

Programación lineal: ejercicios de matemáticas resueltos paso a paso

9 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 3 temas que trae esta selección.

Material propio de solucionariomatematicas.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionariomatematicas.es

Programación lineal: ejercicios de matemáticas resueltos paso a paso

La región factible y sus vértices

Lo que hay que saber

Cada desigualdad es un **semiplano**; la región factible es la parte del plano que cumple todas a la vez. Sus **vértices** salen de cortar las rectas de dos en dos. $\triangle$ Y hay que descartar los cortes que no cumplen todas las restricciones: no todo corte es un vértice.

- 1 Dibuja la región factible del sistema $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$, $2x + y \leq 8$ y halla sus vértices.

Solución

Cada desigualdad es un **semiplano**: se dibuja su recta y se mira de qué lado queda. La región factible es lo que cumplen TODAS a la vez.

Los **vértices** salen de cortar las rectas de dos en dos, y de esos cortes solo valen los que cumplen todas las restricciones.

Restricciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq 6$; $2x + y \leq 8$.

Vértices: **(0, 0)**, **(4, 0)**, **(2, 4)**, **(0, 6)**.

- 2 Halla los vértices de la región $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 10$, $3x + y \leq 15$.

Solución

Se cortan las rectas de dos en dos y se descartan los puntos que no cumplen todas las restricciones.

Restricciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + 2y \leq 10$; $3x + y \leq 15$.

Vértices: **(0, 0)**, **(5, 0)**, **(4, 3)**, **(0, 5)**.

Optimizar la función objetivo

Lo que hay que saber

El **teorema fundamental** de la programación lineal: si el óptimo existe, está en un **vértice**. Por eso basta con evaluar la función objetivo en los vértices y quedarse con el mejor. $\triangle$ Si dos vértices empatan, la solución es todo el segmento que los une.

- 3 Maximiza $F(x, y) = 3x + 2y$ en la región $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$, $2x + y \leq 8$.

Solución

El **teorema fundamental** dice que el óptimo, si existe, está en un **vértice** de la región. Así que basta evaluar F en todos ellos.

$\triangle$ No hace falta probar puntos de dentro: con los vértices es suficiente.

Restricciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq 6$; $2x + y \leq 8$.

Vértices: **(0, 0)**, **(4, 0)**, **(2, 4)**, **(0, 6)**.

F en cada vértice: $F(0, 0) = 0$; $F(4, 0) = 12$; $F(2, 4) = 14$; $F(0, 6) = 12$.

El máximo es **14**, en el vértice **(2, 4)**.

4 Maximiza $F(x, y) = 4x + y$ en la región $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 10, 3x + y \leq 15$.

Solución

Se evalúa la función objetivo en cada vértice y se elige el mayor.

Restricciones: $x \geq 0; y \geq 0; x + 2y \leq 10; 3x + y \leq 15$.

Vértices: **(0, 0), (5, 0), (4, 3), (0, 5)**.

F en cada vértice: $F(0, 0) = 0; F(5, 0) = 20; F(4, 3) = 19; F(0, 5) = 5$.

El máximo es **20**, en el vértice **(5, 0)**.

5 Minimiza $F(x, y) = 2x + 5y$ en la región $x \geq 1, y \geq 1, x + y \geq 4$.

Solución

La región no está acotada por arriba, pero sí por abajo, así que el **mínimo** sí existe y está en un vértice.

△ Con regiones no acotadas hay que mirar si el óptimo que se busca existe: aquí el máximo no existiría, porque se puede crecer sin límite.

Restricciones: $x \geq 1; y \geq 1; x + y \geq 4$.

Vértices: **(1, 3), (3, 1)**.

F en cada vértice: $F(1, 3) = 17; F(3, 1) = 11$.

El mínimo es **11**, en el vértice **(3, 1)**.

Problemas de programación lineal

Lo que hay que saber

Lo que decide estos problemas es la **traducción**: nombrar las incógnitas, escribir cada frase del enunciado como una desigualdad y no olvidar las de siempre ($x \geq 0, y \geq 0$). Lo demás ya es mecánico.

6 Una fábrica hace mesas y sillas. Cada mesa deja 30 € de beneficio y cada silla 20 €. No se pueden hacer más de 4 mesas, ni más de 6 sillas, ni más de 8 muebles en total. ¿Cuántas de cada una conviene fabricar?

Solución

Lo primero es **traducir**: x = mesas, y = sillas. «No más de 4 mesas» es $x \leq 4$; «no más de 8 muebles» es $x + y \leq 8$. Y, como son cantidades, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

La función objetivo es el beneficio: $F(x, y) = 30x + 20y$.

△ Traducir el enunciado es la mitad del ejercicio: la otra mitad es mecánica.

Restricciones: $x \geq 0; y \geq 0; x \leq 4; y \leq 6; x + y \leq 8$.

Vértices: **(0, 0), (4, 0), (4, 4), (2, 6), (0, 6)**.

F en cada vértice: $F(0, 0) = 0; F(4, 0) = 120; F(4, 4) = 200; F(2, 6) = 180; F(0, 6) = 120$.

El máximo es **200**, en el vértice **(4, 4)**.

7

Una pastelería hace tartas y bizcochos. Cada tarta necesita 2 huevos y cada bizcocho 1 huevo; hay 10 huevos. Cada tarta necesita 1 h de horno y cada bizcocho 1 h; el horno está 6 h. Si cada tarta deja 12 € y cada bizcocho 8 €, ¿qué conviene hacer?

Solución

x = tartas, y = bizcochos. Los **huevos** dan $2x + y \leq 10$ y el **horno**, $x + y \leq 6$.

La función objetivo es el beneficio: $F(x, y) = 12x + 8y$.

Restricciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $2x + y \leq 10$; $x + y \leq 6$.

Vértices: **(0, 0), (5, 0), (4, 2), (0, 6)**.

F en cada vértice: $F(0, 0) = 0$; $F(5, 0) = 60$; $F(4, 2) = 64$; $F(0, 6) = 48$.

El máximo es **64**, en el vértice **(4, 2)**.

8

Un transportista lleva cajas grandes y pequeñas. En el camión caben como mucho 20 cajas y, por peso, no puede llevar más de 12 grandes. Además, las pequeñas no pueden ser más de 15. Si cobra 5 € por caja grande y 3 € por pequeña, ¿cuántas lleva?

Solución

x = cajas grandes, y = pequeñas. El total da $x + y \leq 20$, y los dos toques, $x \leq 12$ e $y \leq 15$.

⚠ Fíjate en que hay CINCO vértices: con varias restricciones la región ya no es un triángulo.

Restricciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq 20$; $x \leq 12$; $y \leq 15$.

Vértices: **(0, 0), (12, 0), (12, 8), (5, 15), (0, 15)**.

F en cada vértice: $F(0, 0) = 0$; $F(12, 0) = 60$; $F(12, 8) = 84$; $F(5, 15) = 70$; $F(0, 15) = 45$.

El máximo es **84**, en el vértice **(12, 8)**.

9

Una dieta necesita al menos 8 unidades de vitamina A y al menos 5 de vitamina B. El alimento X aporta 2 unidades de A y 1 de B por ración; el alimento Y aporta 1 de A y 1 de B. Si X cuesta 5 € la ración e Y cuesta 3 €, ¿cuántas raciones de cada uno salen más baratas?

Solución

⚠ Aquí las restricciones son «**al menos**», así que llevan $\geq$ y la región queda **abierta por arriba**: el máximo no existiría, pero el mínimo sí.

x = raciones de X, y = raciones de Y. La vitamina A da $2x + y \geq 8$ y la B, $x + y \geq 5$. La función objetivo es el coste, y se busca el MÍNIMO.

Restricciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $2x + y \geq 8$; $x + y \geq 5$.

Vértices: **(0, 8), (3, 2), (5, 0)**.

F en cada vértice: $F(0, 8) = 24$; $F(3, 2) = 21$; $F(5, 0) = 25$.

El mínimo es **21**, en el vértice **(3, 2)**.