

Ejercicios de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de 2.º de Bachillerato resueltos

48 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 14 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Matrices: operaciones e inversa · Sumar, multiplicar, invertir y despejar (**ejercicios 1, 2, 3, 4**)

Sistemas lineales por Gauss · Triangular, discutir y resolver (**ejercicios 5, 6, 7, 8**)

Inecuaciones y regiones del plano · Semiplanos, vértices y puntos de prueba (**ejercicios 9, 10, 11**)

Programación lineal · Región factible, vértices y función objetivo (**ejercicios 12, 13, 14, 15**)

Financiera: rentas, préstamos y valor actual · Traer al presente, acumular y calcular la cuota (**ejercicios 16, 17, 18**)

Límites y continuidad · Indeterminaciones y continuidad con parámetro (**ejercicios 19, 20, 21**)

Derivadas: reglas y regla de la cadena · Cadena, logaritmo, exponencial y cociente (**ejercicios 22, 23, 24, 25**)

Monotonía, extremos y curvatura · Crecer, decrecer, máximos, mínimos e inflexión (**ejercicios 26, 27, 28**)

Optimización · Plantear la función, usar la condición y derivar (**ejercicios 29, 30, 31**)

Representación de funciones y asíntotas · Dominio, cortes, asíntotas y forma (**ejercicios 32, 33, 34**)

Integral definida y áreas · Primitivas, Barrow y área entre curvas (**ejercicios 35, 36, 37, 38**)

Probabilidad: condicionada, total y Bayes · Árbol, probabilidad total, Bayes e independencia (**ejercicios 39, 40, 41, 42**)

Muestreo e intervalos de confianza · Distribución de la media, intervalos y tamaño (**ejercicios 43, 44, 45, 46**)

Contraste de hipótesis · Hipótesis, región crítica y errores (**ejercicios 47, 48**)

Material propio de solucionariomatematicas.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionariomatematicas.es

Qué entra y qué no. Entran los catorce temas del índice, todos con ejercicios resueltos, y cinco de esos ejercicios llevan su figura: son tres figuras distintas. Esta página es la de **Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II**. Si tu asignatura es **Matemáticas II**, busca su página: **no es el mismo temario**; allí entran la geometría del espacio, el producto vectorial, los determinantes de orden tres y las integrales por partes, que aquí **no están**, y aquí entran la programación lineal, la matemática financiera y la inferencia estadística, que allí no están. **Y hay dos temas que se parten con CCSS I:** de la **matemática financiera**, allí entran el interés simple, el compuesto y la TAE, y aquí las rentas, la amortización de un préstamo y el valor actual; del **muestreo**, allí entran las técnicas (qué es una muestra y cuándo representa a la población) y aquí las distribuciones muestrales, los intervalos de confianza y el contraste de hipótesis; si buscas la mitad de allí, mira la página de CCSS I. **Ojo con una cosa:** el currículo pone el núcleo de la matemática financiera en CCSS I, y aquí entra su escalón de arriba porque así lo reparten muchos libros, no porque el decreto la sitúe en 2.º. Estos ejercicios no sustituyen al temario ni a los del libro.

Ejercicios de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de 2.º de Bachillerato resueltos

Matrices: operaciones e inversa

Lo que hay que saber

Dos matrices se **suman** elemento a elemento, y solo si tienen el mismo tamaño. Multiplicar por un **número** multiplica todos sus elementos.

El **producto** de matrices se hace fila por columna: el elemento de la fila i y la columna j es la suma de los productos de la fila i de la primera por la columna j de la segunda. $\triangle$ El producto de matrices **no es conmutativo**.

Una matriz cuadrada de orden 2 tiene **inversa** si su determinante no es cero. Para $(a, b; c, d)$ la inversa es $(1 : \det) \cdot (d, -b; -c, a)$, con $\det = ad - bc$. Y con la inversa se despeja: de $A \cdot X = C$ sale $X = A^{-1} \cdot C$.

- 1 Dadas $A = (1, 2; 3, 4)$ y $B = (0, 1; -1, 2)$, calcula $A + B$ y $2A$.

Solución

La suma va elemento a elemento: $1 + 0 = 1$, $2 + 1 = 3$, $3 + (-1) = 2$ y $4 + 2 = 6$.

$$A + B = (1, 3; 2, 6).$$

Multiplicar por 2 multiplica los cuatro elementos: $2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$ y $2 \cdot 4 = 8$.

$$2A = (2, 4; 6, 8).$$

Ojo. Multiplicar por 2 no es sumar 2. Sumando 2 a cada elemento saldría $(3, 4; 5, 6)$, que es otra matriz.

- 2 Con las mismas $A = (1, 2; 3, 4)$ y $B = (0, 1; -1, 2)$, calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$ y comprueba que no son iguales.

Solución

Para $A \cdot B$, fila por columna. Primera fila de A por primera columna de B: $1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -2$. Por la segunda columna: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$.

Segunda fila de A por las dos columnas: $3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = -4$ y $3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$.

$$A \cdot B = (-2, 5; -4, 11).$$

Para $B \cdot A$ se repite al revés: $0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 3$, $0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 4$, $-1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 5$ y $-1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 6$.

$$B \cdot A = (3, 4; 5, 6), \text{ que no es } A \cdot B.$$

Ojo. No coinciden ni en un elemento. El producto de matrices depende del orden, así que «multiplicar por B» no significa lo mismo por la izquierda que por la derecha.

3 Halla la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y compruébala.

Solución

Primero el determinante: $\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$. No es cero, así que la inversa existe.

Se cambian de sitio los elementos de la diagonal y de signo los otros dos: $(4, -2; -3, 1)$, y se divide todo entre el determinante.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Comprobación, multiplicando: $1 \cdot (-2) + 2 \cdot (3/2) = 1$ y $1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1/2) = 0$ en la primera fila; $3 \cdot (-2) + 4 \cdot (3/2) = 0$ y $3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1/2) = 1$ en la segunda.

Sale $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la identidad.

Ojo. El determinante es negativo y no pasa nada. Lo único que importa es que no sea cero; si valiera 0 habría que dividir entre 0 y la inversa no existiría.

4 Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = C$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Solución

Se multiplica por la inversa de A **por la izquierda**, que es el lado por el que A está pegada a X : $X = A^{-1} \cdot C$.

Con $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$: la primera componente es $-2 \cdot 5 + 1 \cdot 11 = 1$ y la segunda, $(3/2) \cdot 5 + (-1/2) \cdot 11 = 2$.

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Comprobación: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$ y $3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$, que es C .

Ojo. Hay que multiplicar por la izquierda. Haciendo $C \cdot A^{-1}$ los tamaños ni encajan, y aunque encajaran daría otra cosa: el producto no es conmutativo.

Sistemas lineales por Gauss

Lo que hay que saber

El **método de Gauss** transforma el sistema en uno escalonado haciendo tres cosas que no cambian las soluciones: intercambiar dos ecuaciones, multiplicar una por un número distinto de cero, y sumarle a una ecuación otra multiplicada por un número.

Al llegar al final se mira **en este orden**: (1) si ha aparecido una **igualdad imposible** como $0 = 3$, el sistema es **incompatible** y no hay nada más que mirar; (2) si no, se cuentan las ecuaciones que **conservan alguna incógnita**: si son tantas como incógnitas, es **compatible determinado**; (3) y si son menos, es **compatible indeterminado**, con **tantos parámetros como incógnitas menos ecuaciones** de esas.

△ El orden no es un adorno: en $x + y + z = 1$, $2x + 2y + 2z = 9$ queda una sola ecuación con incógnitas y un $0 = 7$, así que sin mirar primero esa igualdad imposible saldría «indeterminado con dos parámetros» para un sistema que no tiene **ninguna** solución.

Con un **parámetro** hay que estudiar aparte los valores que anulan el determinante del sistema: son los únicos que pueden cambiar la clasificación.

5 Resuelve por Gauss el sistema $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$, $x + 2y - z = 2$.

Solución

A la primera y la tercera se les resta lo que haga falta. Sumando la primera y la tercera: $2x + 3y = 8$.

Restando la segunda de la primera: $-x + 2y = 3$, de donde $x = 2y - 3$.

Se sustituye: $2(2y - 3) + 3y = 8$, o sea $4y - 6 + 3y = 8$ y $7y = 14$.

Así que $y = 2$, $x = 1$ y, de la primera, $z = 6 - 1 - 2 = 3$.

Comprobación en las tres: $1 + 2 + 3 = 6$ OK, $2 \cdot 1 - 2 + 3 = 3$ OK y $1 + 4 - 3 = 2$ OK.

Ojo. Hay que comprobar en las TRES ecuaciones. Un error de signo al triangular puede dar una terna que cumple dos y falla la que no se usó para despejar.

6 Discute y resuelve el sistema $x + y = 1$, $2x + 2y = 2$.

Solución

La segunda ecuación es la primera multiplicada por 2, así que no aporta nada nuevo: al restarle el doble de la primera queda $0 = 0$.

Queda una sola ecuación con dos incógnitas, así que el sistema es **compatible indeterminado**.

Se llama parámetro a una de ellas: con $y = \lambda$, la primera da $x = 1 - \lambda$.

Las soluciones son $x = 1 - \lambda$, $y = \lambda$, una por cada valor de λ .

Ojo. « $0 = 0$ » no significa que el sistema no tenga solución. Significa que esa ecuación sobra: tiene infinitas.

7 Discute el sistema $x + y = 1$, $2x + 2y = 5$.

Solución

Los coeficientes de la segunda son el doble de los de la primera, pero el término de la derecha no: el doble de 1 es 2, no 5.

Restándole a la segunda el doble de la primera queda $0 = 3$, que es imposible.

El sistema es **incompatible**: no tiene ninguna solución.

Ojo. La diferencia con el caso anterior está solo en el término de la derecha. Con un 2 en lugar del 5, el mismo sistema tendría infinitas soluciones.

8 Discute según el valor de a el sistema $x + y = 2$, $x + ay = 4$.

Solución

Restando la primera de la segunda queda $(a - 1)y = 2$.

Si $a \neq 1$, se puede dividir: $y = 2 : (a - 1)$ y, de la primera, $x = 2 - y$. El sistema es compatible determinado.

Si $a = 1$, queda $0 = 2$, que es imposible: el sistema es **incompatible**. Y se ve directamente, porque entonces las dos ecuaciones dicen $x + y = 2$ y $x + y = 4$.

Por ejemplo, con $a = 3$: $y = 2 : 2 = 1$ y $x = 2 - 1 = 1$. Comprobación: $1 + 1 = 2$ OK y $1 + 3 \cdot 1 = 4$ OK.

Ojo. El valor $a = 1$ no se puede meter en la fórmula $y = 2 : (a - 1)$ para «ver qué sale». Ahí la división no existe, y por eso ese caso se estudia aparte.

Inecuaciones y regiones del plano

Lo que hay que saber

Una inecuación de dos incógnitas como $ax + by \leq c$ representa un **semiplano**: todo lo que queda a un lado de la recta $ax + by = c$, incluida la recta si la desigualdad no es estricta.

Para saber qué lado es, se coge un **punto de prueba** que no esté en la recta (el origen, si se puede) y se mira si cumple la inecuación.

La región de un sistema de inecuaciones es la **intersección** de sus semiplanos. Sus **vértices** salen de cortar las rectas dos a dos, y solo valen los cortes que cumplen todas las inecuaciones.

9 Halla los vértices de la región $x + y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Solución

Las tres rectas son $x + y = 4$, $x = 0$ (el eje y) y $y = 0$ (el eje x).

Cortando los dos ejes: **(0, 0)**.

Cortando $x + y = 4$ con $y = 0$: **(4, 0)**. Y con $x = 0$: **(0, 4)**.

Los tres cumplen las tres inecuaciones, así que los vértices son **(0, 0)**, **(4, 0)** y **(0, 4)**.

Ojo. No hay un cuarto vértice. La región es un triángulo, no un cuadrilátero: solo hay tres rectas y se cortan dos a dos en tres puntos.

10 ¿Pertenece el punto (1, 2) a la región $2x + y \leq 5$, $x \geq 0$, $y \geq 0$?

Solución

Se comprueba una por una. En la primera: $2 \cdot 1 + 2 = 4$, y $4 \leq 5$ se cumple.

En las otras dos: $1 \geq 0$ se cumple y $2 \geq 0$ también.

Las tres se cumplen, así que **sí pertenece** a la región.

Ojo. Hacen falta las tres. Un punto como $(-1, 7)$ cumple la primera ($2 \cdot (-1) + 7 = 5$) y no cumple $x \geq 0$, así que queda fuera.

11 Escribe la inecuación del semiplano limitado por la recta $3x + 2y = 6$ que contiene al origen.

Solución

Se usa el origen como punto de prueba: $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$.

Hay que decidir el sentido de la desigualdad para que el origen la cumpla, y $0 \leq 6$ es cierto.

El semiplano es **$3x + 2y \leq 6$** .

Ojo. Con $\geq$ el origen quedaría fuera, porque $0 \geq 6$ es falso. El punto de prueba no decide la recta: decide de qué lado de ella se está.

Programación lineal

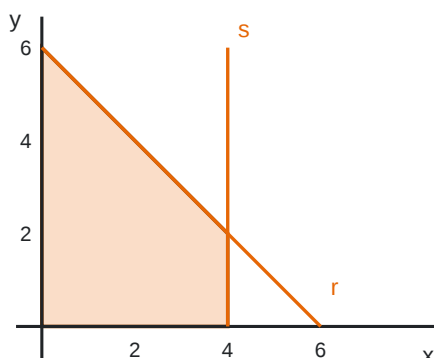
Lo que hay que saber

Un problema de programación lineal busca el máximo o el mínimo de una **función objetivo** lineal sobre la **región factible** que definen unas restricciones.

Si la región es un polígono cerrado, el óptimo se alcanza siempre en un **vértice** (o en todo un lado, si la función objetivo es paralela a él). Así que basta evaluar la función en los vértices y comparar.

△ Hay que evaluar en **todos** los vértices: la función objetivo no tiene por qué crecer en la dirección que uno imagina, y un vértice «pequeño» puede dar el máximo.

12 Mira el dibujo. Es la región factible de $x + y \leq 6$, $x \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Halla sus vértices.



La parte del plano pintada de naranja claro, con los dos ejes y dos rectas que la limitan: la recta r , inclinada, y la recta s , vertical. El dibujo está a escala: una unidad del eje x mide lo mismo que una del eje y , y los dos ejes están marcados de dos en dos, así que las esquinas de la región se pueden leer contando.

Solución

Las cuatro rectas son $x + y = 6$ (la inclinada), $x = 4$ (la vertical) y los dos ejes.

Los dos ejes se cortan en **(0, 0)**.

La vertical corta al eje x en **(4, 0)**, y a la inclinada donde $4 + y = 6$, o sea en **(4, 2)**.

La inclinada corta al eje y en **(0, 6)**.

Los cuatro cumplen las cuatro inecuaciones, así que los vértices son **(0, 0)**, **(4, 0)**, **(4, 2)** y **(0, 6)**.

Ojo. El corte de la inclinada con el eje x , que es **(6, 0)**, NO es vértice: no cumple $x \leq 4$. Cortar dos rectas no basta; hay que comprobar las restricciones.

13 Con esa misma región, halla el máximo de $f(x, y) = 3x + 2y$.

Solución

Se evalúa en los cuatro vértices.

En **(0, 0)**: **0**. En **(4, 0)**: **$3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 12$** .

En **(4, 2)**: **$3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16$** . En **(0, 6)**: **$3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12$** .

El mayor es **16**, en el vértice **(4, 2)**.

Ojo. Los vértices **(4, 0)** y **(0, 6)** dan los dos 12, y no son el máximo. Si uno se para en el primero que repite, se queda con un valor que no es el mayor.

14 Con esa misma región, halla el mínimo de $g(x, y) = x + 3y$.

Solución

Otra vez en los cuatro vértices.

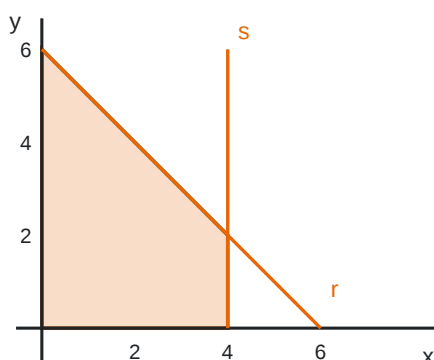
En $(0, 0)$: **0**. En $(4, 0)$: **$4 + 3 \cdot 0 = 4$** .

En $(4, 2)$: **$4 + 3 \cdot 2 = 10$** . En $(0, 6)$: **$0 + 3 \cdot 6 = 18$** .

El menor es **0**, en el vértice **$(0, 0)$** .

Ojo. El máximo de g está en $(0, 6)$ y el de f estaba en $(4, 2)$. La región es la misma: lo que cambia el vértice óptimo es la función objetivo.

15 Una empresa fabrica x cajas del tipo A y y del tipo B. Cada A deja 5 € de beneficio y cada B, 4 €. No puede hacer más de 4 cajas de A, y entre las dos no más de 6. Usa el dibujo de la región. ¿Qué plan le da el máximo beneficio?



La parte del plano pintada de naranja claro, con los dos ejes y dos rectas que la limitan: la recta r , inclinada, y la recta s , vertical. El dibujo está a escala: una unidad del eje x mide lo mismo que una del eje y , y los dos ejes están marcados de dos en dos, así que las esquinas de la región se pueden leer contando.

Solución

Las restricciones son $x \leq 4$, $x + y \leq 6$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$: la misma región del dibujo.

La función objetivo es **$5x + 4y$** .

En $(0, 0)$: 0. En $(4, 0)$: **$5 \cdot 4 = 20$** . En $(4, 2)$: **$5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 28$** . En $(0, 6)$: **$4 \cdot 6 = 24$** .

El máximo es **28 €**, haciendo **4 cajas de A y 2 de B**.

Ojo. No conviene hacer solo cajas de A aunque dejen más cada una. Con 4 de A se llega al tope de A y sobran 2 huecos del total, y llenarlos con B añade 8 € más.

Financiera: rentas, préstamos y valor actual

Lo que hay que saber

El **valor actual** de un capital C que se cobrará dentro de t años al tanto i es $C : (1 + i)^t$: es lo que habría que tener hoy para llegar a C .

Una **renta** de n pagos iguales de P al final de cada periodo acumula, al final, $P \cdot ((1 + i)^n - 1) : i$.

La **cuota** de un préstamo de C a n periodos sale de igualar el valor actual de las cuotas al dinero prestado: $\text{cuota} = C \cdot i : (1 - (1 + i)^{-n})$.

- 16** ¿Cuál es el valor actual de 1 000 € que se cobrarán dentro de 3 años, al 5 % anual? Da el resultado con dos decimales.

Solución

Hay que dividir por el índice elevado a los años: $1\,000 : 1,05^3$.

$$1,05^3 = 1,157625.$$

$$1\,000 : 1,157625 = 863,84 \text{ €}.$$

Comprobación: $863,84 \cdot 1,157625$ son 1 000 € salvo el redondeo.

Ojo. El valor actual es MENOR que los 1 000 €. Si fuera mayor, el dinero de hoy valdría menos que el de mañana y el interés iría al revés.

- 17** Se ingresan 500 € al final de cada año durante 3 años, al 4 % anual. ¿Cuánto hay al final, con dos decimales?

Solución

El primer ingreso gana intereses 2 años, el segundo 1 y el tercero ninguno: $500 \cdot 1,04^2 + 500 \cdot 1,04 + 500$.

$$1,04^2 = 1,0816, \text{ así que la suma de los tres factores es } 1,0816 + 1,04 + 1 = 3,1216.$$

$$500 \cdot 3,1216 = 1\,560,80 \text{ €}.$$

Con la fórmula de la renta sale lo mismo: $500 \cdot (1,04^3 - 1) : 0,04 = 1\,560,80$.

Ojo. No son 1 500 €. Los 1 500 serían los tres ingresos sin intereses; los 60,80 € de más son lo que han rendido los dos primeros.

- 18** Un préstamo de 6 000 € se devuelve en 3 cuotas anuales iguales al 5 %. ¿Cuánto es cada cuota, con dos decimales?

Solución

Se usa la fórmula de la cuota: $6\,000 \cdot 0,05 : (1 - 1,05^{-3})$.

$$1,05^{-3} = 1 : 1,157625 = 0,8638376, \text{ así que el denominador es } 1 - 0,8638376 = 0,1361624.$$

El numerador es $6\,000 \cdot 0,05 = 300$.

$$300 : 0,1361624 = 2\,203,25 \text{ € por cuota}.$$

Ojo. Las tres cuotas suman 6 609,75 €, más que los 6 000 € prestados. La diferencia son los intereses; una cuota de 2 000 € solo devolvería el capital.

Límites y continuidad

Lo que hay que saber

Para calcular un límite se sustituye. Si sale $0/0$, hay que **factorizar** y simplificar el factor que se anula; si sale ∞/∞ en un cociente de polinomios, se comparan los **grados**.

Si el **grado** de arriba es mayor, el límite en el infinito es infinito **con el signo que le toque** ($+\infty$ o $-\infty$ según los coeficientes y según si $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$); si es mayor el de abajo, 0; y si los dos grados son **iguales**, el límite es el cociente de los **coeficientes principales**.

Una función es **continua** en un punto si los dos límites laterales y el valor de la función coinciden. Si hay un **parámetro**, se iguala lo que da cada lado y se despeja.

19 Calcula el límite de $(2x^2 - x) : (x^2 + 3)$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Solución

Arriba y abajo el grado es 2, así que sale la indeterminación ∞/∞ .

Con grados iguales, el límite es el cociente de los coeficientes principales: **$2 : 1 = 2$** .

El límite es **2**.

Ojo. El $-x$ y el $+3$ no cuentan. Al crecer x , los términos de grado menor se quedan atrás; lo que decide son los de grado máximo y sus coeficientes.

20 Calcula el límite de $(x^2 - 4) : (x^2 - 3x + 2)$ cuando $x \rightarrow 2$.

Solución

Al sustituir salen 0 arriba y 0 abajo, así que hay que factorizar.

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \text{ y } x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1).$$

Se cancela el factor $(x - 2)$, que es el que se anula, y queda $(x + 2) : (x - 1)$.

Ahora se sustituye: **$(2 + 2) : (2 - 1) = 4$** .

El límite es **4**.

Ojo. Los dos ceros vienen del MISMO factor, y por eso se puede cancelar. Si el denominador se anulara por otro factor, el límite podría ser infinito.

21 Halla el valor de k para que $f(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 1$, y kx si $x > 1$, sea continua en $x = 1$.

Solución

Por la izquierda y en el punto se usa el primer trozo: **$1^2 + 1 = 2$** .

Por la derecha se usa el segundo: el límite es **$k \cdot 1 = k$** .

Para que sea continua tienen que coincidir: **$k = 2$** .

Comprobación: con $k = 2$, por la derecha el límite es $2 \cdot 1 = 2$, igual que por la izquierda y que $f(1)$.

Ojo. El valor en el punto lo da el primer trozo, porque el $\leq$ lo incluye. Si los dos trozos fueran estrictos, en $x = 1$ la función no existiría y no habría ningún k que la hiciera continua.

Derivadas: reglas y regla de la cadena

Lo que hay que saber

La **regla de la cadena**: la derivada de $f(g(x))$ es $f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Primero se deriva lo de fuera dejando lo de dentro quieto, y después se multiplica por la derivada de lo de dentro.

Derivadas que hacen falta: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(e^u)' = e^u \cdot u'$ y $(\ln u)' = u' : u$.

Cociente: $(u/v)' = (u'v - uv') : v^2$. La derivada en un punto es la **pendiente** de la recta tangente ahí, y la tangente es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

22 Deriva $f(x) = (3x^2 - 1)^4$.

Solución

Lo de fuera es una cuarta potencia y lo de dentro es $3x^2 - 1$.

Derivando lo de fuera: $4(3x^2 - 1)^3$.

Y la derivada de lo de dentro es $6x$.

Multiplicando: $f'(x) = 24x(3x^2 - 1)^3$.

Ojo. No basta con bajar el 4 y restar uno al exponente. Sin multiplicar por la derivada de lo de dentro saldría $4(3x^2 - 1)^3$, que es la derivada de otra función.

23 Deriva $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ y $h(x) = e^{3x}$.

Solución

En g , lo de dentro es $x^2 + 1$ y su derivada es $2x$. La regla del logaritmo pone la derivada de dentro arriba y lo de dentro abajo: $g'(x) = 2x : (x^2 + 1)$.

En h , lo de dentro es $3x$ y su derivada es 3 . La exponencial se queda igual y se multiplica: $h'(x) = 3e^{3x}$.

Ojo. La derivada de $\ln(x^2 + 1)$ no es $1 : (x^2 + 1)$. Falta el $2x$ de la cadena, y sin él la derivada no se anula donde debe.

24 Deriva $p(x) = (x^2 + 1) : (x - 2)$.

Solución

Con $u = x^2 + 1$ y $v = x - 2$, se tiene $u' = 2x$ y $v' = 1$.

El numerador de la derivada es $2x(x - 2) - (x^2 + 1) \cdot 1$, que desarrollado es $2x^2 - 4x - x^2 - 1$.

Agrupando: $x^2 - 4x - 1$.

$p'(x) = (x^2 - 4x - 1) : (x - 2)^2$.

Ojo. El denominador va al CUADRADO. Dejándolo en $(x - 2)$ sale otra función, no la derivada de p .
△ No se distingue mirando dónde se anula: el numerador es el mismo, así que las dos se anulan en los mismos puntos. Lo que cambia es el **valor**, y para $x < 2$ también el signo: en $x = 0$, la correcta vale $-0,25$ y la otra $+0,5$. △ Para $x > 2$ las dos tienen el mismo signo, así que el signo solo las distingue a la izquierda del 2.

25 Halla la recta tangente a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en $x = 1$.

Solución

El punto: $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, así que la tangente pasa por $(1, 0)$.

La pendiente: $f'(x) = 3x^2 - 6x$, y $f'(1) = 3 - 6 = -3$.

La tangente es $y - 0 = -3(x - 1)$, o sea $y = -3x + 3$.

Ojo. La pendiente es negativa, así que la recta baja. Si saliera positiva habría un error de signo: en $x = 1$ la función está decreciendo.

Monotonía, extremos y curvatura

Lo que hay que saber

Donde f' es **positiva** la función crece y donde es **negativa** decrece. Los puntos donde f' se anula son los candidatos a máximo o mínimo.

Se decide por el **signo de f'** antes y después: si pasa de $+$ a $-$, máximo; de $-$ a $+$, mínimo. También sirve la segunda derivada: $f'' < 0$ máximo, $f'' > 0$ mínimo.

Donde f'' es positiva la curva es **convexa** (abierta hacia arriba) y donde es negativa, **concava**. Un punto donde f'' se anula y cambia de signo es un punto de **inflexión**.

26 Estudia el crecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ y halla sus extremos.

Solución

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, que se anula en $x = 0$ y $x = 2$.

Signo de f' en cada tramo: en $x = -1$, $f' = 9$, positiva; en $x = 1$, $f' = -3$, negativa; en $x = 3$, $f' = 9$, positiva.

Así que **crece** antes de 0 y después de 2, y **decrece** entre 0 y 2.

Pasa de crecer a decrecer en $x = 0$: hay un **máximo**, y $f(0) = 2$. Y de decrecer a crecer en $x = 2$: un **mínimo**, con $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$.

Ojo. Que f' se anule no basta para que haya un extremo. Hace falta que el signo CAMBIE; si no cambiara, sería un punto de inflexión con tangente horizontal.

27 Estudia la curvatura de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ y halla su punto de inflexión.

Solución

Se deriva otra vez: $f''(x) = 6x - 6$, que se anula en $x = 1$.

Signo de f'' : en $x = 0$, $f'' = -6$, negativa; en $x = 2$, $f'' = 6$, positiva.

Así que la curva es **cóncava** antes de 1 y **convexa** después, y en $x = 1$ el signo cambia: es un punto de **inflexión**.

Su altura es $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, así que el punto es **(1, 0)**.

Ojo. El punto de inflexión cae justo entre el máximo y el mínimo, y no es casualidad: en una cúbica la segunda derivada es una recta y se anula en el punto medio de los dos extremos.

28 Una función cumple $f'(3) = 0$ y su segunda derivada es $f''(x) = 2x - 10$. ¿Qué hay en $x = 3$?

Solución

Que la primera derivada se anule en $x = 3$ lo convierte en candidato a extremo.

Hay que evaluar la segunda derivada ahí: $f''(3) = 2 \cdot 3 - 10 = -4$.

La segunda derivada decide: como $f''(3) = -4$ es negativa, la curva es cóncava ahí.

Una tangente horizontal en un trozo cóncavo es un **máximo relativo**.

Ojo. Con $f''(3) = 0$ no se podría decidir así. Ese caso no dice «no hay extremo»: dice que hay que mirar el signo de f' a los lados.

Optimización

Lo que hay que saber

Un problema de optimización se resuelve en tres pasos: escribir la magnitud que hay que hacer máxima o mínima, usar la **condición del problema** para dejarla con una sola variable, y derivar.

Al final hay que **comprobar** que el punto hallado es el extremo que se pedía, por el signo de la derivada o por la segunda.

△ Y hay que comprobar que la solución **tiene sentido** en el problema: una longitud no puede ser negativa, y el número de unidades de algo suele tener que ser entero.

29 De todos los rectángulos de perímetro 20, halla el de área máxima.

Solución

Si los lados son x e y , el perímetro da la condición: $2x + 2y = 20$, o sea $y = 10 - x$.

El área es $A = x \cdot y$, y con la condición queda con una sola variable: $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$.

Se deriva e iguala a cero: $A'(x) = 10 - 2x = 0$, así que $x = 5$.

Es un máximo porque $A''(x) = -2$ es negativa. Entonces $y = 10 - 5 = 5$ y el área es $5 \cdot 5 = 25$.

El rectángulo de área máxima es el **cuadrado de lado 5**.

Ojo. La condición hay que usarla antes de derivar. Derivando $A = x \cdot y$ respecto de x sin sustituir la y , la y se trataría como constante y no saldría nada.

30 Una caja sin tapa, de base cuadrada, tiene que tener un volumen de 32. Halla las medidas que hacen mínima la superficie.

Solución

Si el lado de la base es x y la altura h , el volumen da la condición: $x^2 h = 32$, o sea $h = 32 : x^2$.

La superficie, sin tapa, es la base más las cuatro caras: $S = x^2 + 4xh$. Sustituyendo: $S(x) = x^2 + 128 : x$.

Se deriva: $S'(x) = 2x - 128 : x^2$, y al igualar a cero queda $2x^3 = 128$, o sea $x^3 = 64$ y $x = 4$.

Es un mínimo porque $S''(x) = 2 + 256 : x^3$ y en $x = 4$ vale $2 + 4 = 6$, positiva.

Entonces $h = 32 : 16 = 2$ y la superficie es $16 + 32 = 48$.

Ojo. Las cuatro caras son $4xh$, no $6xh$ ni $2xh$. La caja no tiene tapa, así que hay UNA base y CUATRO paredes; contar seis caras daría otra respuesta.

- 31 El coste de producir x unidades de un producto es $C(x) = x^2 - 20x + 150$. ¿Cuántas unidades hacen el coste mínimo, y cuánto es?

Solución

Se deriva: $C'(x) = 2x - 20$, que se anula en $x = 10$.

Es un mínimo porque $C''(x) = 2$ es positiva.

Y tiene sentido en el problema: $x = 10$ es un número entero de unidades, que es lo que hace falta para poder producirlas.

El coste mínimo es $C(10) = 100 - 200 + 150 = 50$.

Ojo. El coste mínimo no es cero ni está en $x = 0$. En $x = 0$ el coste es 150 —lo que cuesta tener la fábrica parada— y producir 10 unidades sale más barato que no producir ninguna.

Representación de funciones y asíntotas

Lo que hay que saber

Una función racional tiene una **asíntota vertical** en cada valor que anula el denominador sin anular el numerador.

Para las horizontales se mira el límite en el infinito: si es un número, ahí está la **asíntota horizontal**. Si el grado de arriba supera en uno al de abajo, hay **asíntota oblicua**, y sale de la división.

△ Horizontal y oblicua no pueden darse a la vez: o el límite en el infinito es finito, o la función se va como una recta inclinada.

- 32 Halla el dominio, los cortes con los ejes y las asíntotas de $f(x) = 2x : (x - 1)$.

Solución

El denominador se anula en $x = 1$, así que el dominio es todos los reales menos el 1.

Corte con el eje y : $f(0) = 0 : (-1) = 0$, el punto **(0, 0)**. Corte con el eje x : $2x = 0$ da el mismo **(0, 0)**.

En $x = 1$ el numerador vale 2 y el denominador 0, así que hay asíntota vertical $x = 1$.

En el infinito, los grados son iguales y el límite es el cociente de los coeficientes: $2 : 1 = 2$, así que hay asíntota horizontal $y = 2$.

Ojo. La función corta a los dos ejes en el MISMO punto, el origen, y eso no es un error: pasa cuando el numerador se anula en $x = 0$ y el denominador no. Si se anularan los dos, $x = 0$ no estaría en el dominio y no habría corte ninguno.

- 33 Halla las asíntotas de $g(x) = (x^2 + 1) : x$.

Solución

El denominador se anula en $x = 0$, donde el numerador vale 1, así que hay asíntota vertical $x = 0$.

En el infinito el grado de arriba (2) supera en uno al de abajo (1), así que **no hay asíntota horizontal** y sí oblicua.

Dividiendo: $(x^2 + 1) : x = x + 1 : x$, y el término $1 : x$ se va a cero.

La asíntota oblicua es $y = x$.

Ojo. No hay que buscar también una horizontal. Al haber oblicua, el límite en el infinito es infinito y no puede haber ninguna recta horizontal de asíntota.

- 34** Con lo que ya se sabe de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ (crece antes de 0 y después de 2, decrece entre 0 y 2, máximo en (0, 2), mínimo en (2, -2)), ¿cuántas veces corta al eje x?

Solución

Antes del máximo la función viene de $-\infty$ y sube hasta $f(0) = 2$, que es positivo: ahí cruza el eje **una vez**.

Entre el máximo y el mínimo baja de 2 a -2, así que pasa de positivo a negativo y cruza **otra vez**.

Después del mínimo sube de -2 a $+\infty$ y cruza una **tercera vez**.

Así que corta al eje x **tres veces**. Una de las raíces se ve a simple vista: **$f(1) = 0$** .

Ojo. No hace falta resolver la ecuación para contar las raíces. Basta el signo de la función en el máximo y en el mínimo: si los dos fueran positivos, solo cruzaría una vez.

Integral definida y áreas

Lo que hay que saber

Una **primitiva** de x^n es $x^{n+1} : (n + 1)$ **siempre que $n \neq -1$** (si $n = -1$ el denominador sería 0, y la primitiva de $1 : x$ es $\ln|x|$). La integral de una suma es la suma de las integrales, y las constantes salen fuera.

La **regla de Barrow**: la integral definida de a a b vale $F(b) - F(a)$, donde F es una primitiva. El resultado es un número, no una función.

El **área** entre una curva y el eje x, donde la curva está por encima, es esa integral. Entre **dos curvas**, se integra la diferencia «la de arriba menos la de abajo» entre sus puntos de corte.

- 35** Calcula la integral definida de x^2 entre 0 y 2.

Solución

Una primitiva de x^2 es $x^3 : 3$.

Por Barrow: $2^3 : 3 - 0^3 : 3$.

$8 : 3 - 0 = 8/3$.

Ojo. El resultado es un número, 8/3. Dejar $x^3 : 3$ sería la primitiva, no la integral definida.

- 36** Calcula la integral definida de $2x - 1$ entre 1 y 3.

Solución

Una primitiva es $x^2 - x$.

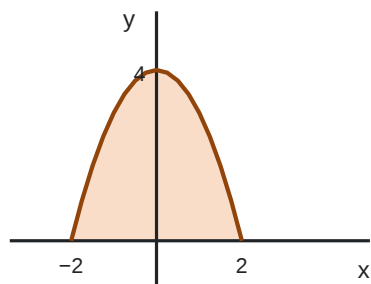
En el extremo de arriba: $3^2 - 3 = 6$. En el de abajo: $1^2 - 1 = 0$.

Por Barrow: **$6 - 0 = 6$.**

Ojo. El valor de abajo sale 0 y hay que escribirlo igual. Dar por hecho que un extremo «no aporta» es el camino más corto a equivocarse cuando no vale cero.

37

Mira el dibujo. Calcula el área encerrada entre la curva $f(x) = 4 - x^2$ y el eje x .



Una parábola abierta hacia abajo que corta al eje x en dos puntos, con la zona entre la curva y el eje pintada de naranja claro. El dibujo está a escala: una unidad del eje x mide lo mismo que una del eje y , y los cortes con el eje y y la altura del vértice están rotulados.

Solución

Primero los cortes con el eje: $4 - x^2 = 0$ da $x = -2$ y $x = 2$, que son los límites de integración.

Entre ellos la curva está por encima del eje, así que el área es la integral de $4 - x^2$ de -2 a 2 .

Una primitiva es $4x - x^3 : 3$.

En $x = 2$: $8 - 8/3 = 16/3$. En $x = -2$: $-8 + 8/3 = -16/3$.

El área es $16/3 - (-16/3) = 32/3$.

Ojo. El área no es $16/3$. Ese es solo el valor de la primitiva en el extremo de arriba; hay que restarle el de abajo, que aquí es negativo y por eso el área sale el doble.

38

Calcula el área encerrada entre las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$.

Solución

Primero los puntos de corte: $x^2 = 2x$ da $x(x - 2) = 0$, o sea $x = 0$ y $x = 2$.

Entre 0 y 2 , ¿cuál va por arriba? En $x = 1$, $f = 1$ y $g = 2$, así que la de arriba es g .

Se integra la diferencia: la integral de $2x - x^2$ de 0 a 2 , cuya primitiva es $x^2 - x^3 : 3$.

En $x = 2$: $4 - 8/3 = 4/3$. En $x = 0$: 0 .

El área es $4/3$.

Ojo. Hay que comprobar cuál va por arriba. Integrando $x^2 - 2x$ saldría $-4/3$, y un área no puede ser negativa: el signo avisa de que se han puesto al revés.

Probabilidad: condicionada, total y Bayes

Lo que hay que saber

La **probabilidad condicionada** $P(B|A)$ vale $P(A \cap B) : P(A)$, y para eso hace falta **$P(A) > 0$** (si A no puede pasar, no se puede condicionar a que haya pasado). En un **árbol**, las ramas de un mismo camino se multiplican y los caminos distintos se suman.

La **probabilidad total** de un suceso es la suma de lo que aporta cada camino que lleva a él. El **teorema de Bayes** hace el camino de vuelta: $P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A) : P(B)$ **con $P(B) > 0$** , es decir, el camino que interesa dividido por el total.

Dos sucesos son **independientes** si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; dicho con una condicionada, si $P(B|A) = P(B)$, que pide **$P(A) > 0$** . La primera forma vale siempre. $\triangle$ Independiente no es lo mismo que incompatible: dos sucesos independientes **pueden** pasar a la vez. Que pasen a menudo o casi nunca depende de lo grandes que sean sus probabilidades, no de que sean independientes: dos independientes de 0,02 coinciden con probabilidad 0,0004.

39

Dos máquinas fabrican piezas: la A hace el 60 % y la B el 40 %. De las de A sale defectuosa el 2 %, y de las de B el 5 %. Con el diagrama de árbol del dibujo, calcula la probabilidad de que una pieza tomada al azar sea defectuosa.

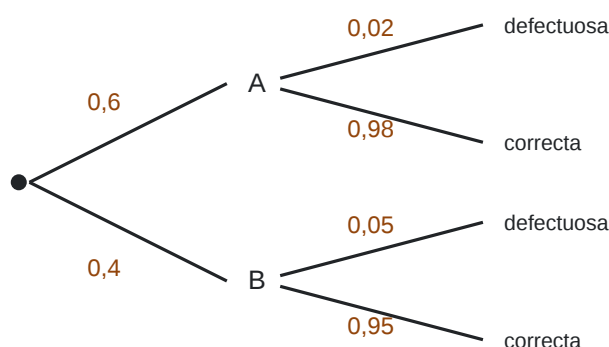


Diagrama de árbol de dos pasos. Del nodo de salida salen dos ramas, una a la máquina A con 0,6 y otra a la B con 0,4. De cada máquina salen otras dos ramas, una a «defectuosa» y otra a «correcta», con sus probabilidades escritas. El dibujo no está a escala: las ramas no miden lo que valen.

Solución

Hay dos caminos que llevan a «defectuosa», y se suman.

Por la máquina A: $0,6 \cdot 0,02 = 0,012$.

Por la máquina B: $0,4 \cdot 0,05 = 0,02$.

Sumando: $0,012 + 0,02 = 0,032$.

La probabilidad es **0,032**, o sea el 3,2 %.

Ojo. No es la media del 2 % y el 5 %, que sería el 3,5 %. Las dos máquinas no fabrican lo mismo: la que menos falla hace más piezas, y eso baja el total.

40

Con esos mismos datos, y mirando otra vez el dibujo, una pieza ha salido defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que la haya fabricado la máquina A?

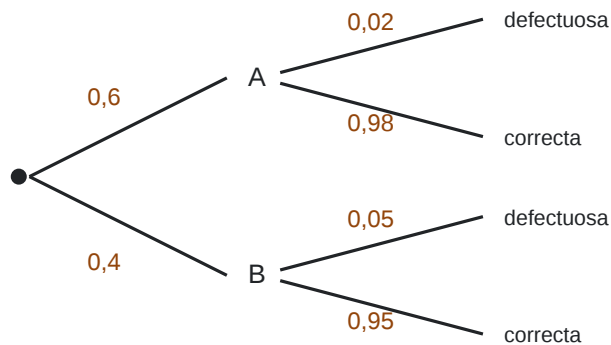


Diagrama de árbol de dos pasos. Del nodo de salida salen dos ramas, una a la máquina A con 0,6 y otra a la B con 0,4. De cada máquina salen otras dos ramas, una a «defectuosa» y otra a «correcta», con sus probabilidades escritas. El dibujo no está a escala: las ramas no miden lo que valen.

Solución

Es el camino de vuelta: se pide $P(A|\text{defectuosa})$, que es el camino que interesa dividido por el total.

El camino que interesa es $0,6 \cdot 0,02 = 0,012$, y el total de defectuosas es $0,032$.

$0,012 : 0,032 = 3/8 = 0,375$.

Ojo. No es 0,6 ni 0,02. El 0,6 es la probabilidad de venir de A sin saber nada, y saber que la pieza es defectuosa la BAJA a 0,375, porque A falla menos que B.

41

Con esos mismos datos, ¿cuál es la probabilidad de que una pieza sea correcta y venga de la máquina B?

Solución

Es un solo camino del árbol: primero B y después correcta.

De las de B, son correctas el $1 - 0,05 = 0,95$.

Multiplicando las dos ramas: $0,4 \cdot 0,95 = 0,38$.

La probabilidad es $0,38$.

Ojo. No se suma, se multiplica. Sumar $0,4 + 0,95$ daría 1,35, que no puede ser una probabilidad: las ramas de un mismo camino van multiplicadas.

- 42 Con esos mismos datos, ¿son independientes los sucesos «venir de la máquina A» y «ser defectuosa»?

Solución

Se compara la condicionada con la probabilidad a secas.

$P(\text{defectuosa}) = 0,032$, calculada antes.

$P(\text{defectuosa}|A) = 0,02$, que es el dato de la máquina A.

Como $0,02 \neq 0,032$, saber de qué máquina viene la pieza cambia la probabilidad de que falle: **no son independientes**.

Ojo. Que no sean independientes no significa que no puedan pasar juntos. De hecho pasan juntos con probabilidad 0,012; lo que ocurre es que uno informa sobre el otro.

Muestreo e intervalos de confianza

Lo que hay que saber

Si la población es $N(\mu, \sigma)$ y se toman muestras de tamaño n , la **media muestral** sigue una $N(\mu, \sigma : \sqrt{n})$. El denominador $\sqrt{n}$ es lo que hace que muestras más grandes den medias menos dispersas.

El **intervalo de confianza** para la media, con σ conocida, es $m \pm z \cdot \sigma : \sqrt{n}$, donde z depende del nivel: 1,96 para el 95 % y 2,576 para el 99 %. El término que se suma y se resta es el **error máximo**.

Para una **proporción**, el intervalo es $p \pm z \cdot \sqrt{p(1 - p) : n}$. Y para que el error no pase de E , se despeja n de la fórmula del error y se **redondea hacia arriba**.

- 43 De una población $N(170; 8)$ se toman muestras de tamaño 64. ¿Qué distribución sigue la media muestral?

Solución

La media sigue siendo la de la población: **170**.

La desviación típica se divide por la raíz del tamaño: $8 : \sqrt{64} = 8 : 8 = 1$.

La media muestral sigue una **$N(170; 1)$** .

Ojo. La desviación típica no se divide por 64, sino por su raíz. Dividiendo por 64 saldría 0,125 y el intervalo de confianza quedaría ocho veces más estrecho de lo que le toca.

- 44 De otra población, con la media DESCONOCIDA y $\sigma = 12$, se toma una muestra de 36 cuya media es 48. Halla el intervalo de confianza para la media al 95 % ($z = 1,96$).

Solución

El error típico de la media es $12 : \sqrt{36} = 12 : 6 = 2$.

El error máximo es $1,96 \cdot 2 = 3,92$.

El intervalo es $48 \pm 3,92$, o sea **(44,08; 51,92)**.

Ojo. El intervalo se centra en la media de la MUESTRA, 48, no en la de la población. La de la población es justo lo que no se conoce: el intervalo sirve para acotarla.

45

¿Qué tamaño de muestra hace falta para que el error máximo no pase de 0,5, con $\sigma = 8$ y al 95 %?

Solución

De la fórmula del error, $E = z \cdot \sigma : \sqrt{n}$, se despeja $\sqrt{n} = z \cdot \sigma : E$.

$$\sqrt{n} = 1,96 \cdot 8 : 0,5 = 31,36.$$

Elevando al cuadrado: $n = 983,4496$.

Como el tamaño tiene que ser entero y el error no puede pasarse, se redondea hacia arriba: $n = 984$.

Ojo. Aquí no se redondea al más cercano. Con $n = 983$ el error se pasaría de 0,5, aunque fuera por poco. Aquí se sube porque un n más grande hace el error más pequeño, así que subir es lo único que lo deja por debajo de 0,5. $\triangle$ No es una regla de «subir siempre»: lo que manda es hacia dónde mueve la cota el redondeo.

46

De 400 personas encuestadas, 160 están a favor. Halla el intervalo de confianza para la proporción al 95 % ($z = 1,96$), con tres decimales.

Solución

La proporción de la muestra es $160 : 400 = 0,4$.

Dentro de la raíz: $0,4 \cdot 0,6 : 400 = 0,0006$.

$\sqrt{0,0006} = 0,0245$, y el error máximo es $1,96 \cdot 0,0245 = 0,048$.

El intervalo es $0,4 \pm 0,048$, o sea **(0,352; 0,448)**.

Ojo. El 400 va dentro de la raíz, junto al producto. Dividiendo al final por 400 en vez de dentro, el error saldría unas veinte veces menor y el intervalo sería falsamente estrecho.

Contraste de hipótesis

Lo que hay que saber

Un contraste enfrenta la **hipótesis nula** H_0 , que es la que se da por buena mientras no haya pruebas en contra, con la **alternativa** H_1 .

Se calcula el **estadístico** $z = (m - \mu) : (\sigma : \sqrt{n})$ y se compara con el valor crítico. Aquí todos los contrastes son **bilaterales** ($H_1: \mu \neq \mu_0$), así que la **región crítica** son las **dos colas**: se rechaza H_0 si $|z| > \text{valor crítico}$, es decir si z queda por encima del crítico o por debajo de su opuesto. $\triangle$ Con z negativo lo que se mira es su **valor absoluto**: un estadístico y su opuesto caen los dos dentro de la región crítica o los dos fuera, porque la región es simétrica. Y si cae dentro o fuera lo decide el valor crítico, no el signo.

Los **valores críticos de un contraste bilateral** son los mismos z del muestreo, y la razón es que el α se reparte entre las **dos colas** —a cada una le toca $\alpha/2$ —, igual que en un intervalo de confianza $1 - \alpha$: **1,96** para $\alpha = 5\%$ (el 95 % de confianza) y **2,576** para $\alpha = 1\%$ (el 99 %). $\triangle$ En un contraste de **una sola cola** los valores serían otros (1,645 y 2,326), y aquí no se usan. $\triangle$ Cuidado también con la palabra «nivel»: en el muestreo es el de **confianza** (95, 99) y en el contraste el de **significación** (5, 1).

El **error de tipo I** es rechazar H_0 siendo verdadera, y su probabilidad es el **nivel de significación** α . El de **tipo II** es no rechazarla siendo falsa.

47

Se afirma que la media de una población es 170, con $\sigma = 8$. En una muestra de 64 la media es 172. Al nivel del 5 % (valor crítico 1,96), ¿se puede rechazar la afirmación?

Solución

Las hipótesis son $H_0: \mu = 170$ y $H_1: \mu \neq 170$, un contraste bilateral.

El error típico es $8 : \sqrt{64} = 1$.

El estadístico es $z = (172 - 170) : 1 = 2$.

Como $2 > 1,96$, cae en la región crítica: **se rechaza H_0** al 5 %.

Ojo. Rechazar H_0 no demuestra que la media sea 172. Solo dice que 170 es poco compatible con lo observado; el valor de la media se acota con un intervalo de confianza, no con el contraste.

48

En ese contraste, ¿qué decisión CONCRETA sería un error de tipo I? Y si se hiciera al 1 % en vez de al 5 %, ¿seguiría rechazándose H_0 ?

Solución

La decisión concreta: concluir que la media **no es 170** cuando en realidad sí lo es.

Al 1 % el valor crítico sube de 1,96 a **2,576**, porque se exige más para rechazar.

El estadístico de la muestra sigue siendo $z = 2$, y $2 < 2,576$, así que al 1 % **ya NO se rechazaría H_0** .

Ojo. Bajar α no hace el contraste «mejor», solo más exigente para rechazar. A cambio de equivocarse menos rechazando una H_0 verdadera, se falla más veces al no rechazar una falsa: es el error de tipo II, que sube.