

## Optimización: ejercicios de matemáticas resueltos paso a paso

10 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 3 temas que trae esta selección.

**Material propio de solucionariomatematicas.es.** Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

**[solucionariomatematicas.es](https://solucionariomatematicas.es)**

# Optimización: ejercicios de matemáticas resueltos paso a paso

## El método: derivar, igualar a cero y comprobar

### Lo que hay que saber

Se deriva, se iguala a cero y se resuelve: ahí están los **puntos críticos**. • Pero eso no basta, por dos motivos. Uno: hay que **comprobar** si cada uno es máximo o mínimo —con la segunda derivada o mirando el signo de la primera a los lados—, porque en un punto de inflexión la derivada también se anula y no hay ni máximo ni mínimo. Y dos: si el problema pide el extremo **en un intervalo cerrado**, los **bordes también son candidatos**, y ahí la derivada no tiene por qué anularse. Se calcula  $f$  en los puntos críticos de dentro Y en los dos bordes, y se compara: el mayor es el máximo y el menor, el mínimo.

1 Halla el mínimo de  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ .

#### Solución

$f'(x) = 2x - 6$ . Se iguala a 0:  $2x - 6 = 0$ , así que  $x = 3$ .

$f''(x) = 2 > 0$ , así que es un **mínimo**.

El mínimo vale **-4**, en  $x = 3$ .

2 Halla el máximo de  $f(x) = -x^2 + 4x$ .

#### Solución

$f'(x) = -2x + 4 = 0$ , así que  $x = 2$ .

$f''(x) = -2 < 0$ , así que es un **máximo**.

El máximo vale **4**, en  $x = 2$ .

3 Halla el mínimo de  $f(x) = x^3 - 3x$  en el intervalo  $[0, 5]$ .

#### Solución

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ , así que  $x = 1$  o  $x = -1$ . En el intervalo pedido,  $x = 1$ .

$f''(x) = 6x$ , y  $f''(1) = 6 > 0$ : **mínimo** local.

Es un intervalo cerrado, así que se compara con los bordes:  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = -2$  y  $f(5) = 110$ .

El mínimo vale **-2**, en  $x = 1$ .

4 Halla el máximo de  $f(x) = x^3 - 3x$  en el intervalo  $[-5, 0]$ .

#### Solución

Las mismas soluciones:  $x = 1$  y  $x = -1$ . Aquí toca  $x = -1$ .

$f''(-1) = -6 < 0$ : **máximo** local.

Es un intervalo cerrado, así que se compara con los bordes:  $f(-5) = -110$ ,  $f(-1) = 2$  y  $f(0) = 0$ .

El máximo vale **2**, en  $x = -1$ .

5 Halla el máximo de  $f(x) = x^3 - 3x$  en el intervalo  $[0, 5]$ .

**Solución**

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$  da  $x = 1$  ( $x = -1$  queda fuera del intervalo).

$f''(1) = 6 > 0$ :  $x = 1$  es un **mínimo**, no un máximo. Así que el máximo no está en ningún punto crítico.

▪ Entonces está en un **borde**:  $f(0) = 0$  y  $f(5) = 125 - 15 = 110$ .

El máximo vale **110**, en  $x = 5$ , y ahí la derivada NO se anula:  $f'(5) = 72$ .

## Problemas de geometría

**Lo que hay que saber**

- La mitad del ejercicio es **escribir la función** con UNA sola variable: se usa el dato que relaciona las dos (el perímetro, el área, el volumen) para despejar una en función de la otra. Lo de derivar viene después.

6 Con 40 m de valla se quiere cerrar un huerto rectangular. ¿Qué medidas dan el área máxima?

**Solución**

Si un lado mide  $x$ , el otro mide  $(40 - 2x) : 2 = 20 - x$ , porque el perímetro es 40.

El área es  $A(x) = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$ .  $A'(x) = 20 - 2x = 0 \rightarrow x = 10$ .

Sale un **cuadrado** de  $10 \times 10$  m, con  $100 \text{ m}^2$ .  $\triangle$  Entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es siempre el cuadrado.

7 Un alambre de 36 cm se dobla formando un rectángulo. ¿Cuál es su área máxima?

**Solución**

Un lado  $x$  y el otro  $18 - x$ , porque el perímetro es 36.

$A(x) = x(18 - x)$ .  $A'(x) = 18 - 2x = 0 \rightarrow x = 9$ .

Otra vez el cuadrado:  $9 \times 9 \text{ cm}$  y  $81 \text{ cm}^2$ .

8 De todos los rectángulos de  $64 \text{ cm}^2$  de área, ¿cuál tiene el perímetro mínimo?

**Solución**

Si un lado es  $x$ , el otro es  $64/x$  para que el área sea 64.

$P(x) = 2(x + 64/x)$ .  $P'(x) = 2(1 - 64/x^2) = 0 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = 8$ .

El cuadrado de  $8 \times 8 \text{ cm}$ , con  $32 \text{ cm}$  de perímetro.  $\triangle$  Aquí el dominio importa:  $x$  tiene que ser **positivo**, así que  $x = -8$  se descarta.

## Problemas de coste y beneficio

**Lo que hay que saber**

- Aquí la función ya viene dada y el trabajo es derivar y comprobar.  $\triangle$  Lo que no hay que olvidar es el **sentido** del resultado: no se fabrican  $-3$  unidades.

9

El beneficio de una empresa, en miles de euros, es  $B(x) = -x^2 + 20x - 50$ , donde  $x$  son las unidades fabricadas (en miles). ¿Cuántas conviene fabricar?

**Solución**

$$B'(x) = -2x + 20 = 0, \text{ así que } x = 10.$$

$$B''(x) = -2 < 0: \text{ es un } \mathbf{m\acute{a}ximo}. \text{ El beneficio m\acute{a}ximo es } B(10) = 50, \text{ es decir, } 50\,000 \text{ €}.$$

---

10

El coste de producir  $x$  artículos es  $C(x) = x^2 - 40x + 500$ . ¿Cuántos hay que producir para que el coste sea mínimo?

**Solución**

$$C'(x) = 2x - 40 = 0, \text{ así que } x = 20.$$

$$C''(x) = 2 > 0: \text{ es un } \mathbf{m\acute{i}nimo}, \text{ y vale } C(20) = 100.$$

---