber

$\log_a b = c$ quiere decir $a^c = b$. El logaritmo decimal se escribe $\log$ (base 10) y el neperiano $\ln$ (base e).

Las propiedades: el logaritmo de un **producto** es la suma de los logaritmos, el de un **cociente** es la resta, y el de una **potencia** saca el exponente delante.

En una **ecuación exponencial**, si se puede poner todo con la misma base se igualan los exponentes; si no, se toman logaritmos en los dos lados.

25 Calcula $\log_2 32$, $\log 1000$ y $\ln e^3$.

Solución

$\log_2 32$ pregunta a qué hay que elevar 2 para obtener 32 . Como $2^5 = 32$, $\log_2 32 = 5$.

$\log 1000$ es base 10 , y $10^3 = 1000$, así que $\log 1000 = 3$.

$\ln e^3$ es base e , y la propiedad de la potencia saca el exponente: $\ln e^3 = 3 \cdot \ln e = 3$, porque $\ln e = 1$.

Ojo. $\log 1000$ no es 1000 ni 10 . El logaritmo devuelve el EXPONENTE, no el número: la respuesta de un logaritmo casi siempre es mucho más pequeña que su argumento.

26 Resuelve $3^{2x} = 81$.

Solución

Se pone el 81 como potencia de 3 : $81 = 3^4$.

Con la misma base se igualan los exponentes: $2x = 4$.

Así que $x = 2$.

Comprobación: $3^4 = 81$ OK.

Ojo. El exponente es $2x$, no x . Igualando $x = 4$ saldría $3^8 = 6561$, que no es 81 .

27 Expresa $\log 12$ en función de $\log 2$ y $\log 3$.

Solución

Se descompone el 12 en factores: $12 = 2^2 \cdot 3$.

El logaritmo de un producto es la suma: $\log 12 = \log 2^2 + \log 3$.

Y el de una potencia saca el exponente: $\log 12 = 2 \log 2 + \log 3$.

Ojo. $\log 12$ no es $\log 2 \cdot \log 3$. Y el logaritmo de una SUMA no se puede partir: $\log (2 + 3)$ no es $\log 2 + \log 3$.

28 Un capital de 1 000 € crece al 5 % anual compuesto. ¿Cuántos años enteros hacen falta para que pase de 1 500 €?

Solución

Hay que resolver $1\,000 \cdot 1,05^t > 1\,500$, o sea $1,05^t > 1,5$.

Se toman logaritmos: $t \cdot \log 1,05 > \log 1,5$, y como $\log 1,05$ es positivo, la desigualdad no cambia de sentido al dividir.

$t > \log 1,5 : \log 1,05 = 8,31\dots$

El primer año entero que lo cumple es el 9.º.

Ojo. No se redondea a 8. Con $t = 8$ el capital es 1 477,46 €, que todavía no pasa de 1 500: cuando hace falta SUPERAR una cota, se redondea hacia arriba. $\triangle$ Y al revés: si lo que se pidiera fuera no pasar de un tope, habría que redondear hacia abajo. Lo que manda es el lado de la desigualdad, no la costumbre de redondear al más cercano.

Límites y continuidad

Lo que hay que saber

Para calcular un límite se sustituye: si la función viene dada por **una sola fórmula** y sale un número, ese es el límite; si sale $0/0$ hay que **factorizar y simplificar**, y si sale ∞/∞ se comparan los **grados**.

En un cociente de polinomios con $x \rightarrow \infty$: si el grado de arriba es mayor, el límite es $\pm\infty$ —hablando de $x \rightarrow +\infty$, el signo lo deciden los coeficientes principales; si $x \rightarrow -\infty$ hay que mirar además si la diferencia de grados es par o impar—; si es menor, 0; y si son iguales, el cociente de los **coeficientes principales**.

Una función es **continua** en un punto si existe el límite por los dos lados, existe la función y los tres valores coinciden. Si los límites laterales son distintos, hay una discontinuidad de **salto**, y el salto es su diferencia.

29 Calcula el límite de $(x^2 - 4) : (x - 2)$ cuando $x \rightarrow 2$.

Solución

Al sustituir sale $0 : 0$, que no dice nada: hay que operar.

El numerador es una diferencia de cuadrados: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Se simplifica el factor $(x - 2)$, que es el que se anula: queda $x + 2$.

Ahora ya se puede sustituir: $2 + 2 = 4$.

El límite es **4**.

Ojo. Que salga $0/0$ no significa que el límite sea 0 ni que no exista. Significa que la sustitución directa no sirve y hay que quitar el factor que se anula.

30 Calcula el límite de $(3x^2 + 2x) : (x^2 - 1)$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Solución

Arriba y abajo el grado es 2, así que sale la indeterminación ∞/∞ .

Con grados iguales, el límite es el cociente de los coeficientes principales: $3 : 1 = 3$.

El límite es **3**.

Ojo. El límite no es 1 ni infinito. Los términos de grado menor (el $2x$ y el -1) dejan de contar cuando x crece, pero los coeficientes de los de grado máximo sí cuentan, y aquí son 3 y 1.

31 Estudia la continuidad de $f(x) = x + 2$ si $x < 0$; x^2 si $0 \leq x < 2$; 5 si $x \geq 2$, en los puntos $x = 0$ y $x = 2$.

Solución

En $x = 0$, por la izquierda se usa $x + 2$: el límite es $0 + 2 = 2$. Por la derecha se usa x^2 : el límite es **0**.

Los dos límites laterales son distintos, así que f es **discontinua en $x = 0$** , con un salto de $2 - 0 = 2$.

En $x = 2$, por la izquierda se usa x^2 : el límite es **4**. Por la derecha, el trozo constante: **5**.

También son distintos, así que f es **discontinua en $x = 2$** , con un salto de $5 - 4 = 1$.

Ojo. El valor de la función en el punto no arregla el salto. En $x = 0$ la función vale 0 y coincide con el límite por la derecha, y sigue habiendo discontinuidad: para ser continua hacen falta los dos lados.

Derivadas y sus aplicaciones

Lo que hay que saber

Las reglas básicas: la derivada de x^n es $n \cdot x^{n-1}$, la de una constante es 0, y la derivada de una suma es la suma de las derivadas.

Producto: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. **Cociente:** $(u/v)' = (u'v - uv') : v^2$. Y la derivada de e^x es e^x .

La derivada en un punto es la **pendiente** de la recta tangente ahí, y la tangente es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Donde la derivada se anula puede haber un **máximo** o un **mínimo**, y se distinguen mirando el signo de la derivada antes y después.

32 Deriva $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7$.

Solución

Se deriva término a término.

$$(3x^4)' = 12x^3.$$

$$(-2x^2)' = -4x.$$

$(5x)' = 5$ y la derivada de -7 es 0 .

Así que $f'(x) = 12x^3 - 4x + 5$.

Ojo. La constante desaparece, no se queda. Dejar el -7 daría $12x^3 - 4x + 5 - 7$, que es la derivada de OTRA función (de $3x^4 - 2x^2 - 2x$, por ejemplo), no de f .

33 Deriva $g(x) = x^2 \cdot e^x$ y $h(x) = (x + 1) : (x - 1)$.

Solución

Para g se usa la regla del producto con $u = x^2$ y $v = e^x$, así que $u' = 2x$ y $v' = e^x$.

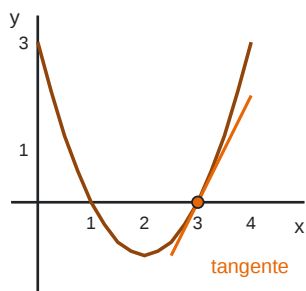
$$g'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x, \text{ y sacando factor común, } g'(x) = x(x + 2)e^x.$$

Para h se usa la del cociente con $u = x + 1$ y $v = x - 1$, así que $u' = 1$ y $v' = 1$.

El numerador queda $1 \cdot (x - 1) - (x + 1) \cdot 1 = -2$, así que $h'(x) = -2 : (x - 1)^2$.

Ojo. La derivada de un cociente no es el cociente de las derivadas. Eso daría $1 : 1 = 1$, y la derivada de h es negativa en todo su dominio.

34 Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en el punto de abscisa $x = 3$, y comprueba en el dibujo que la inclinación cuadra.



La parábola de la función, dibujada entre $x = 0$ y $x = 4$, y la recta naranja que la toca en el punto marcado, el de abscisa 3. El dibujo está a escala: una unidad del eje x mide lo mismo que una del eje y , así que la inclinación de la recta se puede medir con una regla.

Solución

Primero el punto: $f(3) = 9 - 12 + 3 = 0$, así que la tangente pasa por $(3, 0)$.

Ahora la pendiente: $f'(x) = 2x - 4$, y $f'(3) = 2$.

La tangente es $y - 0 = 2(x - 3)$, o sea $y = 2x - 6$.

En el dibujo se ve que al avanzar una unidad a la derecha la recta sube dos, que es justo la pendiente 2.

Ojo. La pendiente es $f'(3)$, no $f(3)$. Aquí $f(3) = 0$, y una recta de pendiente 0 sería horizontal: cruzaría la parábola en vez de tocarla.

35 Halla los máximos y los mínimos de $f(x) = x^3 - 3x$.

Solución

Se deriva y se iguala a cero: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, así que $x^2 = 1$ y $x = 1$ o $x = -1$.

Signo de f' en cada tramo: en $x = -2$, $f' = 9$, positiva; en $x = 0$, $f' = -3$, negativa; en $x = 2$, $f' = 9$, positiva.

La función crece, baja y vuelve a crecer, así que en $x = -1$ hay un **máximo** y en $x = 1$ un **mínimo**.

Sus valores: $f(-1) = -1 + 3 = 2$ y $f(1) = 1 - 3 = -2$.

Máximo en $(-1, 2)$ y mínimo en $(1, -2)$.

Ojo. El máximo está a la izquierda y vale MÁS que el mínimo, pero no es el valor mayor de la función: en $x = 3$ vale 18. Son extremos **relativos**, no absolutos.

Estadística: media, mediana, moda y dispersión

Lo que hay que saber

La **media** es la suma de los datos dividida por cuántos hay. La **mediana** es el valor central con los datos ordenados —y si hay una cantidad par de datos, la media de los dos centrales—, y la **moda**, el que más se repite.

La **varianza** es la media de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media, y la **desviación típica** es su raíz cuadrada. Tiene las mismas unidades que los datos.

El **coeficiente de variación** es la desviación típica dividida por la media. No tiene unidades, así que sirve para comparar la dispersión de dos conjuntos distintos.

36 Calcula la media, la mediana y la moda de: 4, 7, 7, 9, 10, 11, 15.

Solución

Los datos ya están ordenados y son 7.

Media: $(4 + 7 + 7 + 9 + 10 + 11 + 15) : 7 = 63 : 7 = 9$.

Mediana: con 7 datos, el central es el 4.º, que es 9.

Moda: el único valor repetido es el 7, así que la moda es 7.

Ojo. Aquí la media y la mediana coinciden en 9 y es casualidad, no una regla. La moda vale 7 y está lejos de las dos: en un conjunto pequeño con un valor repetido bajo, la moda no mide el centro.

37 Calcula la varianza y la desviación típica de 2, 4, 4, 6, 9, con dos decimales.

Solución

Media: $(2 + 4 + 4 + 6 + 9) : 5 = 25 : 5 = 5$.

Desviaciones respecto de la media: -3, -1, -1, 1 y 4. Sus cuadrados: 9, 1, 1, 1 y 16.

Varianza: $(9 + 1 + 1 + 1 + 16) : 5 = 28 : 5 = 5,6$.

Desviación típica: $\sqrt{5,6} = 2,37$.

Ojo. La varianza no se puede comparar con los datos. Está en unidades al cuadrado; la que se compara con los datos es la desviación típica.

38

Con los datos 2, 4, 4, 6 y 9, calcula el coeficiente de variación en tanto por ciento, con una cifra decimal.

Solución

La media es 5 y la desviación típica, 2,3664 (la raíz de $28 : 5$, que redondeada a dos decimales es 2,37).

El coeficiente de variación es la desviación típica entre la media: $2,3664 : 5 = 0,4733$.

En tanto por ciento, **47,3 %**.

Ojo. Un coeficiente del 47,3 % es dispersión ALTA: la desviación típica es casi la mitad de la media. Muchos manuales toman el 30 % como aviso de que la media representa mal al conjunto; no es una regla matemática, es un convenio.

Estadística bidimensional: regresión y correlación

Lo que hay que saber

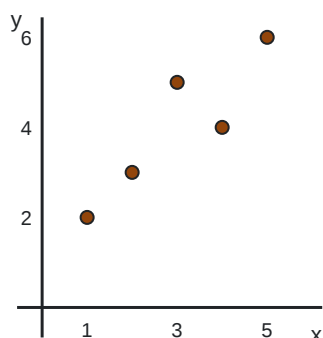
La **covarianza** mide si las dos variables van en el mismo sentido: $S_{xy} = (\sum xy) : n - m_x \cdot m_y$. Positiva, suben juntas; negativa, una sube y la otra baja.

El **coeficiente de correlación** es $r = S_{xy} : (S_x \cdot S_y)$, y siempre está entre -1 y 1. Cuanto más cerca de ± 1 , más se parece la nube a una recta.

La **recta de regresión** de y sobre x es $y - m_y = (S_{xy} : S_x^2)(x - m_x)$. $\triangle$ Antes de usarla para predecir hay que mirar **entre qué valores de x** se han tomado los datos.

39

Con los pares (1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 4) y (5, 6), calcula las dos medias, la covarianza y el coeficiente de correlación.



Los cinco pares de datos dibujados como puntos marrones. El dibujo está a escala: una unidad del eje x mide lo mismo que una del eje y, y los cinco puntos están en su sitio exacto.

Solución

Medias: $m_x = 15 : 5 = 3$ y $m_y = 20 : 5 = 4$.

Suma de productos: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 2 + 6 + 15 + 16 + 30 = 69$. Covarianza: $69 : 5 - 3 \cdot 4 = 13,8 - 12 = 1,8$.

Varianzas: $\sum x^2 = 55$, así que $S_x^2 = 55 : 5 - 9 = 2$; y $\sum y^2 = 90$, así que $S_y^2 = 90 : 5 - 16 = 2$.

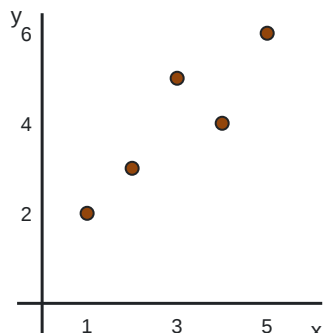
Correlación: $r = 1,8 : \sqrt{(2 \cdot 2)} = 1,8 : 2 = 0,9$.

La covarianza es positiva y $r = 0,9$, así que hay una relación directa y fuerte.

Ojo. Que r valga 0,9 no quiere decir que la y sea el 90 % de la x . La r mide cuánto se parece la nube a una recta, no la proporción entre las variables.

40

Con esos mismos pares, halla la recta de regresión de y sobre x .



Los cinco pares de datos dibujados como puntos marrones. El dibujo está a escala: una unidad del eje x mide lo mismo que una del eje y , y los cinco puntos están en su sitio exacto.

Solución

La pendiente es la covarianza entre la varianza de x : $1,8 : 2 = 0,9$.

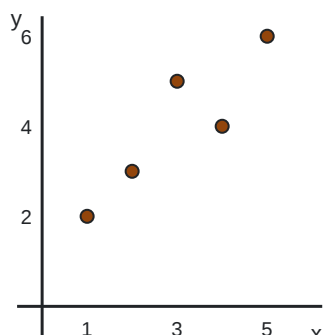
La recta pasa por el punto de las medias, $(3, 4)$: $y - 4 = 0,9(x - 3)$, o sea $y = 0,9x - 2,7 + 4$.

La recta es $y = 0,9x + 1,3$.

Ojo. La recta pasa por el punto de las medias siempre, y es la forma más rápida de comprobar que no se ha equivocado uno con la ordenada: $0,9 \cdot 3 + 1,3 = 4$, que es la media de y .

41

Con la recta del ejercicio anterior, estima y para $x = 2,5$ y para $x = 6$, y di si cada estimación es fiable. Justifica las dos. Mira el dibujo antes de decidir.



Los cinco pares de datos dibujados como puntos marrones. El dibujo está a escala: una unidad del eje x mide lo mismo que una del eje y , y los cinco puntos están en su sitio exacto.

Solución

Con la recta $y = 0,9x + 1,3$, para $x = 2,5$: $0,9 \cdot 2,5 + 1,3 = 2,25 + 1,3 = 3,55$.

Y para $x = 6$: $0,9 \cdot 6 + 1,3 = 5,4 + 1,3 = 6,7$.

Ahora hay que mirar entre qué valores de x hay datos: en el dibujo los cinco puntos van de $x = 1$ a $x = 5$.

El **2,5 cae dentro** de ese tramo, así que la recta se usa donde se construyó: la estimación **3,55 sí es**

fiable. $\triangle$ Fiable no quiere decir exacta: $r = 0,9$ dice que la nube se parece a una recta **en conjunto**, y aun así hay un punto que se aparta de ella **una unidad entera**.

El **6 queda fuera**: usar la recta ahí es **extrapolar**, y la estimación **6,7 es poco fiable** — nada garantiza que la relación siga siendo lineal más allá de los datos observados.

Ojo. La diferencia entre las dos no está en la cuenta, que es la misma, sino en **DÓNDE** se usa la recta. Y un r alto no cambia eso: el coeficiente dice cómo de bien se parece la nube a una recta donde **HAY** datos, y no dice nada de lo que pasa fuera.

Probabilidad, condicionada y tablas de contingencia

Lo que hay que saber

Regla de Laplace: si todos los casos son igual de probables, $P(A) = \text{casos favorables} : \text{casos posibles}$.

La **probabilidad condicionada** $P(B|A)$ es la de B sabiendo que ha pasado A, y vale $P(A \cap B) : P(A)$, que pide $P(A) > 0$: si A no puede pasar, no tiene sentido condicionar a que haya pasado. En un **árbol**, las ramas de un camino se multiplican y los caminos distintos se suman.

Dos sucesos son **independientes** si $P(B|A) = P(B)$. Si saber que ha pasado A cambia la probabilidad de B, no lo son.

42

Una bolsa tiene 5 bolas rojas y 3 azules. Se saca una, **NO** se devuelve, y se saca otra. Con el diagrama de árbol del dibujo, calcula la probabilidad de que las dos sean rojas.

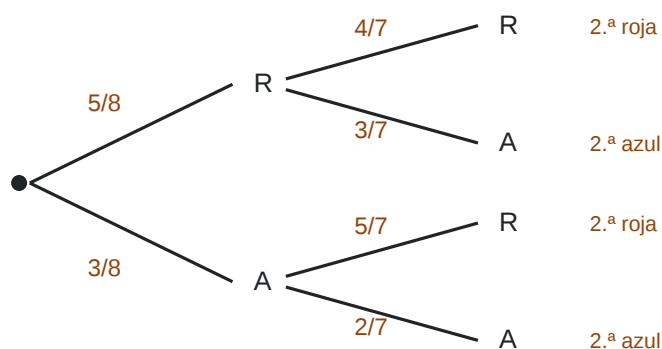


Diagrama de árbol de dos extracciones. Del nodo de salida salen dos ramas, una a «R» (roja) y otra a «A» (azul), y de cada una de ellas salen otras dos, también a «R» y a «A». Cada rama lleva su probabilidad escrita, y a la derecha está rotulado el color de la segunda bola. El dibujo no está a escala: las ramas no miden lo que valen.

Solución

En la primera extracción hay 8 bolas y 5 son rojas: **5/8**.

Si la primera ha sido roja, quedan 7 bolas y 4 rojas, así que la segunda es roja con probabilidad **4/7**.

Las dos ramas del mismo camino se multiplican: **$5/8 \cdot 4/7 = 20/56 = 5/14$** .

La probabilidad es **5/14**, que es aproximadamente 0,357.

Ojo. La segunda probabilidad no es 5/8 otra vez. Como la bola no se devuelve, cambian el total y las rojas: con $5/8 \cdot 5/8$ saldría $25/64$, que es lo que valdría SI se devolviera.

43

En ese mismo experimento, y con el diagrama de árbol del dibujo, calcula la probabilidad de que la SEGUNDA bola sea azul.

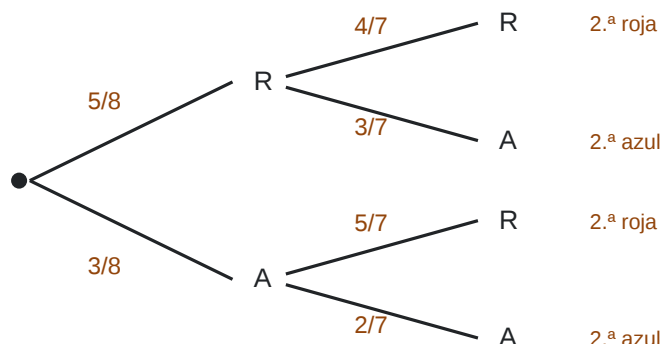


Diagrama de árbol de dos extracciones. Del nodo de salida salen dos ramas, una a «R» (roja) y otra a «A» (azul), y de cada una de ellas salen otras dos, también a «R» y a «A». Cada rama lleva su probabilidad escrita, y a la derecha está rotulado el color de la segunda bola. El dibujo no está a escala: las ramas no miden lo que valen.

Solución

Se puede llegar a «segunda azul» por dos caminos distintos, así que se suman.

Camino «roja y luego azul»: $5/8 \cdot 3/7 = 15/56$.

Camino «azul y luego azul»: $3/8 \cdot 2/7 = 6/56$.

Sumando: $15/56 + 6/56 = 21/56 = 3/8$.

La probabilidad es $3/8$.

Ojo. Sale lo mismo que la probabilidad de que la PRIMERA sea azul, y no es casualidad: sin mirar la primera bola, la segunda extracción tiene exactamente las mismas opciones. Lo que cambia es la condicionada, no esta.

44

Mira la tabla de doble entrada. De 200 personas, 120 son mujeres y 80 hombres. Usan transporte público 90, de las cuales 60 son mujeres. Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que use transporte público sabiendo que es mujer?

	usa TP	no usa TP	total
mujeres	60	60	120
hombres	30	50	80
total	90	110	200

Tabla de doble entrada con las 200 personas. Las filas son «mujeres», «hombres» y «total»; las columnas, «usa TP», «no usa TP» y «total». El dibujo no está a escala: es una tabla, no un gráfico, así que los números se leen en su casilla y no se mide nada.

Solución

Se ordenan los datos: mujeres 120, de las que usan transporte público 60; hombres 80, de los que lo usan $90 - 60 = 30$.

La condicionada restringe el total a las mujeres: $P(TP|M) = 60 : 120 = 1/2$.

La probabilidad es **0,5**.

Ojo. El denominador no es 200 ni 90. Al condicionar por «es mujer», el conjunto de casos posibles pasa a ser el de las mujeres: 120.

45

Con esos mismos datos, ¿son independientes los sucesos «ser mujer» y «usar transporte público»?

Solución

Se compara la condicionada con la probabilidad a secas.

$$P(TP) = 90 : 200 = 0,45.$$

$$P(TP|M) = 60 : 120 = 0,5.$$

Como $0,5 \neq 0,45$, saber que la persona es mujer sí cambia la probabilidad: los sucesos **no son independientes**.

También se ve con el producto: si fueran independientes, $P(M \cap TP)$ sería $0,6 \cdot 0,45 = 0,27$, y en realidad es $60 : 200 = 0,3$.

Ojo. «no independientes» no quiere decir «incompatibles». Hay 60 personas que son mujeres Y usan transporte público, así que los dos sucesos pasan a la vez con frecuencia; lo que ocurre es que uno informa sobre el otro.

Binomial, normal y muestreo

Lo que hay que saber

Una variable sigue una **binomial** $B(n, p)$ si cuenta los éxitos en n pruebas independientes con la misma probabilidad p . Entonces $P(X = k) = C(n, k) \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$, y su media es $n \cdot p$.

En la **normal** $N(\mu, \sigma)$ se **tipifica** con $z = (x - \mu) : \sigma$ para pasar a la $N(0, 1)$ y poder usar la tabla.

Una **muestra** representa a la población si se ha elegido **al azar**, de modo que todos tengan la misma posibilidad de salir. El tamaño influye en la precisión, pero no arregla un método que ya elige mal: un **sesgo** aparece cuando el método favorece a una parte de la población.

46

Sea X una binomial $B(10; 0,3)$. Calcula $P(X = 2)$ con cuatro decimales y la media de X .

Solución

Con $n = 10$, $p = 0,3$ y $k = 2$: $C(10, 2) = 45$.

$$0,3^2 = 0,09 \text{ y } 0,7^8 = 0,05764801.$$

$$P(X = 2) = 45 \cdot 0,09 \cdot 0,05764801 = 0,2335.$$

La media es $n \cdot p = 10 \cdot 0,3 = 3$.

Ojo. El exponente de 0,7 es 8, no 2. Los fracasos son $n - k$, y confundirlo es el error más fácil: con $0,7^2$ saldría 1,98, que no puede ser una probabilidad.

47

La altura de una población sigue una $N(170; 8)$, en centímetros. Calcula $P(X \leq 178)$ tipificando, usando que $P(Z \leq 1) = 0,8413$.

Solución

Se tipifica: $z = (178 - 170) : 8 = 1$.

Así que $P(X \leq 178) = P(Z \leq 1)$.

Con el dato de la tabla, **$P(X \leq 178) = 0,8413$** .

Ojo. El 178 no se compara con el 8. Tipificar es contar cuántas desviaciones típicas hay desde la media: aquí exactamente una, y de ahí sale el 0,8413.

48

En un instituto de 800 alumnos se quiere saber cuántas horas al día usan el móvil, y se pregunta a los 60 que salen del entrenamiento de baloncesto. ¿Representa esa muestra a la población? Di qué alumnos de los 800 no tienen ninguna posibilidad de ser preguntados, y propón una manera de elegir 60 que sí represente.

Solución

La muestra **no representa** a la población.

Los que no tienen **ninguna** posibilidad de ser preguntados son todos los alumnos que no están en el polideportivo a esa hora: los que no juegan al baloncesto, los que se van a casa al salir de clase y los que ese día no fueron a entrenar.

Como hay alumnos con posibilidad cero de salir, el método no elige al azar entre los 800 y la muestra queda **sesgada** hacia los que hacen deporte.

Una manera que sí representa: numerar a los 800 de la lista del instituto y sortear **60 números**, preguntando a esos 60 donde haga falta encontrarlos.

Ojo. La lista de los 800 es la que manda. Sortear sobre ella da a cada alumno la misma posibilidad; preguntar en el polideportivo se la da solo a unos, y los demás no aparecen por mucho que se alargue la encuesta.