

Vectores: ejercicios de matemáticas resueltos paso a paso

30 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 4 temas que trae esta selección.

Material propio de solucionariomatematicas.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionariomatematicas.es

Vectores: ejercicios de matemáticas resueltos paso a paso

Coordenadas de un vector, suma y punto medio

Lo que hay que saber

Un vector entre dos puntos son las coordenadas del **extremo menos las del origen**, y las combinaciones ($2u - v$, $3u + 2v...$) se hacen **coordenada a coordenada**. $\triangle$ El orden importa: AB y BA no son el mismo vector, son el mismo con los dos signos cambiados.

- 1 Dados los puntos A(1, 2) y B(4, 6), halla el vector AB y el punto medio del segmento AB.

Solución

Las coordenadas del vector AB son las del **extremo menos** las del origen: $AB = B - A = (4 - 1, 6 - 2) = (3, 4)$.

El **punto medio** es la media de las coordenadas: $M = ((1 + 4)/2, (2 + 6)/2) = (2,5, 4)$.

- 2 Dados los puntos A(-2, 3) y B(5, -1), halla el vector AB y el punto medio del segmento AB.

Solución

Las coordenadas del vector AB son las del **extremo menos** las del origen: $AB = B - A = (5 - (-2), (-1) - 3) = (7, -4)$.

El **punto medio** es la media de las coordenadas: $M = (((-2) + 5)/2, (3 + (-1))/2) = (1,5, 1)$.

- 3 Dados los puntos A(0, 0) y B(3, 4), halla el vector AB y el punto medio del segmento AB.

Solución

Las coordenadas del vector AB son las del **extremo menos** las del origen: $AB = B - A = (3 - 0, 4 - 0) = (3, 4)$.

El **punto medio** es la media de las coordenadas: $M = ((0 + 3)/2, (0 + 4)/2) = (1,5, 2)$.

- 4 Dados los puntos A(2, -5) y B(-4, 1), halla el vector AB y el punto medio del segmento AB.

Solución

Las coordenadas del vector AB son las del **extremo menos** las del origen: $AB = B - A = ((-4) - 2, 1 - (-5)) = (-6, 6)$.

El **punto medio** es la media de las coordenadas: $M = ((2 + (-4))/2, ((-5) + 1)/2) = (-1, -2)$.

- 5 Dados los puntos A(-3, -2) y B(1, 6), halla el vector AB y el punto medio del segmento AB.

Solución

Las coordenadas del vector AB son las del **extremo menos** las del origen: $AB = B - A = (1 - (-3), 6 - (-2)) = (4, 8)$.

El **punto medio** es la media de las coordenadas: $M = (((-3) + 1)/2, ((-2) + 6)/2) = (-1, 2)$.

6 Si $u = (3, 1)$ y $v = (2, 4)$, calcula $u + v$.

Solución

$$u + v = (3 + 2, 1 + 4) = \mathbf{(5, 5)}.$$

7 Si $u = (5, -2)$ y $v = (-1, 3)$, calcula $u - v$.

Solución

$$u - v = (5 - (-1), (-2) - 3) = \mathbf{(6, -5)}.$$

8 Si $u = (2, 6)$ y $v = (4, 2)$, calcula $2u - v$.

Solución

$$2u - v = (2 \cdot 2 - 4, 2 \cdot 6 - 2) = \mathbf{(0, 10)}.$$

9 Si $u = (-1, 4)$ y $v = (3, 3)$, calcula $3u + 2v$.

Solución

$$3u + 2v = (3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3, 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = \mathbf{(3, 18)}.$$

Módulo de un vector

Lo que hay que saber

El módulo es la **longitud** del vector y sale del teorema de Pitágoras: $|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\triangle$ Los cuadrados hacen que el signo no importe (un vector y su opuesto miden lo mismo), y casi nunca da un número entero: se deja la raíz simplificada y su valor aproximado.

10 Calcula el módulo del vector $v = (3, 4)$.

Solución

$$|v| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \mathbf{5}.$$

11 Calcula el módulo del vector $v = (5, 12)$.

Solución

$$|v| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = \mathbf{13}.$$

12 Calcula el módulo del vector $v = (6, 8)$.

Solución

$$|v| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = \mathbf{10}.$$

13 Calcula el módulo del vector $v = (2, 3)$.

Solución

$$|v| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx \mathbf{3,61}.$$

14 Calcula el módulo del vector $v = (-1, 2)$.

Solución

$$|v| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2,24.$$

15 Calcula el módulo del vector $v = (7, 24)$.

Solución

$$|v| = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25.$$

Producto escalar, vectores perpendiculares y ángulo

Lo que hay que saber

Con coordenadas, el producto escalar es $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}'$: se multiplican las primeras, las segundas y se suma. El resultado es un **número**, no un vector, y contesta a dos preguntas a la vez: si vale 0 los vectores son **perpendiculares** —sin dibujar nada ni calcular ningún ángulo— y con los módulos da el **ángulo**, por $\cos \alpha = (u \cdot v) / (|u| \cdot |v|)$. $\triangle$ Truco: un perpendicular a (x, y) es siempre $(y, -x)$, se cambian de sitio y uno cambia de signo.

16 Calcula el producto escalar de $u = (3, 2)$ y $v = (1, 4)$.

Solución

$$u \cdot v = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11.$$

17 Calcula el producto escalar de $u = (5, -1)$ y $v = (2, 3)$.

Solución

$$u \cdot v = 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 10 + (-3) = 7.$$

18 Calcula el producto escalar de $u = (-2, 4)$ y $v = (3, 1)$.

Solución

$$u \cdot v = (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 1 = (-6) + 4 = -2.$$

19 Calcula el producto escalar de $u = (6, 0)$ y $v = (0, 7)$.

Solución

$$u \cdot v = 6 \cdot 0 + 0 \cdot 7 = 0 + 0 = 0. \text{ Como da } 0, \text{ los dos vectores son perpendiculares.}$$

20 Comprueba si $u = (2, 3)$ y $v = (3, -2)$ son perpendiculares.

Solución

$$u \cdot v = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0. \text{ Como es } 0, \text{ sí lo son.}$$

21 Comprueba si $u = (4, 1)$ y $v = (-1, 4)$ son perpendiculares.

Solución

$$u \cdot v = 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 = 0. \text{ Como es } 0, \text{ sí lo son.}$$

22 Comprueba si $u = (5, 0)$ y $v = (0, 9)$ son perpendiculares.

Solución

$u \cdot v = 5 \cdot 0 + 0 \cdot 9 = 0$. Como es **0**, sí lo son.

23 Halla el ángulo que forman $u = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$.

Solución

$u \cdot v = 0$, $|u| = 1$ y $|v| = 1$, así que $\cos \alpha = 0$.

El ángulo es **90°** .

24 Halla el ángulo que forman $u = (1, 0)$ y $v = (1, 1)$.

Solución

$u \cdot v = 1$, $|u| = 1$ y $|v| = \sqrt{2}$, así que $\cos \alpha = \sqrt{2}/2$.

El ángulo es **45°** .

25 Halla el ángulo que forman $u = (1, 0)$ y $v = (-1, 0)$.

Solución

$u \cdot v = -1$, $|u| = 1$ y $|v| = 1$, así que $\cos \alpha = -1$.

El ángulo es **180°** .

26 Halla el ángulo que forman $u = (2, 0)$ y $v = (3, 0)$.

Solución

$u \cdot v = 6$, $|u| = 2$ y $|v| = 3$, así que $\cos \alpha = 1$.

El ángulo es **0°** .

Vector director y ecuación de la recta

Lo que hay que saber

Con un punto y un vector director ya está determinada la recta. $\triangle$ El director dice hacia dónde va; la **normal** (perpendicular a él) es la que aparece en la ecuación de la forma $ax + by = k$. $\triangle$ Comprobación que vale siempre: se sustituyen las coordenadas del punto en la ecuación y tiene que salir la igualdad.

27 Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2)$ y tiene como vector director $d = (3, 1)$.

Solución

Un vector **perpendicular** al director sirve de normal: si $d = (3, 1)$, una normal es $(-1, 3)$ (se cambian de sitio y uno cambia de signo).

La recta es entonces $-x + 3y = k$, y la k sale obligando a que pase por P : $-1 + 3 \cdot 2 = 5$.

Ecuación: **$-x + 3y = 5$** .

28 Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(0, -1)$ y tiene como vector director $d = (2, 5)$.

Solución

Un vector **perpendicular** al director sirve de normal: si $d = (2, 5)$, una normal es $(-5, 2)$ (se cambian de sitio y uno cambia de signo).

La recta es entonces $-5x + 2y = k$, y la k sale obligando a que pase por P : $-5 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -2$.

Ecuación: **$-5x + 2y = -2$** .

29 Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(-2, 3)$ y tiene como vector director $d = (1, -4)$.

Solución

Un vector **perpendicular** al director sirve de normal: si $d = (1, -4)$, una normal es $(4, 1)$ (se cambian de sitio y uno cambia de signo).

La recta es entonces $4x + y = k$, y la k sale obligando a que pase por P : $4 \cdot (-2) + 3 = -5$.

Ecuación: **$4x + y = -5$** .

30 Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(4, 0)$ y tiene como vector director $d = (3, 2)$.

Solución

Un vector **perpendicular** al director sirve de normal: si $d = (3, 2)$, una normal es $(-2, 3)$ (se cambian de sitio y uno cambia de signo).

La recta es entonces $-2x + 3y = k$, y la k sale obligando a que pase por P : $-2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = -8$.

Ecuación: **$-2x + 3y = -8$** .
