

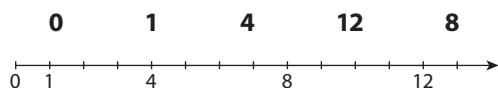
EJERCICIOS

1 Di cuáles de estos números son números naturales:

4	$\frac{1}{2}$	6
$\frac{2}{5}$	-3	7
18	55	2,5

4, 18, 55, 6 y 7.

2 Representa en una recta los siguientes números naturales.



3 Pon ejemplos de la vida cotidiana en los que se utilicen números naturales.

Respuesta abierta.

4 Escribe como una sola potencia:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------|----------|
| a) $7^2 \cdot 6^2 \cdot 2^2$ | b) $6 \cdot 6^2 \cdot 6^4$ | |
| c) $4^3 : 4^2$ | d) $3^4 \cdot 2^4$ | |
| e) $(5 \cdot 2)^2 \cdot 2^2$ | f) $(8 : 4)^2$ | |
| g) $2^4 : (2^3 \cdot 2)$ | h) $(3^4)^2$ | |
| a) $(7 \cdot 6 \cdot 2)^2$ | b) 6^7 | c) 4 |
| d) $(3 \cdot 2)^4$ | e) $(10 \cdot 2)^2$ | f) 2^2 |
| g) 1 | h) 3^8 | |

5 Si una piscina cuadrada mide 10 m de lado, ¿cuál será el área total de 10 piscinas iguales? Exprésalo en forma de potencia.

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 \text{ m}^2$$

6 Escribe qué cantidad representan los siguientes números expresados en notación científica:

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| a) $1,15 \cdot 10^3$ | b) $5,31 \cdot 10^{11}$ |
| c) $4,2 \cdot 10^7$ | d) $7,45 \cdot 10^8$ |
| a) 1 150 | b) 531 000 000 000 |
| c) 42 000 000 | d) 745 000 000 |

7 Copia en tu cuaderno y une las columnas según corresponda. Razona tus respuestas.

10^3	$\rightarrow$	1
4^2	$\rightarrow$	2^4
$3 \cdot 3 \cdot 3$	$\rightarrow$	3^3
$(2^2)^2$	$\rightarrow$	1 000
4^0	$\rightarrow$	16

8 Expresa estos números en notación científica:

- | | |
|--------------------------|----------------------|
| a) 7 350 | b) 652 000 |
| c) 73 590 000 000 | d) 250 000 000 |
| a) $7,35 \cdot 10^3$ | b) $6,52 \cdot 10^5$ |
| c) $7,359 \cdot 10^{10}$ | d) $2,5 \cdot 10^8$ |

9 Si el área de un huerto cuadrado es la mitad de otro que tiene 200 m², ¿cuánto mide el lado del huerto pequeño?

Si el área del huerto pequeño tiene la mitad del grande:

$$\frac{200}{2} = 100. \text{ Por otro lado, el área de un cuadrado es } A = l \cdot l,$$

de donde se deduce el lado del huerto pequeño:

$$100 = l^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{100} \Leftrightarrow l = 10 \text{ m.}$$

10 Calcula las siguientes raíces cuadradas.

- | | | | |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| a) $\sqrt{100}$ | b) $\sqrt{25}$ | c) $\sqrt{36}$ | d) $\sqrt{4}$ |
| e) $\sqrt{9}$ | f) $\sqrt{16}$ | g) $\sqrt{49}$ | h) $\sqrt{64}$ |
| a) 10 | b) 5 | c) 6 | d) 2 |
| e) 3 | f) 4 | g) 7 | h) 8 |

11 Indica si son correctas o no las siguientes igualdades:

- a) $\sqrt{9} + \sqrt{4} = \sqrt{13}$
b) $\sqrt{144} - \sqrt{81} = 3$
c) $\sqrt{4 \cdot 36} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12$
d) $\sqrt{4 + 36} = \sqrt{4} + \sqrt{36} = 2 + 6 = 8$
e) $\sqrt{81} : \sqrt{9} = \sqrt{81 : 9} = \sqrt{9} = 3$
f) $\sqrt{4 : 4} = \sqrt{4} : \sqrt{4} = 1$

- | | | |
|-----------|---------------|---------------|
| a) Falsa. | b) Verdadera. | c) Verdadera. |
| d) Falsa. | e) Verdadera. | f) Verdadera. |

12 Realiza las siguientes operaciones combinadas:

- | | |
|--|---|
| a) $(6 + 2)^2 - 2 \cdot 2$ | b) $[(3 + 2) \cdot 2 - 2] \cdot 2$ |
| c) $65 - (8 \cdot 2 + 4 : 4)$ | d) $\sqrt{4} + (4 + 4) \cdot 2 \cdot 4$ |
| e) $\sqrt{25} + (2 + 3)^2 - 4 \cdot 5 + 2$ | |
| a) 60 | b) 16 |
| d) 66 | e) 12 |

13 ¿Dónde hay que poner el paréntesis para que se cumplan las siguientes igualdades?

- | | |
|------------------------------|-----------------------|
| a) $4 + 2^2 - 6 = 30$ | b) $16 - 6 : 2 = 5$ |
| c) $\sqrt{49} : 6 + 1 = 1$ | d) $64 : 7 + 1 = 8$ |
| a) $(4 + 2)^2 - 6 = 30$ | b) $(16 - 6) : 2 = 5$ |
| c) $\sqrt{49} : (6 + 1) = 1$ | d) $64 : (7 + 1) = 8$ |

14 Razona si son verdaderos o falsos:

- a) En el siguiente cálculo primero se hace la suma y luego la multiplicación $(2 + 3)^2 \cdot 5$.
b) $81 - (10 - 1)^2 = 0$
c) $6 - 2^2 : 2 = (6 - 2)^2 : 2$
- a) Falso, después de la suma se efectúa la potencia.
b) Verdadero.
c) Falso.

15 Calcula tres múltiplos de cada uno de los siguientes números. ¿Cómo los obtienes?

2 13 7 4 6

(2, 4, 6), (13, 26, 39), (0, 7, 14), (0, 4, 8), (0, 6, 12)

16 Calcula dos divisores de cada uno de los siguientes números:

- | | | |
|-------|-------|-------|
| a) 14 | b) 10 | c) 30 |
| d) 28 | e) 12 | f) 21 |
- a) 1, 2, 7, 14 b) 1, 2, 5, 10
c) 1, 2, 3, 5, 10, 15, 30 d) 1, 2, 4, 7, 14, 28
e) 1, 2, 3, 4, 6, 12 f) 1, 3, 7, 21

17 Indica cuál de estas afirmaciones es verdadera o falsa y explica por qué:

- a) 3 es divisor de 30. b) 10 es múltiplo de 3.
c) 30 es múltiplo de 10. d) 3 es múltiplo de 1.
e) 1 es divisor de 30. f) 5 es divisor de 25.
- a) Verdadera, porque $3 + 0$ es múltiplo de 3.
b) Falsa, porque la división de 10 entre 3 es entera.
c) Verdadera, porque $30 : 10 = 3$.
d) Verdadera, porque $3 : 1 = 3$.
e) Verdadera, porque el 1 es divisor de todos los números.
f) Verdadera, porque al realizar la división de $25 : 5$, la división es exacta.

18 Escribe el número 16 de todas las maneras posibles en forma de multiplicación de dos números naturales. ¿Qué observas?

$16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$
Que se obtienen todos sus divisores.

19 De los siguientes números, ¿cuáles son primos y cuáles son compuestos?

- | | | |
|-------|-------|-------|
| a) 47 | b) 6 | c) 36 |
| d) 5 | e) 23 | f) 31 |
| g) 11 | h) 30 | i) 33 |
| j) 61 | k) 45 | l) 21 |

Primos: 47, 5, 11, 23, 31, 61. Compuestos: el resto.

20 ¿Verdadero o falso? Explica por qué en cada caso.

- a) Un número puede ser primo y compuesto a la vez.
b) El número natural primo más pequeño es el 5.
c) Todos los números impares son primos.
- a) Falso.
b) Falso, es el 2, ya que por acuerdo se entiende que el 1 no es un número primo.
c) Falso, el 9 es impar y no es primo.

21 Realiza la factorización de los siguientes números naturales:

- | | | | |
|--------|--------|----------|----------|
| a) 300 | b) 288 | c) 363 | d) 546 |
| e) 410 | f) 196 | g) 1 386 | h) 1 260 |
- a) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ b) $2^5 \cdot 3^2$ c) $3 \cdot 11^2$
d) $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ e) $2 \cdot 5 \cdot 41$ f) $2^2 \cdot 7^2$
g) $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ h) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

22 Descompón en factores primos el número 110 y a partir de esa factorización indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) 110 es divisible por 11.
b) 55 es un divisor de 110.
c) 22 no es un divisor de 110.
d) 110 es divisible por 1.

$$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$$

- a) Verdadera. b) Verdadera.
c) Falsa. d) Verdadera.

23 Expresa con tus propias palabras la diferencia que encuentras entre los conceptos de máximo común divisor y de mínimo común múltiplo. Pon ejemplos en cada caso.

- a) El m.c.m. es un múltiplo de los números de los que partimos, y el m.c.d. es el divisor de los números de los que partimos.
b) En el m.c.m. se toman las potencias comunes y no comunes de mayor exponente, y el m.c.d. se toman las potencias de base común con menor exponente.

24 Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes números:

- | | | |
|---------------|----------------|----------------|
| a) 27 y 21 | b) 75 y 15 | c) 12, 25 y 32 |
| d) 68 y 30 | e) 75, 20 y 15 | f) 66, 44 y 88 |
| g) 216 y 88 | h) 122 y 88 | i) 30, 45 y 75 |
| j) 20, 44 y 8 | | |
- a) 3 y 189 b) 15 y 75 c) 1 y 2 400
d) 2 y 1 020 e) 5 y 300 f) 22 y 264
g) 8 y 2 376 h) 2 y 5 368 i) 15 y 450
j) 4 y 440

25 Tres nadadores empiezan a nadar a la vez, pero su ritmo no es igual. El primero realiza 1 largo mientras el segundo hace 3 y el tercero 2. ¿Cuándo volverán a coincidir en la salida?

m.c.m. (1, 2, 3) = 6. Coincidirán al cabo de 6 largos.

26 Para el taller de Tecnología se van a juntar tres clases con 15, 40 y 35 alumnos respectivamente. ¿Cuántos grupos se formarán si se quieren hacer grupos iguales sin mezclar alumnos de diferentes clases y deben estar formados por el mayor número de alumnos sin que sobre ninguno?

m.c.d. (15, 40, 35) = 5. Grupos de 5 alumnos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

1 Define en tu cuaderno el conjunto de los números naturales y pon ejemplos prácticos y cotidianos donde se utilicen.

Los números naturales son los que utilizamos para contar y se construyen siguiendo un sistema de numeración posicional de base diez a partir de las cifras o dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Ejemplos: «quiero 1 huevo frito», «son 11 jugadores», «en el portal 109», «dentro de 15 minutos», «ha tocado el número 59674», «ya son 250 socios», «veo el canal 3», «faltan 2 sillas», ...

2 Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Razónalas.

- La temperatura de una ciudad siempre se indica con un número natural.
- El conjunto de números naturales es ilimitado.
- El número cero no se incluye en el conjunto de números naturales.
- El conjunto de números naturales se representa mediante una Z.
 - Falsa, porque también se usan números negativos.
 - Verdadera, el conjunto de los números naturales es infinito.
 - Verdadera.
 - Falsa, el conjunto de los números naturales se representa con la letra N.

3 ¿Cuáles de los siguientes números son naturales?

- | | | | |
|-------|--------|------------------|------|
| a) 1 | b) 0,3 | c) -2,5 | d) 4 |
| e) 27 | f) -4 | g) $\frac{1}{2}$ | h) 3 |

a, d, e, h

4 ¿Qué propiedades de la suma se aplican en cada caso?

- $2 + 0 = 2$
- $(61 + 2) + 3 = 61 + (2 + 3)$
- $3 + 4 + 1 = 1 + 4 + 3$

- Elemento neutro.
- Asociativa.
- Conmutativa.

5 ¿Qué propiedad se aplica en cada caso?

- $5 \cdot 1 = 1 \cdot 5$
- $(4 + 2) \cdot 3 = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3$
- $(3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5)$
- $7 \cdot 2 = 2 \cdot 7$

- Elemento neutro.
- Distributiva.
- Asociativa.
- Conmutativa.

6 Juan tiene 450 € para gastar en papel de empapelar. Si el papel se vende a 12 € el m², y tiene que empapelar una habitación de 30 m² de pared, ¿tiene Juan suficiente dinero para poder empapelar toda la habitación?

Sí, ya que $450 - 12 \cdot 30 = 450 - 360 = 90$ €.

7 ¿Cuánto tardarán 2 grifos en llenar un depósito de 50 litros de agua, si cada uno vierte 10 litros cada 20 minutos?

Cada grifo vierte 1 litro cada 2 minutos. Los dos grifos vierten 2 litros cada 2 minutos, o 1 litro cada minuto. Por tanto, tardan 50 minutos.

8 Luisa quiere comprarle a su madre un regalo de 80 €, pero sólo tiene ahorrado la paga mensual de 4 meses y 15 € que le ha dejado su hermana. ¿Podrá comprar el regalo si su paga es de 12 €/mes? En caso negativo, ¿cuánto dinero le hará falta? ¿Cuántos meses tendrá que ahorrar como mínimo?

No, porque $80 - (4 \cdot 12 + 15) = 80 - 63 = 17$ €. Le faltan 17 €. Tendrá que ahorrar la paga de 2 meses más.

9 Se han comprado para el instituto 3 colecciones iguales de libros de Ciencias Naturales. Cada colección consta de 6 tomos y cada tomo cuesta 15 €. ¿Cuánto se ha pagado en total si al final nos han hecho un descuento de 30 €?

$3 \cdot 6 \cdot 15 - 30 = 270 - 30 = 240$ €.

10 Expresa matemáticamente los siguientes enunciados y calcula:

- a) El doble de la suma de diez y cuatro.
- b) La mitad de la suma de dos centenas y cuatro decenas.
- c) El triple de la suma de veintidós más dos al cuadrado.
- d) El doble de seis más cuatro unidades.

a) $2 \cdot (10 + 4) = 28$ b) $(200 + 40) : 2 = 120$
 c) $3 \cdot (22 + 2^2) = 78$ d) $2 \cdot (6 + 4) = 2 \cdot 10 = 20$

POTENCIAS DE NÚMEROS NATURALES. OPERACIONES. NOTACIÓN CIENTÍFICA

11 Explica con tus palabras qué es la potencia de un número natural y pon un ejemplo práctico que lo puedas relacionar con la vida cotidiana.

«Tres personas que comieron tres platos a tres euros cada plato, pagaron 3^3 €».

12 Escribe como una sola potencia las siguientes operaciones:

- | | | |
|----------------------------------|------------------------|----------------------------|
| a) $4 \cdot 4 \cdot 4$ | b) $3 \cdot 3$ | c) $2^3 \cdot 2 \cdot 2^2$ |
| d) $3^6 \cdot 3 \cdot 3^2 : 3^3$ | e) $4^9 : 4^7$ | f) $(6^3 \cdot 6^2) : 6^4$ |
| g) $(6^3)^6$ | h) $7^2 \cdot 7^0$ | i) $8^1 : 8^0$ |
| j) $3^3 \cdot 10^3$ | k) $14^3 : 7^3$ | l) $(2^4 : 4)^3$ |
| m) $4^3 \cdot (2 \cdot 2)^3$ | n) $(6^2)^0 \cdot 6^3$ | o) $3^2 \cdot 9 \cdot 3^5$ |
| a) 4^3 | b) 3^2 | c) 2^6 |
| d) 3^6 | e) 4^2 | f) 6 |
| g) 6^{18} | h) 7^2 | i) 8 |
| j) 30^3 | k) 2^3 | l) 2^6 |
| m) 4^6 | n) 6^3 | o) 3^9 |

13 ¿Cuáles de los siguientes números están expresados en notación científica? En caso de que no lo estén, exprésalos.

- a) $1,43 \cdot 10^8$ b) 2 340 000 000 000
 c) $4,739 \cdot 10^{11}$ d) $3,982 \cdot 10^6$
 e) 0,0000000001872

Están expresados en notación científica: a, c, d.

b) $2,34 \cdot 10^{12}$ e) $1,872 \cdot 10^{-10}$

14 Expresa en notación científica los siguientes números:

- a) 870 290 000 000 000 b) 3 721 000
 c) 39 230 000 000 d) 381
 e) 190 200 000 000 f) 0,0000976
 a) $8,7029 \cdot 10^{14}$ b) $3,721 \cdot 10^6$
 c) $3,923 \cdot 10^{10}$ d) $3,81 \cdot 10^2$
 e) $1,902 \cdot 10^{11}$ f) $9,76 \cdot 10^{-5}$

15 Escribe qué cantidad representan los siguientes números expresados en notación científica:

- a) $7,89 \cdot 10^8$ b) $9,21 \cdot 10^3$
 c) $5,49 \cdot 10^5$ d) $1,233 \cdot 10^6$
 e) $3,92 \cdot 10^2$ f) $6,8 \cdot 10^{-6}$
 a) 789 000 000 b) 9 210
 c) 549 000 d) 1 233 000
 e) 392 f) 0,0000068

RAÍCES CUADRADAS DE NÚMEROS NATURALES. OPERACIONES

16 Explica con tus palabras qué es la raíz cuadrada de un número natural y pon un ejemplo práctico que lo puedas relacionar con la vida cotidiana.

La superficie de la habitación de un hotel es cuadrada y es de 100 m^2 . El lado de la habitación es de 10 m.

17 Calcula mentalmente las siguientes raíces cuadradas:

- a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{169}$
 c) $\sqrt{81}$ d) $\sqrt{49}$
 e) $\sqrt{144}$ f) $\sqrt{64}$
 a) 11 b) 13
 c) 9 d) 7
 e) 12 f) 8

18 Un terreno tiene 144 m^2 y es cuadrado. ¿Cuánto mide cada lado del terreno?

$\sqrt{144} = 12 \text{ m}$

19 Comprueba mediante ejemplos si se cumplen las siguientes expresiones:

- a) $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
 b) $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$
 c) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
 d) $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$
 a) $5 = \sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$
 b) $8 = \sqrt{100-36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$
 c) $6 = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 6$
 d) $3 = \sqrt{81 : 9} = \sqrt{81} : \sqrt{9} = 3$

20 Realiza las raíces:

- a) $\sqrt{225}$ b) $\sqrt{900}$ c) $\sqrt{441}$
 a) 15 b) 30 c) 21

OPERACIONES COMBINADAS. JERARQUÍA DE OPERACIONES

21 Realiza las siguientes operaciones mentalmente. ¿En qué orden realizas los cálculos?

a) $30 + 6 + 4$

b) $(2 + 4) \cdot 2$

c) $29 - 9 + 20$

d) $13 + 4 + 3 + 2$

e) $10 \cdot 4 \cdot (2 + 2)$

f) $(4 + 4) \cdot (6 + 2)$

a) $40 = 30 + (6 + 4)$

b) $12 = 6 \cdot 2$

c) $40 = (29 - 9) + 20$

d) $22 = (13 + 4) + (3 + 2)$

e) $160 = 10 \cdot (4 \cdot 4)$

f) $64 = 8 \cdot 8$

22 ¿Dónde hay que colocar los paréntesis para que el resultado sea el indicado?

a) $3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3 + 5 = 28$

b) $2 \cdot 3 + 2 + 3 \cdot 2 + 2 + 1 \cdot 3^2 = 43$

c) $2 \cdot 8 + 10 - 16 = 20$

d) $40 : 4 + 6 - 12 : 4 = 1$

a) $3 \cdot 2^2 + 2 \cdot (3 + 5) = 28$

b) $2 \cdot (3 + 2) + 3 \cdot 2 + (2 + 1) \cdot 3^2 = 43$

c) $2 \cdot (8 + 10) - 16 = 20$

d) $40 : (4 + 6) - 12 : 4 = 1$

23 Indica dónde sobran los paréntesis en estas operaciones. Explica por qué sobran y calcula el resultado.

a) $(6 \cdot 4) + (14 \cdot 4) + (22 : 2)$

b) $8 \cdot (10 + 4) + (14 - 4) \cdot 4$

c) $[12 \cdot (14 - 4)] + 2 \cdot [(5 - 3) \cdot 2]$

d) $(7 \cdot 10) + 2 \cdot [2 \cdot (7 + 2)] \cdot 2$

a) Sobran todos los paréntesis, ya que los productos y divisiones hay que efectuarlos antes que las sumas; el resultado es 91.

b) No sobra ningún paréntesis, su resultado es 152.

c) Sobran ambos corchetes, el resultado es 128.

d) Sobra el paréntesis del primer sumando y el corchete del segundo sumando, el resultado es 142.

24 Utiliza un ejemplo sencillo para explicar la jerarquía de operaciones.

$$8 - 4 \cdot [8 - (3 + 3)] = 8 - 4 \cdot (8 - 6) = 8 - 4 \cdot 2 = 8 - 8 = 0$$

25 Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) $100 - [5 \cdot 10 - 5^2 + (10 - 5)^2]$

b) $18 + (4 + 2)^2 - [30 : (3 + 2) + 2]$

c) $6 + [10 + 12 \cdot (14 + 4)] \cdot 3$

d) $4 \cdot 10 + 10 + (36 : 6 + 20 + 6 + 14 - 2) \cdot 2$

a) $100 - [5 \cdot 10 - 5^2 + (10 - 5)^2] = 100 - (5 \cdot 10 - 25 + 5^2) =$
 $= 100 - (50 - 25 + 25) = 100 - 50 = 50$

b) $18 + (4 + 2)^2 - [30 : (3 + 2) + 2] = 18 + 6^2 - (30 : 5 + 2) =$
 $= 18 + 36 - (6 + 2) = 18 + 36 - 4 = 50$

c) $6 + [10 + 12 \cdot (14 + 4)] \cdot 3 = 6 + (10 + 12 \cdot 18) \cdot 3 =$
 $= 6 + (10 + 216) \cdot 3 = 6 + 226 \cdot 3 = 684$

d) $4 \cdot 10 + 10 + (36 : 6 + 20 + 6 + 14 - 2) \cdot 2 =$
 $= 40 + 10 + (6 + 20 + 6 + 14 - 2) \cdot 2 = 40 + 10 + 44 \cdot 2 =$
 $= 50 + 88 = 138$

26 Realiza las siguientes operaciones combinadas con potencias y raíces:

a) $\sqrt{9} \cdot (3 + 3) + (16 : 2)^2 - \sqrt{4}$

b) $\sqrt{100} + [(5 \cdot 2)^2 - 5]^2$

c) $6 + (2 - 1)^2 + 9 + \sqrt{144}$

d) $25 - 5^2 \cdot 2 + (\sqrt{36} + 2)^2 + 3^3$

a) $\sqrt{9} \cdot (3 + 3) + (16 : 2)^2 - \sqrt{4} = 3 \cdot 6 + 8^2 - 2 =$
 $= 18 + 64 - 2 = 80$

b) $\sqrt{100} + [(5 \cdot 2)^2 - 5]^2 = 10 + (10^2 - 5)^2 = 10 + 95^2 =$
 $= 10 + 9025 = 9035$

c) $6 + (2 - 1)^2 + 9 + \sqrt{144} = 6 + 1 + 9 + 12 = 28$

d) $25 - 5^2 \cdot 2 + (\sqrt{36} + 2)^2 + 3^3 = 25 - 25 \cdot 2 + (6 + 2)^2 + 9 =$
 $= 25 - 50 + 8^2 + 9 = -25 + 64 + 9 = 48$

27 Escribe con palabras las siguientes operaciones. Calcula el resultado.

a) $3 \cdot (6 + 4) - 7$

b) $22 + 4 \cdot (10 - 3)$

c) $(4 - 2) \cdot 2 + 2 \cdot (5 - 2)$

a) Al triple de la suma de seis y cuatro se le quitan siete unidades = 23.

b) A veintidós se le suma el cuádruple de la diferencia entre diez y tres = 50.

c) La suma del doble de la diferencia entre cuatro y dos, y el doble de la diferencia entre cinco y dos = 10.

28 Realiza las siguientes operaciones:

a) $6 + [10 + 6 \cdot (14 - 2)] \cdot 2$

b) $6 + 6 + 200 : (12 - 2) + 45 : 5$

c) $(3 + 3^2) \cdot 2 + 2 \cdot (2 + 2) + 2 \cdot 2 \cdot 2^2$

d) $7 \cdot 2 + 12 + 14 : 7 + 22 - (13 - 10 - 1)$

e) $(4 + 2) \cdot 3^2 + 50 : 10 - 5$

a) $6 + [10 + 6 \cdot (14 - 2)] \cdot 2 = 6 + (10 + 6 \cdot 12) \cdot 2 =$
 $= 6 + (10 + 72) \cdot 2 = 6 + 82 \cdot 2 = 6 + 164 = 170$

- b) $6 + 6 + 200 : (12 - 2) + 45 : 5 = 12 + 200 : 10 + 9 =$
 $= 12 + 20 + 9 = 41$
c) $(3 + 3^2) \cdot 2 + 2 \cdot (2 + 2) + 2 \cdot 2 \cdot 2^2 = (3 + 9) \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 16 =$
 $= 12 \cdot 2 + 8 + 16 = 24 + 8 + 16 = 48$
d) $7 \cdot 2 + 12 + 14 : 7 + 22 - (13 - 10 - 1) =$
 $= 14 + 12 + 2 + 22 - 2 = 48$
e) $(4 + 2) \cdot 3^2 + 50 : 10 - 5 = 6 \cdot 9 + 5 - 5 = 54$

29 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $(3 \cdot 2)^2 + 4 : (3 - 1) + 5$
b) $4^2 : 4 + 3 \cdot 2^2 - 2^2$
c) $(6 - 2)^2 - 16 + 4^2$
d) $(6^2)^0 + 40 : 2^2 + 5$
e) $[(4 \cdot 2)^2 - 2^2] : (12 : 6)$
a) $(3 \cdot 2)^2 + 4 : (3 - 1) + 5 = 6^2 + 4 : 2 + 5 = 36 + 2 + 5 = 43$
b) $4^2 : 4 + 3 \cdot 2^2 - 2^2 = 4 + 3 \cdot 4 - 4 = 12$
c) $(6 - 2)^2 - 16 + 4^2 = 4^2 - 16 + 16 = 16$
d) $(6^2)^0 + 40 : 2^2 + 5 = 1 + 40 : 4 + 5 = 1 + 10 + 5 = 16$
e) $[(4 \cdot 2)^2 - 2^2] : (12 : 6) = (8^2 - 4) : 2 = (64 - 4) : 2 = 60 : 2 = 30$

30 Realiza las siguientes operaciones con raíces cuadradas:

- a) $6 + 2 \cdot \sqrt{16} + 2^2 \cdot (3 - 1)$
b) $2 \cdot (4 + 3^2) - \sqrt{4} + (4 + 8)^2$
c) $2 \cdot \sqrt{49} - 2^2 + 12$
d) $8 + \sqrt{64} + 2^3 + 4 \cdot 2 - (16 - 8)$
e) $2 \cdot (3 + \sqrt{4}) + 2 \cdot 4^2$
a) $6 + 2 \cdot \sqrt{16} + 2^2 \cdot (3 - 1) = 6 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 6 + 8 + 8 = 22$
b) $2 \cdot (4 + 3^2) - \sqrt{4} + (4 + 8)^2 = 2 \cdot (4 + 9) - 2 + 12^2 =$
 $= 2 \cdot 13 - 2 + 144 = 26 - 2 + 144 = 168$
c) $2 \cdot \sqrt{49} - 2^2 + 12 = 2 \cdot 7 - 4 + 12 = 14 - 4 + 12 = 22$
d) $8 + \sqrt{64} + 2^3 + 4 \cdot 2 - (16 - 8) = 8 + 8 + 8 + 8 - 8 = 24$
e) $2 \cdot (3 + \sqrt{4}) + 2 \cdot 4^2 = 2 \cdot (3 + 2) + 2 \cdot 16 = 2 \cdot 5 + 32 =$
 $= 10 + 32 = 42$

31 Sustituye los valores de a y b en cada caso:

a	b	$a^2 + b^2$	$3a + 4b$	$(a + b) \cdot 3$	$a^3 + b$
6	6	$6^2 + 6^2 = 72$	$3 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 42$	$(6 + 6) \cdot 3 = 36$	$6^3 + 6 = 222$
4	5	$4^2 + 5^2 = 41$	$3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 32$	$(4 + 5) \cdot 3 = 27$	$4^3 + 5 = 69$

32 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $10 + \sqrt{25} + (5 \cdot 2)^2 + 16$
b) $(5^6 : 5^4) + 5 - (6 - 5^0) + \sqrt{24 + 4^0}$
c) $\sqrt{49} + 10 - (2^3 : 2 + 10 - 4)$

- d) $2 \cdot (\sqrt{100} + 2^2 - 3) + \sqrt{81} - 9$
e) $(6 - 2)^2 + 5^2 - (\sqrt{60 + 2^2} + 3^2)$
a) $10 + \sqrt{25} + (5 \cdot 2)^2 + 16 = 10 + 5 + 10^2 + 16 =$
 $= 15 + 100 + 16 = 131$
b) $(5^6 : 5^4) + 5 - (6 - 5^0) + \sqrt{24 + 4^0} = 5^2 + 5 - (6 - 1) + \sqrt{25} =$
 $= 25 + 5 - 5 + 5 = 30$
c) $\sqrt{49} + 10 - (2^3 : 2 + 10 - 4) = 7 + 10 - (4 + 10 - 4) =$
 $= 7 + 10 - 10 = 7$
d) $2 \cdot (\sqrt{100} + 2^2 - 3) + \sqrt{81} - 9 = 2 \cdot (10 + 4 - 3) + 9 =$
 $= 2 \cdot 11 + 9 = 22 + 9 = 31$
e) $(6 - 2)^2 + 5^2 - (\sqrt{60 + 2^2} + 3^2) = 4^2 + 25 - (\sqrt{60 + 4} + 9) =$
 $= 16 + 25 - 8 - 9 = 24$

33 Realiza las siguientes operaciones con raíces:

- a) $4 \cdot (2 + \sqrt{81}) - \sqrt{4}$
b) $(3 \cdot \sqrt{16} - 4)^2 - 2$
c) $4 \cdot (3 + \sqrt{4})^2 - 10^2$
d) $\sqrt{144} \cdot \sqrt{4} + 2 \cdot (10^2 + 44)$
e) $\sqrt{49} + 2 - (\sqrt{25} - 5)$
f) $\sqrt{100} - 5 \cdot 4^2 + \sqrt{16}$
g) $(\sqrt{36} + 6) \cdot 5 + \sqrt{4}$
a) $4 \cdot (2 + \sqrt{81}) - \sqrt{4} = 4 \cdot (2 + 9) - 2 = 4 \cdot 11 - 2 = 42$
b) $(3 \cdot \sqrt{16} - 4)^2 - 2 = (3 \cdot 4 - 4)^2 - 2 = (12 - 4)^2 - 2 = 8^2 - 2 =$
 $= 64 - 2 = 62$
c) $4 \cdot (3 + \sqrt{4})^2 - 10^2 = 4 \cdot (3 + 2)^2 - 100 = 4 \cdot 5^2 - 100 =$
 $= 4 \cdot 25 - 100 = 100 - 100 = 0$
d) $\sqrt{144} \cdot \sqrt{4} + 2 \cdot (10^2 + 44) = 12 \cdot 2 + 2 \cdot (100 + 44) =$
 $= 24 + 2 \cdot 144 = 24 + 288 = 312$
e) $\sqrt{49} + 2 - (\sqrt{25} - 5) = 7 + 2 = 9$
f) $\sqrt{100} - 5 \cdot 4^2 + \sqrt{16} = 10 - 5 \cdot 16 + 4 = -66$
g) $(\sqrt{36} + 6) \cdot 5 + \sqrt{4} = (6 + 6) \cdot 5 + 2 = 62$

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

34  Explica con tus propias palabras qué son los múltiplos de un número natural y calcula los múltiplos menores que 100 de los siguientes números naturales.

- a) 12 b) 8 c) 22 d) 33
¿Tienen algún múltiplo en común?
a) 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96
b) 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96

c) 0, 22, 44, 66, 88

d) 0, 33, 66, 99

El único múltiplo común que aparece es el 0.

35 ■■■ Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y explica por qué.

a) Un número natural a sólo puede tener 3 múltiplos.

b) Cuanto mayor sea un número natural, más divisores tiene.

c) Un número natural tiene infinitos divisores.

d) Un número natural b tiene infinitos múltiplos.

a) Falsa, el número 2 tiene infinitos múltiplos.

b) Falsa, el 7 tiene 2 divisores, mientras que el número 4 tiene tres divisores.

c) Falsa, el número 2 sólo tiene dos divisores; sólo el 0 tiene infinitos divisores.

d) Falsa, el 0 sólo tiene un múltiplo, que es él mismo.

36 ■■ Teniendo en cuenta los criterios de divisibilidad, razona las siguientes respuestas:

a) 24 es múltiplo de 2, por lo que 2 es un divisor de 24.

b) Todos los números naturales tienen más de un divisor.

c) No hay ningún número que sea divisible por 2 y 3 a la vez.

d) Todos los números divisibles por 9 son divisibles por 3.

e) Todos los números terminados en 0 son divisibles por 5 y por 2.

a) Verdadero, por definición.

b) Verdadero, porque todo número distinto de 0 puede ser dividido por él mismo y por la unidad; además, el 0 tiene infinitos divisores.

c) Falso, el 6 es divisible por 2 y por 3.

d) Verdadero, porque todo múltiplo de 9 es múltiplo de 3.

e) Verdadero, porque todo número que acabe en 0 es múltiplo de 10 y, en consecuencia, es múltiplo de 5 y de 2.

NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS

37 ■ Define qué son los números primos y los números compuestos. Pon ejemplos.

Los números que sólo tienen como divisores a la unidad y a ellos mismos se dice que son **números primos**: 17, 19, 23,...

Los números que tienen más de dos divisores se dice que son **números compuestos**: 22, 12, 16, 24, 81,...

38 ■■■ Pon ejemplos en los siguientes casos:

a) Tres números compuestos pares.

b) Un número primo de 3 cifras terminado en 7.

c) Un número primo par.

d) Los números compuestos que estén entre 20 y 35.

e) Dos números primos de 2 cifras.

a) 4, 6, 8

b) 127

c) 2

d) 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34

e) 23 y 29

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

39 ■■ ¿Qué es la factorización de un número natural?

Realiza la factorización de los siguientes números:

a) 18

b) 42

c) 68

d) 76

e) 81

f) 122

g) 652

h) 940

La descomposición factorial de un número natural es su expresión en forma de producto de números primos.

a) $18 = 2 \cdot 3^2$

b) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

c) $68 = 2^2 \cdot 17$

d) $76 = 2^2 \cdot 19$

e) 3^4

f) $122 = 2 \cdot 61$

g) $652 = 2^2 \cdot 163$

h) $940 = 2^2 \cdot 5 \cdot 47$

40 ■■ Realiza la factorización de los siguientes números y, en función de la descomposición, halla sus divisores. ¿Son todos números compuestos?

a) 32

b) 16

c) 50

d) 81

e) 90

f) 17

g) 29

h) 64

a) $32 = 2^5$

{1, 2, 4, 8, 16, 32}

b) $16 = 2^4$

{1, 2, 4, 8, 16}

c) $50 = 2 \cdot 5^2$

{1, 2, 5, 10, 25, 50}

d) $81 = 3^4$

{1, 3, 9, 27, 81}

e) $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90}

f) $17 = 17$

{1, 17}

g) $29 = 29$

{1, 29}

h) $64 = 2^6$

{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64}

Son primos el 17 y el 29.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

41 ■■ Explica con tus propias palabras qué es el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números naturales y pon ejemplos.

Ver el libro de texto.

42 ■■ Halla mentalmente el m.c.d. de los siguientes números naturales:

a) 8 y 16

b) 2, 4 y 6

c) 10, 5 y 2

d) 12, 6 y 24

a) 8

b) 2

c) 1

d) 6

43 Halla el m.c.d. de los números:

- a) 30 y 175 b) 160 y 200
c) 60, 12 y 48 d) 264, 102 y 308
a) 5 b) 40 c) 12 d) 2

44 Halla el m.c.m. de los números:

- a) 75 y 62 b) 34 y 26
c) 270 y 70 d) 14, 16 y 20
a) 4 650 b) 442
c) 1 890 d) 560

45 Halla el m.c.d. y el m.c.m. de los números:

- a) 940 y 185 b) 22, 44 y 25
c) 90 y 74 d) 20 y 75
e) 28 y 80 f) 14, 45 y 130

	940, 185	22, 44, 25	90, 74	20, 75	28, 80	14, 45, 130
m.c.d.	5	1	2	5	4	1
m.c.m.	34 780	1 100	3 330	300	560	8 190

46 En una fiesta de cumpleaños hay una tarta de 300 gramos y otra de 210 gramos y se quiere dar a los invitados un trozo de tarta de igual peso. Para ello, se dividen en trozos, lo más grandes posibles y sin que sobre nada. ¿Qué peso tendrá cada trozo? ¿Cuántos invitados hay si coincide que ninguno se queda sin tarta?

m.c.d. (300, 210) = 30 gramos. $510 : 30 = 17$ invitados.

47 Tres pintores trabajan a distinto ritmo. Cuando el primero termina de pintar 100 m², el segundo ha pintado el doble y el tercero la mitad. Cada 400 m² pintados tienen que ir a la tienda de pinturas a por más material. ¿Cuándo coincidirán los tres por primera vez en la tienda?

Coincidirán los tres cuando el tercero vaya por primera vez a la tienda. En tal caso, será la cuarta vez que va el segundo y la segunda vez que va el primero.

48 En un Rally compiten 3 marcas de automóviles. La primera reposta combustible cada 80 kilómetros, la segunda cada 120 kilómetros y la tercera cada 150 kilómetros. ¿Cada cuántos kilómetros repostarán los tres a la vez?

m.c.m. (80, 120, 150) = 1 200 kilómetros.

49 Hay 3 huertos de las siguientes dimensiones: 260 m² para plantar patatas, 160 m² para plantar tomates y 410 m² para plantar lechugas. Si se quiere dividir la superficie de plantación total entre varios trabajadores a partes iguales, sin que se mezclen los diferentes tipos de huertas y que las superficies sean lo más grandes posible, ¿qué superficie de cada huerta le corresponde a cada trabajador? ¿Cuántos trabajadores se necesitarán?

m.c.d. (260, 160, 410) = 10 m². El huerto de patatas hay que dividirlo en 26 partes, el de tomates en 16 y el de lechugas en 41 partes. A cada trabajador le corresponden 10 m². Se necesitan $26 + 16 + 41 = 83$ trabajadores.

2 NÚMEROS ENTEROS

<http://www.McGraw-Hill.es>

EJERCICIOS

1 La clasificación de los equipos de fútbol representantes de los grupos de Secundaria de un instituto es:

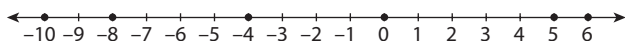
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º
Enero	1.º A	2.º A	1.º B	2.º C	2.º B
Marzo	2.º C	1.º B	2.º B	1.º A	2.º A

Copia la siguiente tabla y utiliza los números enteros para completar la tabla que indica la variación en la clasificación de un mes a otro.

Equipo	1.º A	2.º A	1.º B	2.º C	2.º B
Variación	-3	-3	+1	+3	+2

2 Representa en la recta numérica los números enteros:

-8; +5; 0; -4; +6; -10



3 Encuentra un número entero que cumpla las condiciones:

- a) Es mayor que -3 y menor que 0.
- b) Su valor absoluto es menor que 5.
- c) Entre él y su opuesto hay cinco números enteros.
- d) Está comprendido entre -2 y +2.

a) -2 b) 1, 2, 3, 4 c) -3 d) -1

4 Calcula:

- a) $(-6) + (-2)$
- b) $5 + (-4)$
- c) $9 - (+12)$
- d) $(-4) - (-8)$
- e) $(-3) + 8$
- f) $(-1) - (-1)$
- a) -8
- b) 1
- c) -3
- d) 4
- e) 5
- f) 0

5 Utiliza las propiedades de la suma para realizar estas operaciones:

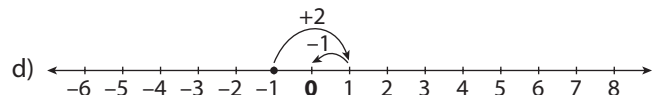
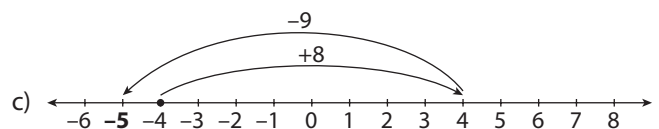
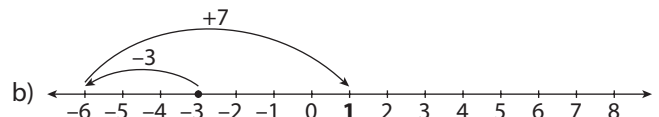
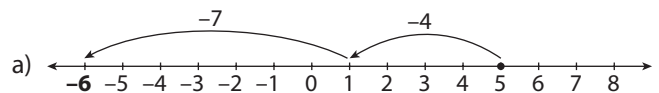
- a) $3 + (-10) + (-4)$
- b) $(-5) + 3 - (-8)$
- c) $-(-4) + 8 + (-2)$
- d) $(-2) + 2 + (-6) - (-8) + 3$
- e) $(-4) - (-5) - (-2) + (-2)$
- a) -11
- b) 6
- c) 10
- d) 5
- e) 1

6 Calcula el valor de x en cada caso:

- a) $7 - (-5) + x = 10$
- b) $(-4) + (-1) - x = -2$
- c) $8 + 4 + x = -4$
- d) $3 - (-1) + x = 6$
- e) $5 + x - (-1) = -9$
- f) $10 - (-3) - x = 11$
- a) -2
- b) -3
- c) -16
- d) 2
- e) -15
- f) 2

7 Realiza las siguientes operaciones sobre la recta numérica:

- a) $5 + (-4) + (-7)$
- b) $-3 + (-3) + 7$
- c) $-4 + 8 + (-9)$
- d) $-1 + 2 + (-1)$



8 Realiza las operaciones con números enteros:

- a) $(-5) \cdot (-2)$
- b) $(+8) \cdot (-4)$
- c) $(-4) \cdot (-8)$
- d) $(-6) : (+2)$
- e) $(+9) : (-3)$
- f) $(-8) : (-4)$
- a) 10
- b) -32
- c) 32
- d) -3
- e) -3
- f) 2

9 Utiliza la propiedad asociativa para hacer las multiplicaciones:

- a) $(-2) \cdot (+4) \cdot (-5)$
- b) $(+5) \cdot (-2) \cdot (-9)$
- a) 40
- b) 90

10 Calcula las siguientes potencias:

- a) De base -3 y exponente 2.
- b) De base 5 y exponente 3.
- c) De base -4 y exponente 3.
- d) 2 elevado al cubo.
- e) 5 elevado al cuadrado.
- a) $(-3)^2 = 9$
- b) $5^3 = 125$
- c) $(-4)^3 = -64$
- d) $2^3 = 8$
- e) $5^2 = 25$

11 Escribe los siguientes productos como una sola potencia:

- a) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)$
- b) $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$
- c) $(-5) \cdot (-5)^2$
- d) $2^5 \cdot (-3)^5$
- e) $4^8 \cdot 3^8$
- a) $(-2)^6$
- b) 3^9
- c) $(-5)^3$
- d) $(-6)^5$
- e) 12^8

12 Escribe estos cocientes como una sola potencia:

- a) $3^4 : 3^2$ b) $(-4)^6 : (-4)^3$
 c) $(-2)^5 : (-2)^3$ d) $(-10)^5 : (-5)^5$
 e) $12^6 : (-4)^6$ f) $(-5)^4 : (-5)^3$
- a) 3^2 b) $(-4)^3$ c) $(-2)^2$
 d) 2^5 e) $(-3)^6$ f) -5

13 Calcula y simplifica:

- a) $3^4 : 3^2$ b) $(-4)^3 : (-4)^2 \cdot (-4)$
 c) $[(-2)^8 \cdot (-2)^3] : [(-2)^4 \cdot (-2)^5]$ d) $(-3)^4 \cdot (-3)^5 : (-3)^3$
 e) $(-2)^4 \cdot 5^4 : 10^2$
- a) $3^2 = 9$ b) $(-4)^2 = 16$ c) $(-2)^2 = 4$
 d) $(-3)^6 = 729$ e) $10^2 = 100$

14 Calcula:

- a) $[(-2)^3]^2$ b) $(3^2)^2$ c) $[(-5)^2]^3$
 a) $(-2)^6 = 2^6$ b) $3^4 = 81$ c) $(-5)^6 = 5^6$

15 Realiza las operaciones:

- a) $[2 \cdot (-3^2 : 3) + (-5) \cdot (4 - 6)^2] \cdot (-2)$
 b) $(-3) \cdot (-3 - 5)^2 + 4 \cdot (-2)$
 c) $(-3 + 5) : 2 + 6 \cdot (-5)$
- a) $[2 \cdot (-3^2 : 3) + (-5) \cdot (4 - 6)^2] \cdot (-2) =$
 $= [2 \cdot (-3) + (-5) \cdot (-2)^2] \cdot (-2) = (-6 - 20) \cdot (-2) = 52$
 b) $(-3) \cdot (-3 - 5)^2 + 4 \cdot (-2) = (-3) \cdot (-8)^2 - 8 = (-3) \cdot 64 - 8 =$
 $= -192 - 8 = -200$
 c) $(-3 + 5) : 2 + 6 \cdot (-5) = 2 : 2 - 30 = 1 - 30 = -29$

16 Calcula:

- a) $[3 \cdot (-3)^2]^2 + (4 \cdot 2 + 6) : 7$
 b) $(-5 \cdot 2 + 3 \cdot 2) : 4 + [(-2)^3]^2 - 5 \cdot (-3)$
 c) $(4 \cdot 3 - 8) - (-5)^2$
- a) $[3 \cdot (-3)^2]^2 + (4 \cdot 2 + 6) : 7 = (3 \cdot 3^2)^2 + (8 + 6) : 7 =$
 $= 27^2 + 14 : 2 = 729 + 7 = 736$
 b) $(-5 \cdot 2 + 3 \cdot 2) : 4 + [(-2)^3]^2 - 5 \cdot (-3) = (-10 + 6) : 4 + 64 + 15 =$
 $= (-4) : 4 + 64 + 15 = 78$
 c) $(4 \cdot 3 - 8) - (-5)^2 = (12 - 8) - 25 = 4 - 25 = -21$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

1 Asocia cada situación con un número entero:

- a) La temperatura mínima de hoy ha sido 8 °C bajo cero.

- b) A Juan le debo 4 €.

- c) El ascensor está en la 4.ª planta.

- d) El ascensor está en el tercer sótano.

- e) Roma se fundó en el año 753 a. C.

- a) -8 b) -4 c) +4
 d) -3 e) -753

2 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) El conjunto de los números naturales está contenido en el conjunto de los números enteros.
 b) Si se elige un número natural siempre se puede encontrar un número natural menor que él.
 c) Si se elige un número entero siempre se puede encontrar un número entero menor que él.
 d) Todo número natural es un número entero.
 e) Todo número entero es un número natural.

- a) Verdadera.
 b) Falsa (no hay ningún número natural menor que el 0)
 c) Verdadera.
 d) Verdadera.
 e) Falsa.

3 Escribe en tu cuaderno todos los números enteros comprendidos entre:

- a) -5 y -1 b) -4 y 0 c) -1 y +2
 a) -4, -3, -2 b) -3, -2, -1 c) 0, +1

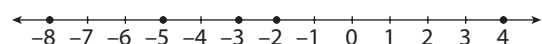
4 Ordena de menor a mayor los números enteros:

-1, +8, -5, +3, -2, +1 y +4

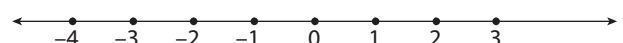
$-5 < -2 < -1 < +1 < +3 < +4 < +8$

5 Representa en la recta numérica:

-2, -3, -8, 4 y -5



6 Representa en una recta numérica los números enteros comprendidos entre -4 y +3.



7 Utiliza los números enteros para resolver la siguiente cuestión:

«Si estamos situados en el punto -3 de la recta numérica y un desplazamiento consiste en avanzar 4 unidades y retroceder 2, al repetir este proceso 5 veces, ¿en qué punto de la recta numérica estaremos?».

$-3 + 5 \cdot (4 - 2) = 7$. Estaremos en el 7.

2 NÚMEROS ENTEROS

<http://www.McGraw-Hill.es>

8 Indica cuál es el valor absoluto de los números enteros:

-10, +15, -3, -1, 0 y +8

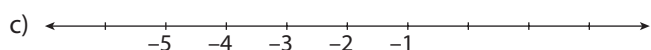
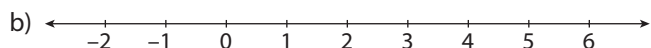
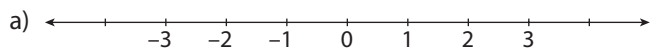
10, 15, 3, 1, 0, 8

9 Representa en la recta numérica los números enteros:

a) Menores en valor absoluto que 4.

b) Menores que 7 y mayores que -3.

c) Menores que 0 y mayores que -6.



OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

10 Calcula:

a) $(-8) + (-5)$

b) $(-5) - (-7)$

c) $(+10) - (-12)$

d) $(-6) - (+8)$

a) -13

b) 2

c) 22

d) -14

11 Aplica las propiedades de la suma para calcular:

a) $(+2) - (-12) + (+4)$

b) $(-6) + (+7) - (+8)$

c) $-(-6) + (+3) + (+1)$

d) $(-3) - (-6) + (-6) - (+8) - (-5)$

a) $(+2) - (-12) + (+4) = 2 + 12 + 4 = 18$

b) $(-6) + (+7) - (+8) = -6 + 7 - 8 = -7$

c) $-(-6) + (+3) + (+1) = 6 + 3 + 1 = 10$

d) $(-3) - (-6) + (-6) - (+8) - (-5) = -3 + 6 - 6 - 8 + 5 = -6$

12 Calcula el valor de x en cada caso:

a) $(+6) - (+5) + x = (-9)$

b) $(+7) + (-1) - x = (+12)$

c) $(-9) + (-4) + x = (-8)$

d) $(+4) + (-1) + x = (+2)$

a) $(+6) - (+5) + x = (-9); 6 - 5 + x = -9; x = -9 - 6 + 5; x = -10$

b) $(+7) + (-1) - x = (+12); 7 - 1 - x = 12; -x = 12 - 7 + 1; x = -6$

c) $(-9) + (-4) + x = (-8); -9 - 4 + x = -8; x = -8 + 9 + 4; x = 5$

d) $(+4) + (-1) + x = (+2); 4 - 1 + x = 2; x = 2 - 4 + 1; x = -1$

13 Escribe el opuesto de:

a) -12

b) 16

c) -9

d) -1

a) 12

b) -16

c) 9

d) 1

14 Comprueba si la resta de números enteros cumple las siguientes propiedades:

a) Conmutativa.

b) Asociativa.

a) No, ya que $2 - 1$ es distinto de $1 - 2$.

b) Verdadero.

15 Calcula:

a) $(-3) \cdot (-4)$

b) $(-3) \cdot (+5)$

c) $(+9) \cdot (+2)$

d) $(+6) \cdot (-2)$

a) 12

b) -15

c) 18

d) -12

16 Aplica la propiedad asociativa para hacer la multiplicación:

a) $(+3) \cdot (+7) \cdot (-2)$

b) $(-3) \cdot (+2) \cdot (-5)$

c) $(-7) \cdot (+3) \cdot (-4)$

d) $(+5) \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot (+4) \cdot (+6)$

a) -42

b) 30

c) 84

d) 1 200

17 Utiliza la propiedad distributiva para realizar las multiplicaciones de dos formas:

a) $(+2) \cdot [(-5) + (-2)]$

b) $[(-4) - (-5)] \cdot (+3)$

c) $(-6) \cdot [(-2) + (+5)]$

d) $(+3) \cdot [(+12) + (-2)]$

a) $2 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) = -14$

b) $(-4) \cdot 3 - (-5) \cdot 3 = 3$

c) $(-6) \cdot (-2) + (-6) \cdot 5 = -18$

d) $3 \cdot 12 + 3 \cdot (-2) = 30$

18 Aplica la propiedad distributiva para realizar las multiplicaciones:

a) $(-5) \cdot [(+5) + (-3)]$

b) $[(+2) - (-3)] \cdot (+2)$

c) $(-4) \cdot [(-3) + (+8)]$

d) $(+1) \cdot [(-10) + (-5)]$

a) $(-5) \cdot 5 + (-5) \cdot (-3) = -25 + 15 = -10$

b) $2 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = 4 + 6 = 10$

c) $(-4) \cdot (-3) + (-4) \cdot 8 = 12 - 32 = -20$

d) $1 \cdot (-10) + 1 \cdot (-5) = -10 - 5 = -15$

19 Saca factor común para calcular:

a) $(-7) \cdot (-4) + (-2) \cdot (-4)$

b) $(-5) \cdot (-2) + 5 \cdot (-2)$

c) $(-3) \cdot (-5) + (-3) \cdot 6$

a) $(-4) \cdot [-7 + (-2)] = 36$

b) $10 \cdot (-1 + 1) = 0$

c) $(-3) \cdot [(-5) + 6] = -3$

20 Aplica la propiedad distributiva para calcular:

a) $(-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-3) - (-2) \cdot (-6)$

b) $(-3) \cdot 5 + (-3) \cdot (-3) - (-3) \cdot (-2)$

c) $(-5) \cdot 2 + (-5) \cdot (-4) - (-5) \cdot (-3)$

a) $-2 \cdot [4 + (-3) - (-6)] = -14$

b) $-3 \cdot [5 + (-3) - (-2)] = -12$

c) $-5 \cdot [2 + (-4) - (-3)] = -5$

21 Aplica la propiedad distributiva para calcular:

a) $(-2) \cdot 4 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-5) \cdot 6 - (-2) \cdot (-6) \cdot 3$

b) $9 \cdot (-3) \cdot 2 + (-3) \cdot 4 \cdot 6 - 2 \cdot (-3) \cdot 3$

c) $(-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 4 \cdot 6 - 4 \cdot (-2) \cdot 5$

- a) $12 \cdot (2 + 5 - 3) = 48$
 b) $18 \cdot (-3 - 4 + 1) = -108$
 c) $4 \cdot (-1 - 12 + 10) = -12$

22 **Saca factor común para calcular:**

- a) $(-4) + (-2) \cdot (-4) - 5 \cdot (-4)$
 b) $(-5) \cdot (-4) + 5 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-4)$
 c) $(-3) \cdot (-5) + (-3) \cdot 6 - 3$
 a) $-4 \cdot (1 - 2 - 5) = 24$
 b) $-4 \cdot (-5 + 5 - 4) = 16$
 c) $-3 \cdot (-5 + 6 + 1) = -6$

23 **Resuelve estas divisiones:**

- a) $(-8) : (+2)$ b) $(+6) : (-3)$
 c) $(-9) : (-3)$ d) $(+18) : (+6)$
 a) -4 b) -2 c) 3 d) 3

24 **Copia en tu cuaderno y asocia cada operación con su resultado:**

$-2 \cdot 5 - 4 \cdot (-9) : (-3)$	-6
$(-2 \cdot 5 - 4) \cdot (-9) : (-3)$	-42
$-2 \cdot (5 - 4) \cdot (-9) : (-3)$	-22

25 **Expresa como potencia las siguientes multiplicaciones:**

- a) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$ b) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
 c) $(-5) \cdot (-5)$ d) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
 a) 2^4 b) 3^4 c) 5^2 d) $1^6 = 1$

26 **Expresa en forma de multiplicación y calcula el valor de las potencias:**

- a) $(+2)^4$ b) $(-3)^2$
 c) $(+4)^3$ d) $(-4)^4$
 a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ b) $-3 \cdot (-3) = 9$
 c) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ d) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$

27 **Calcula las potencias:**

- a) De base -5 y exponente 3.
 b) De base 4 y exponente 2.
 c) De base -2 y exponente 3.
 d) 3 elevado al cubo.
 e) 4 elevado al cuadrado.
 a) -125 b) 16 c) -8
 d) 27 e) 16

28 **Sin hacer los cálculos, explica cómo ordenas de menor a mayor estas potencias:**

- $(-5)^2$ $(-8)^3$ $(-5)^4$ $(-8)^4$

Teniendo en cuenta los signos, la base y el exponente:

$$(-8)^3 < (-5)^2 < (-5)^4 < (-8)^4$$

29 **Copia en tu cuaderno y completa las series de números enteros con dos términos más:**

- a) -7, 14, -28, 56, ..., ... b) -1, -8, -27, ..., ...
 c) 1, 4, 9, 16, ..., ... d) -7, -5, -3, -1, ..., ...
 a) -112, 224 b) -64, -125 c) 25, 36 d) +1, +3

30 **Escribe los productos como una sola potencia:**

- a) $(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)$ b) $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$
 c) $(-4) \cdot (-4)^2 \cdot (-4)^3$
 a) 3^6 b) 2^9 c) 4^6

31 **Copia en tu cuaderno y completa los siguientes cálculos:**

- a) $(-2)^5 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^{\square}$ b) $(-3)^2 \cdot (-3)^{\square} = (-3)^7$
 c) $(-2)^7 : (-2)^{\square} = (-2)^5$ d) $(-2)^{\square} : (-2)^3 = (-2)^6$
 e) $[(-2)^{\square}]^4 = (-2)^{12}$
 a) $(-2)^{12}$ b) $(-3)^5$ c) $(-2)^2$
 d) $(-2)^9$ e) $[(-2)^3]^4$

32 **Escribe los cocientes como una sola potencia:**

- a) $4^4 : 4^2$ b) $(-3)^9 : (-3)^6$ c) $(-2)^6 : (-2)^3$
 a) 4^2 b) $(-3)^3$ c) $(-2)^3$

33 **Calcula y simplifica:**

- a) $2^4 : 2^3$ b) $(-2)^3 : (-2)^2 \cdot (-2)$
 c) $[(-3)^4 \cdot (-3)^6] : [(-3)^2 \cdot (-3)^6]$
 a) 2 b) 4 c) 9

34 **Simplifica y utiliza la calculadora para obtener el resultado de:**

- a) $[(-4)^3]^5$ b) $(5^3)^2$ c) $[(-2)^3]^3$
 a) $-4^{15} = -1\,073\,741\,824$ b) $5^6 = 15\,625$
 c) $-2^9 = -512$

35 **Si a , b y c son números enteros, tales que $a > 0$, $b > 0$ y $c < 0$, indica el signo de las operaciones siguientes:**

- a) $a \cdot (-b^2) \cdot c$ b) $a \cdot b^2 \cdot (-c)$
 c) $-a \cdot b^2 \cdot (-c)$ d) $a \cdot (-b)^2 \cdot c$
 a) Negativo b) Positivo
 c) Negativo d) Negativo

2 NÚMEROS ENTEROS

<http://www.McGraw-Hill.es>

36 ¿Cuáles de los siguientes números son cuadrados perfectos?

- a) 81 b) 101 c) 100
d) 121 e) 75 f) 25

Los a), c), d) y f).

37 Sin utilizar la calculadora, indica si son correctas las igualdades:

- a) $\sqrt{442} = 21$ b) $\sqrt{625} = -25$
c) $\sqrt{144} = -13$ d) $\sqrt{144} = -12$

- a) No, porque el radicando debe acabar en 1.
b) Sí.
c) No, porque el radicando debe acabar en 9 y, además, un número positivo no puede ser igual a un número negativo.
d) Sí.

38 Calcula:

- a) $|-4| + |-3| - |-5| \cdot |+3|$ b) $-|-14| : (-7) - |-15|$
c) $-|(-6) \cdot (-2)| + |-5| \cdot (-2)^4$
a) $|-4| + |-3| - |-5| \cdot |+3| = 4 + 3 - 5 \cdot 3 = 7 - 15 = -8$
b) $-|-14| : (-7) - |-15| = -14 : (-7) - 15 = 2 - 15 = -13$
c) $-|(-6) \cdot (-2)| + |-5| \cdot (-2)^4 = -12 + 5 \cdot 16 = -12 + 80 = 68$

39 Explica por qué son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) La suma de dos números enteros es siempre un número entero.
b) La multiplicación de dos números enteros es siempre un número entero.
c) La división de dos números enteros es siempre un número entero.
d) La raíz cuadrada de un número entero es siempre un número entero.
a) Verdadera.
b) Verdadera.
c) Falsa ($2 : 3$ no es un número entero).
d) Falsa (la raíz cuadrada de 2 no es un número entero).

40 Calcula:

- a) $(-3) \cdot [(-4) : 2 + (-2)]$ b) $(-2)^2 \cdot [7 + (-3)^2]$
c) $[(-2) \cdot (9 : 3 + (-2))^2] \cdot (-3)^2$
a) $(-3) \cdot [(-4) : 2 + (-2)] = -3 \cdot (-2 - 2) = -3 \cdot (-4) = 12$
b) $(-2)^2 \cdot [7 + (-3)^2] = 4 \cdot (7 + 9) = 4 \cdot 16 = 64$
c) $[(-2) \cdot (9 : 3 + (-2))^2] \cdot (-3)^2 = [(-2) \cdot (3 + 2)^2] \cdot 9 = (-2) \cdot 25 \cdot 9 = -450$

PROBLEMAS CON NÚMEROS ENTEROS

41 En una tienda de alquiler de películas, al finalizar la semana, tienen un total de 302 DVD. Si durante la última semana han prestado 45 películas y se han devuelto 52, ¿cuántos DVD tenía la tienda al comenzar la semana?

$$302 + 45 - 52 = 295 \text{ películas.}$$

42 Una empresa con 15 empleados empezó el año con un saldo negativo de 40 000 €, pero cuando finalizó el año su saldo era de 27 540 €.

- a) ¿Cuál es el beneficio neto de la empresa?
b) Si para premiar el esfuerzo de los empleados se dieron a cada uno 600 € como paga extra, ¿cuál fue el beneficio bruto de la empresa?

a) $40\,000 + 27\,500 = 67\,500$

b) $67\,500 + 600 \cdot 15 = 76\,500$

43 Un edificio tiene tres sótanos, planta baja y diez plantas más. Si Luis sube del tercer sótano a la planta segunda, Alberto de la planta primera a la octava, Cristina del primer sótano a la séptima planta y Carmen de la planta tercera a la décima, ¿quién ha subido más plantas? Ordena de mayor a menor, según el número de pisos que ha subido cada uno.

Cristina ha subido más plantas; Cristina (8), Alberto (7) = Carmen (7), Luis (5).

44 Un canguro se desplaza dando saltos de 2 metros cada uno. Si ha dado tres saltos hacia delante, un salto hacia atrás, cuatro saltos hacia delante y dos saltos hacia atrás, ¿a qué distancia del punto de partida se encuentra?

$$6 - 2 + 8 - 4 = 8. \text{ Está a 8 m del punto de partida.}$$

45 En un autobús viajan 23 personas. En la primera parada suben tres personas y se baja una; en la segunda parada se bajan dos pasajeros; en la tercera parada suben cuatro y se bajan dos; en la cuarta parada se bajan tres y sube uno. ¿Cuántas personas llegan al final del trayecto?

$$23 + 3 - 1 - 2 + 4 - 2 - 3 + 1 = 23 \text{ personas.}$$

46 El precio de la entrada a un espectáculo es de 8 €, pero hay un descuento de 2 € por cada tres entradas que se compran. Si pedimos 15 entradas, ¿cuánto dinero tendremos que pagar por ellas?

$$(15 \cdot 8) - (15 : 3 \cdot 2) = 120 - 10 = 110 \text{ €}$$

47  Un buceador se sumerge descendiendo 3 metros cada 10 segundos. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a una profundidad de 24 metros? Si desde esa profundidad inicia el ascenso a razón de 2 metros cada 12 segundos, ¿en cuánto tiempo alcanzará la superficie?

a) $24 : 3 \cdot 10 = 80$ segundos; b) $24 : 2 \cdot 12 = 144$ segundos.

48  En un campo se han plantado pinos, distribuidos en filas y columnas, formando un cuadrado. Como sobran 25 pinos, se compran 16 pinos más. ¿Cuántos árboles se han plantado en total?

Como al añadir 41 pinos ($25 + 16$) ya se forma un cuadrado, el número de pinos plantados es $\left(\frac{41 + 1}{2}\right)^2 = 21^2 = 441$. Donde hemos utilizado que todo número impar n es el número de puntos de dos de los lados de una cuadrícula cuyo lado tiene $\frac{n+1}{2}$ puntos.

49  Un depósito de agua, con una capacidad de 3 000 litros, tiene un grifo del que salen 20 litros por minuto y una válvula de entrada al depósito con un caudal de 16 litros por minuto. Si se abren a la vez el grifo de salida y la válvula de entrada, ¿qué cantidad de agua hay en el depósito al cabo de 5 minutos?

$3\,000 - 5 \cdot (20 - 16) = 2\,995$ litros.

50  Una cámara frigorífica se enfría a razón de 5°C cada 2 horas. Si la temperatura inicial es de 20°C , ¿cuántas horas tardará en llegar a los 20°C bajo cero? Utiliza los números enteros para resolver la cuestión.

$-20 = 20 - 5 \cdot x : 2$. Tardará 16 horas.

51  El termómetro de una cámara frigorífica marca -20°C de temperatura. Si al desconectar el motor de funcionamiento la temperatura sube 4°C cada 2 horas, ¿cuánto tiempo tarda en alcanzar la temperatura de 20°C ?

$20 = -20 + 4 \cdot x : 2$. Tardará 20 horas.

EJERCICIOS

1 Escribe cuatro fracciones equivalentes a cada una de las siguientes y halla también las fracciones irreducibles en cada caso:

$$\frac{32}{12}, \frac{3}{9}, \frac{4}{16}, \frac{8}{32}, \frac{6}{18}, \frac{4}{20}, \frac{4}{24}, \frac{18}{81}$$

$$\frac{32}{12} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = \frac{24}{9} = \frac{40}{15}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15}$$

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{5}{20}$$

$$\frac{8}{32} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16}$$

$$-\frac{6}{18} = -\frac{1}{3} = -\frac{2}{6} = -\frac{3}{9} = -\frac{4}{12}$$

$$\frac{4}{20} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{5}{25}$$

$$\frac{4}{24} = \frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{5}{30}$$

$$\frac{18}{81} = \frac{2}{9} = \frac{6}{27} = \frac{4}{18} = \frac{8}{36}$$

2 El estudio estadístico realizado en la taquilla de un cine nos dice que $\frac{3}{27}$ de los que hacen cola se cuelan.

Si hay una fila de 54 personas esperando, ¿cuántos podremos decir que se van a colar?

$$\frac{3}{27} \cdot 54 = 3 \cdot 2 = 6$$

3 Clasifica estos números racionales, e indica si son enteros o no enteros:

$$\frac{6}{10}, \frac{8}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{9}{3}, -\frac{16}{4}, \frac{7}{9}, -\frac{9}{5}, \frac{3}{4}, -\frac{6}{3}$$

Todos son racionales. Son naturales $\frac{8}{4}$ y $\frac{9}{3}$.

Son enteros los que son naturales y, además, $-\frac{16}{4}$ y $-\frac{6}{3}$.

4 Observa los siguientes pares de números e indica cuál es el mayor y cuál el menor:

a) $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}$

b) $\frac{6}{9}, \frac{1}{3}$

c) $\frac{6}{8}, \frac{5}{7}$

d) $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}$

e) $\frac{4}{8}, \frac{2}{9}$

f) $\frac{1}{8}, \frac{3}{2}$

a) $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$

b) $\frac{6}{9} > \frac{1}{3}$

c) $\frac{6}{8} > \frac{5}{7}$

d) $\frac{2}{5} < \frac{3}{7}$

e) $\frac{4}{8} > \frac{2}{9}$

f) $\frac{1}{8} < \frac{3}{2}$

5 Explica con tus palabras cómo se representan los números racionales en la recta. Ayúdate con ejemplos.

Ver libro.

6 Ordena de mayor a menor los siguientes números racionales:

$$\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{7}, -\frac{1}{15}$$

$$\frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{2}{7} > -\frac{1}{15} > -\frac{1}{3}$$

7 Clasifica estos números en el conjunto al que pertenecen:

$$-\frac{10}{2}, \frac{5}{1}, \frac{6}{8}, -\frac{1}{2}$$

Natural: $\frac{5}{1}$; entero: $-\frac{10}{2}$; racionales: $\frac{6}{8}, -\frac{1}{2}$

8 Realiza las siguientes sumas y restas, y simplifica el resultado:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{7}$

c) $\frac{6}{14} + \frac{4}{7} - \frac{1}{7}$

d) $\frac{2}{10} - \frac{1}{5}$

e) $\frac{4}{12} + \frac{1}{24} - \frac{3}{12}$

f) $\frac{8}{9} - \frac{3}{9} + \frac{1}{3}$

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{7} = \frac{14}{21} + \frac{7}{21} + \frac{12}{21} = \frac{33}{21} = \frac{11}{7}$

c) $\frac{6}{14} + \frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{6}{14} + \frac{8}{14} - \frac{2}{14} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

d) $\frac{2}{10} - \frac{1}{5} = \frac{2}{10} - \frac{2}{10} = 0$

e) $\frac{4}{12} + \frac{1}{24} - \frac{3}{12} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} - \frac{6}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

f) $\frac{8}{9} - \frac{3}{9} + \frac{1}{3} = \frac{8}{9} - \frac{3}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$

9 Resuelve las siguientes sumas y restas, simplificando el resultado:

a) $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{2}{8} - \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{7}\right) + \frac{1}{7}$

d) $\frac{3}{8} + \frac{2}{16} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\right)$

a) $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

b) $\frac{2}{8} - \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{8} - \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) = \frac{2}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$
 $= \frac{2}{8} - \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{7}\right) + \frac{1}{7} = \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{7}{21} + \frac{6}{21} + \frac{3}{21} = \frac{16}{21} \\ \text{d)} \quad & \frac{3}{8} + \frac{2}{16} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\right) = \frac{3}{8} + \frac{2}{16} - \left(\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\right) = \frac{3}{8} + \frac{2}{16} - \frac{4}{6} = \\ & = \frac{18}{48} + \frac{6}{48} - \frac{32}{48} = -\frac{8}{48} = -\frac{4}{24} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

10 Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones y simplifica el resultado:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{2}{9} : \frac{2}{9} & \text{b)} \quad & \left(-\frac{1}{2}\right) : \frac{3}{4} \\ \text{c)} \quad & \frac{3}{8} : \frac{1}{4} \cdot 2 & \text{d)} \quad & 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \\ \text{e)} \quad & \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} & \text{f)} \quad & \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \\ \text{a)} \quad & \frac{2}{9} : \frac{2}{9} = \frac{18}{18} = 1 & \text{b)} \quad & \left(-\frac{1}{2}\right) : \frac{3}{4} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \\ \text{c)} \quad & \frac{3}{8} : \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{12}{8} \cdot 2 = 3 & \text{d)} \quad & 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{9}{28} \\ \text{e)} \quad & \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{140} = \frac{9}{70} \\ \text{f)} \quad & \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{24}{630} = -\frac{12}{315} = -\frac{4}{105} \end{aligned}$$

11 Un pintor ha pintado las $\frac{3}{8}$ partes de una superficie en una hora. ¿Cuánto habrá pintado en $\frac{3}{4}$ de hora más?

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{32} \text{ ha pintado en una hora y tres cuartos.}$$

12 Resuelve las siguientes operaciones y simplifica el resultado. Recuerda que debes tener en cuenta la jerarquía de operaciones:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left(\frac{3}{5} : \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} & \text{b)} \quad & \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4}\right) : 2 \\ \text{c)} \quad & 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4} & \text{d)} \quad & -2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} \\ \text{a)} \quad & \left(\frac{3}{5} : \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \\ \text{b)} \quad & \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4}\right) : 2 = \frac{2}{28} : 2 = \frac{2}{56} = \frac{1}{28} \\ \text{c)} \quad & 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4} = 2 \cdot 1 : \frac{1}{4} = 8 \\ \text{d)} \quad & -2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} = -2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

13 Una entrada de cine me cuesta $\frac{6}{14}$ de mi paga semanal. ¿Qué fracción de mis pagas semanales he gastado si he ido al cine una vez a la semana durante 7 semanas? ¿Y si voy dos veces a la semana durante cuatro semanas?

$$7 \cdot \frac{6}{14} = 3 \text{ pagas.}$$

$$4 \cdot 2 \cdot \frac{6}{14} = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}$$

14 Calcula mentalmente las potencias siguientes y expresa el resultado en forma de fracción:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left(-\frac{1}{2}\right)^3 & \text{b)} \quad & \left(\frac{2}{5}\right)^2 & \text{c)} \quad & \left(\frac{3}{4}\right)^4 \\ \text{d)} \quad & \left(\frac{2}{3}\right)^3 & \text{e)} \quad & \left(-\frac{1}{4}\right)^2 & \text{f)} \quad & \left(-\frac{3}{5}\right)^3 \\ \text{a)} \quad & \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} & \text{b)} \quad & \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} & \text{c)} \quad & \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} \\ \text{d)} \quad & \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} & \text{e)} \quad & \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} & \text{f)} \quad & \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{27}{125} \end{aligned}$$

15 Opera y simplifica:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 & \text{b)} \quad & \frac{2}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \\ \text{c)} \quad & \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{17}{26} - 1\right) & \text{d)} \quad & 3 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{6}\right) - \left(-\frac{2}{8}\right)^3 \\ \text{e)} \quad & -\left(\frac{-5}{-7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 & \text{f)} \quad & \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \\ \text{a)} \quad & \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{6} + \frac{4}{25} = \frac{25}{150} + \frac{24}{150} = \frac{49}{150} \\ \text{b)} \quad & \frac{2}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{4} - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{4} - \frac{2}{8} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ \text{c)} \quad & \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{17}{26} - 1\right) = \frac{16}{25} - \left(\frac{17}{26} - \frac{26}{26}\right) = \frac{16}{25} + \frac{9}{26} = \\ & = \frac{416}{650} + \frac{225}{650} = \frac{641}{650} \\ \text{d)} \quad & 3 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{6}\right) - \left(-\frac{2}{8}\right)^3 = 3 \cdot \left(\frac{24}{30} + \frac{10}{30}\right) + \frac{8}{512} = 3 \cdot \frac{34}{30} + \frac{1}{64} = \\ & = \frac{102}{30} + \frac{1}{64} = \frac{6528}{1920} + \frac{30}{1920} = \frac{6558}{1920} = \frac{3279}{960} \\ \text{e)} \quad & -\left(\frac{-5}{-7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{5}{28} \\ \text{f)} \quad & \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{4}{49} \cdot \frac{343}{27} \cdot \frac{81}{16} = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

16 Indica si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

«Toda fracción elevada a un exponente negativo dará como resultado una fracción negativa».

Falso.

17 Calcula las siguientes potencias y expresa el resultado en forma de fracción:

a) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$
 d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$ e) $\left(-\frac{4}{6}\right)^{-2}$ f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

a) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{1}\right)^3 = 125$

c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81}$

e) $\left(-\frac{4}{6}\right)^{-2} = \left(-\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{36}{16} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

18 Realiza las siguientes operaciones:

a) $2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$ b) $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \frac{2}{6}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2$

a) $2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = 2 \cdot \left(\frac{3}{15} + \frac{10}{15}\right) - (-3) = 2 \cdot \frac{13}{15} + 3 =$
 $= \frac{26}{15} + \frac{45}{15} = \frac{71}{15}$

b) $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \frac{2}{6} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{6} = 3 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{6} = \frac{4}{3} + \frac{2}{6} =$
 $= \frac{8}{6} + \frac{2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{8} = \frac{27}{8} + \frac{3}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$

d) $\frac{4}{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2 = \frac{4}{8} + \left(\frac{2}{1}\right)^3 \cdot 2 = \frac{4}{8} + 16 = \frac{4}{8} + \frac{128}{8} =$
 $= \frac{132}{8} = \frac{33}{2}$

19 Calcula mentalmente las raíces cuadradas de los siguientes números racionales, y expresa el resultado en forma de fracción:

a) $\sqrt{\frac{9}{81}}$

b) $\sqrt{\frac{4}{16}}$

c) $\sqrt{\frac{16}{36}}$

d) $\sqrt{\frac{25}{36}}$

e) $\sqrt{\frac{4}{49}}$

f) $\sqrt{\frac{9}{64}}$

a) $\sqrt{\frac{9}{81}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

b) $\sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

d) $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$

e) $\sqrt{\frac{4}{49}} = \frac{2}{7}$

f) $\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$

20 Realiza las siguientes raíces, dejando el resultado en forma de fracción:

a) $\sqrt{\frac{256}{144}}$

b) $\sqrt{\frac{81}{324}}$

c) $\sqrt{\frac{121}{225}}$

d) $\sqrt{\frac{49}{36}}$

e) $\sqrt{\frac{900}{1225}}$

f) $\sqrt{\frac{64}{196}}$

a) $\sqrt{\frac{256}{144}} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

b) $\sqrt{\frac{81}{324}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{\frac{121}{225}} = \frac{11}{15}$

d) $\sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$

e) $\sqrt{\frac{900}{1225}} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$

f) $\sqrt{\frac{64}{196}} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

FRACCIONES. EQUIVALENCIA DE FRACCIONES

1 Define qué es una fracción equivalente. ¿Cómo comprobamos que dos fracciones son equivalentes?

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si se cumple $a \cdot d = b \cdot c$.

2 ¿Qué son las fracciones irreducibles? Halla la fracción irreducible en cada caso:

a) $\frac{26}{38}$ b) $\frac{92}{196}$ c) $\frac{27}{81}$

Son las que no se pueden simplificar más.

a) $\frac{26}{38} = \frac{13}{19}$ b) $\frac{92}{196} = \frac{23}{49}$ c) $\frac{27}{81} = \frac{1}{3}$

3 Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes:

a) $-\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{11}$ c) $\frac{2}{9}$
d) $\frac{3}{27}$ e) $\frac{4}{16}$ f) $\frac{11}{22}$

a) $-\frac{3}{5} = \frac{-6}{10} = \frac{-9}{15} = \frac{-12}{20}$ b) $\frac{2}{11} = \frac{4}{22} = \frac{6}{33} = \frac{8}{44}$

c) $\frac{2}{9} = \frac{4}{18} = \frac{6}{27} = \frac{8}{36}$ d) $\frac{3}{27} = \frac{1}{9} = \frac{2}{18} = \frac{4}{36}$

e) $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ f) $\frac{11}{22} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

4 Contesta a las siguientes preguntas:

a) El número $-\frac{1}{2}$, ¿pertenece al conjunto de los números enteros?

b) ¿Todo número entero es número racional?

c) ¿Todo número racional es número entero?

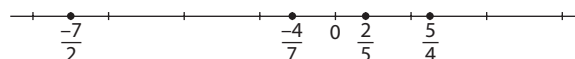
a) No. b) Sí. c) No.

5 Pon dos ejemplos de números racionales que no pertenezcan al conjunto de los números enteros.

$-\frac{1}{2}, \frac{13}{19}$

6 Representa en la recta numérica los números racionales:

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $-\frac{4}{7}$ d) $-\frac{7}{2}$



OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

7 Calcula:

a) Los $\frac{3}{5}$ de -2 b) $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{7}$ de -6 d) $\frac{2}{7}$ de 4

a) $-\frac{6}{5}$ b) $\frac{1}{5}$

c) $-\frac{12}{7}$ d) $\frac{8}{7}$

8 Calcula mentalmente las operaciones:

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{14}$ b) $\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{6}$ d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ f) $\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$

g) $\frac{4}{6} - \frac{2}{3}$ h) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}$

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{14} = \frac{4}{14} + \frac{3}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{2}{15} + \frac{5}{15} = \frac{13}{15}$

c) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} + \frac{8}{6} + \frac{2}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

f) $\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} + \frac{18}{12} - \frac{4}{12} = \frac{23}{12}$

g) $\frac{4}{6} - \frac{2}{3} = \frac{4}{6} - \frac{4}{6} = 0$

h) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

9  Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado obtenido:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{7}{60}$

b) $\frac{3}{20} + \frac{7}{5} + \frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3} + \frac{2}{27} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$

d) $\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{2}{6} + \left(-\frac{4}{7}\right)$

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{7}{60} = \frac{40}{60} + \frac{12}{60} + \frac{7}{60} = \frac{59}{60}$

b) $\frac{3}{20} + \frac{7}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3}{20} + \frac{28}{20} + \frac{5}{20} = \frac{36}{20} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

c) $\frac{1}{3} + \frac{2}{27} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{90}{270} + \frac{20}{270} + \frac{54}{270} - \frac{45}{270} = \frac{119}{270}$

d) $\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{2}{6} + \left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{3}{5} + \frac{2}{6} - \frac{4}{7} = -\frac{126}{210} + \frac{70}{210} - \frac{120}{210} = -\frac{176}{210} = -\frac{88}{105}$

10  Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a) $3 - \frac{1}{4} - \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right)$

b) $-\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left[\frac{2}{6} - \frac{1}{4} - \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{4}\right)\right]$

c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \left(6 - \frac{2}{5}\right) - \left(4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)$

d) $2 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - 3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{6}\right)$

a) $3 - \frac{1}{4} - \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right) = 3 - \frac{1}{4} - \left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\right) = 3 - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{120}{40} - \frac{10}{40} - \frac{4}{40} = \frac{106}{40} = \frac{53}{20}$

b) $-\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left[\frac{2}{6} - \frac{1}{4} - \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{4}\right)\right] = -\left(\frac{15}{20} - \frac{4}{20}\right) - \left[\frac{2}{6} - \frac{1}{4} - \left(\frac{24}{12} - \frac{4}{12} - \frac{6}{12}\right)\right] = -\frac{11}{20} - \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{4} - \frac{14}{12}\right) = -\frac{11}{20} - \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12} - \frac{14}{12}\right) = -\frac{11}{20} + \frac{13}{12} = -\frac{33}{60} + \frac{65}{60} = \frac{32}{60} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \left(6 - \frac{2}{5}\right) - \left(4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \left(\frac{30}{5} - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{60}{15} + \frac{3}{15} + \frac{5}{15}\right) = \frac{1}{3} - \frac{28}{5} - \frac{68}{15} = \frac{5}{15} - \frac{84}{15} - \frac{68}{15} = -\frac{147}{15} = -\frac{49}{5}$

d) $2 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - 3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{6}\right) = \frac{30}{15} - \frac{5}{15} + \frac{6}{15} - \frac{45}{15} - \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12}\right) = -\frac{14}{15} + \frac{3}{12} = -\frac{56}{60} + \frac{15}{60} = -\frac{41}{60}$

11  Calcula las siguientes multiplicaciones y simplifica el resultado:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$

b) $\left(-\frac{2}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{6}\right)$

c) $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

d) $\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

e) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3}{7}$

f) $\left(-\frac{1}{7}\right) \cdot 3$

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

b) $\left(-\frac{2}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{6}\right) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$

d) $\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{12}{12} = 1$

e) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3}{7} = -\frac{6}{35}$

f) $\left(-\frac{1}{7}\right) \cdot 3 = -\frac{3}{7}$

12  Resuelve las siguientes divisiones y simplifica el resultado:

a) $\left(-\frac{3}{7}\right) : 2$

b) $\frac{2}{20} : \frac{1}{7}$

c) $\frac{2}{5} : \frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{6} : \frac{3}{12}$

e) $\frac{1}{5} : \frac{2}{5}$

f) $\frac{7}{8} : \frac{1}{2}$

a) $\left(-\frac{3}{7}\right) : 2 = -\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{14}$

b) $\frac{2}{20} : \frac{1}{7} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

c) $\frac{2}{5} : \frac{1}{4} = \frac{8}{5}$

d) $\frac{3}{6} : \frac{3}{12} = \frac{36}{18} = 2$

e) $\frac{1}{5} : \frac{2}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

f) $\frac{7}{8} : \frac{1}{2} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$

13  **Calcula el resultado de estas operaciones:**

a) $\frac{2}{5} : \left(\frac{1}{4} + 3\right)$

b) $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) : \frac{2}{7}$

c) $\left(\frac{3}{6} - \frac{2}{5}\right) : \frac{3}{11}$

d) $\left(\frac{2}{4} + \frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right)$

a) $\frac{2}{5} : \left(\frac{1}{4} + 3\right) = \frac{2}{5} : \left(\frac{1}{4} + \frac{12}{4}\right) = \frac{2}{5} : \frac{13}{4} = \frac{8}{65}$

b) $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) : \frac{2}{7} = \left(\frac{5}{15} + \frac{6}{15}\right) : \frac{2}{7} = \frac{11}{15} : \frac{2}{7} = \frac{77}{30}$

c) $\left(\frac{3}{6} - \frac{2}{5}\right) : \frac{3}{11} = \left(\frac{15}{30} - \frac{12}{30}\right) : \frac{3}{11} = \frac{3}{30} : \frac{3}{11} = \frac{33}{90} = \frac{11}{30}$

d) $\left(\frac{2}{4} + \frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{14}{28} + \frac{12}{28}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) =$
 $= \frac{26}{28} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{13}{14} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{13}{70}$

14  **Realiza las siguientes operaciones. Recuerda operar conforme a la jerarquía de operaciones y simplifica el resultado.**

a) $\frac{2}{25} + \frac{3}{100} - 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{6}{25} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right)$

b) $\frac{4}{5} - \frac{6}{15} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)$

c) $\frac{7}{20} : \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5}$

d) $2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right] + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$

e) $\frac{5}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{6}\right)$

a) $\frac{2}{25} + \frac{3}{100} - 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{6}{25} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right) =$
 $= \frac{8}{100} + \frac{3}{100} - 2 \cdot \left(\frac{5}{25} - \frac{6}{25} + \frac{5}{25} - \frac{10}{25}\right) =$
 $= \frac{11}{100} - 2 \cdot \left(-\frac{6}{25}\right) = \frac{11}{100} + 2 \cdot \frac{6}{25} = \frac{11}{100} + \frac{12}{25} =$
 $= \frac{11}{100} + \frac{48}{100} = \frac{59}{100}$

b) $\frac{4}{5} - \frac{6}{15} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{12}{15} - \frac{6}{15} + 3 \cdot \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\right) =$
 $= \frac{6}{15} + 3 \cdot \frac{9}{6} = \frac{6}{15} + \frac{9}{2} = \frac{12}{30} + \frac{135}{30} = \frac{147}{30} = \frac{49}{10}$

c) $\frac{7}{20} : \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} = \frac{21}{20} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{3}{6}\right) + \frac{1}{5} =$
 $= \frac{21}{20} - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{6} + \frac{1}{5} = \frac{21}{20} - \frac{8}{12} + \frac{1}{5} = \frac{63}{60} - \frac{40}{60} + \frac{12}{60} =$
 $= \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$

d) $2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right] + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} =$
 $= 2 \cdot \left[\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right] + \frac{6}{10} + \frac{5}{10} =$
 $= 2 \cdot \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \frac{11}{10} = 2 \cdot \left(\frac{6}{4} - \frac{1}{6}\right) + \frac{11}{10} =$
 $= 2 \cdot \left(\frac{18}{12} - \frac{2}{12}\right) + \frac{11}{10} = 2 \cdot \frac{16}{12} + \frac{11}{10} = \frac{32}{12} + \frac{11}{10} = \frac{113}{30}$

e) $\frac{5}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{18} = \frac{45}{18} + \frac{1}{18} =$
 $= \frac{46}{18} = \frac{23}{9}$

15  **Calcula:**

a) $2 : \frac{2}{5}$

b) $1 : \frac{3}{4}$

c) $\frac{-2}{5} : 3$

d) $\frac{1}{6} : \frac{-3}{4}$

a) $2 : \frac{2}{5} = \frac{10}{2} = 5$

b) $1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$

c) $\frac{-2}{5} : 3 = -\frac{2}{15}$

d) $\frac{1}{6} : \frac{-3}{4} = -\frac{4}{18} = -\frac{2}{9}$

16  **En un semáforo sólo el $\frac{3}{9}$ de los peatones que cruzan la calle respetan la luz verde para pasar. Si en una hora han cruzado la calle 405 peatones, ¿cuántos han pasado cuando no debían?**

$\frac{2}{3} \cdot 405 = 270$

17  **Si de un pastel que pesa 1 500 gramos repartimos las $\frac{2}{3}$ partes, ¿cuántos gramos de pastel nos quedan?**

$\frac{2}{3} \cdot 1500 = \frac{2 \cdot 1500}{3} = \frac{3000}{3} = 1000$ hemos repartido, nos quedan 500 gr.

18 ■■ En mi cuaderno de Ciencias tengo $\frac{3}{4}$ partes con conceptos de la asignatura y $\frac{4}{20}$ lo tengo ocupado con esquemas. ¿Qué fracción del cuaderno me queda libre?

$$1 - \frac{3}{4} - \frac{4}{20} = \frac{20}{20} - \frac{15}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20} \text{ de cuaderno queda libre.}$$

19 ■■ En un campo de patatas se recogen $\frac{5}{15}$ del total de la producción en un día, y al día siguiente hay más trabajadores y recogen $\frac{12}{32}$ del total. ¿Qué fracción del total falta por recoger el tercer día?

$$1 - \left(\frac{5}{15} + \frac{12}{32} \right) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{8} \right) = 1 - \left(\frac{8}{24} + \frac{9}{24} \right) = 1 - \frac{17}{24} = \frac{24}{24} - \frac{17}{24} = \frac{7}{24}$$

20 ■■ Dos fuentes de agua llenan un depósito de la siguiente forma: una de ella descarga $\frac{4}{16}$ del total y la otra $\frac{8}{15}$. ¿Qué fracción del depósito falta por llenar?

$$1 - \left(\frac{4}{16} + \frac{8}{15} \right) = 1 - \left(\frac{60}{240} + \frac{128}{240} \right) = 1 - \frac{188}{240} = \frac{240}{240} - \frac{188}{240} = \frac{52}{240} = \frac{26}{120} = \frac{13}{60}$$

21 ■■ Si entre dos amigos juntan $\frac{2}{5}$ de los CD de un cantante y otros tres amigos consiguen otros $\frac{2}{8}$ de toda su producción artística, ¿cuál es la fracción de CD que faltarían por recopilar?

$$1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{8} \right) = 1 - \left(\frac{16}{40} + \frac{10}{40} \right) = 1 - \frac{26}{40} = \frac{40}{40} - \frac{26}{40} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$$

22 ■■ Si tengo las $\frac{2}{5}$ partes de la colección de «Estrellas del cine de aventuras» y mi hermana me pide $\frac{1}{6}$ de lo que tengo, ¿qué fracción de la colección me queda?

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} - \frac{2}{30} = \frac{12}{30} - \frac{2}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

23 ■■ Cuando voy al monte a pasar el día llevo $\frac{1}{4}$ de mi mochila ocupada con la comida. Si llevo la mochila con $\frac{6}{8}$ de comida, ¿cuántos días voy a pasar?

$$\frac{6}{8} : \frac{1}{4} = \frac{24}{8} = 3 \text{ días.}$$

24 ■■ Cuando trabajo las $\frac{3}{5}$ partes de mi jornada recibo 45 euros. ¿Cuántos euros recibiré si trabajo sólo $\frac{7}{24}$ de la misma?

$$45 : \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{24} = \frac{175}{8} \text{ euros.}$$

25 ■■ Una baldosa tiene como superficie el cuadrado de otra baldosa que mide $\frac{6}{8} \text{ m}^2$. ¿Cuánto mide la primera baldosa?

$$\left(\frac{6}{8} \right)^2 = \frac{36}{64} = \frac{9}{16} \text{ m}^2$$

26 ■■ Calcula las siguientes potencias y exprésalas en forma de fracción:

a) $\left(\frac{1}{2} \right)^4$

b) $\left(\frac{2}{5} \right)^2$

c) $\left(-\frac{3}{5} \right)^3$

d) $\left(-\frac{2}{4} \right)^2$

e) $\left(\frac{1}{3} \right)^3$

f) $\left(\frac{1}{2} \right)^5$

g) $\left(-\frac{3}{7} \right)^3$

h) $\left(\frac{3}{4} \right)^4$

a) $\left(\frac{1}{2} \right)^4 = \frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{2}{5} \right)^2 = \frac{4}{25}$

c) $\left(-\frac{3}{5} \right)^3 = -\frac{27}{125}$

d) $\left(-\frac{2}{4} \right)^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

e) $\left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$

f) $\left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{32}$

g) $\left(-\frac{3}{7} \right)^3 = -\frac{27}{343}$

h) $\left(\frac{3}{4} \right)^4 = \frac{81}{256}$

27 ■ ■ ■ Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

a) $\frac{2}{8} + \left(\frac{1}{5}\right)^3$

b) $\frac{3}{9} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4$

c) $\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$

d) $6 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{2}{7}\right)^2$

a) $\frac{2}{8} + \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{125} = \frac{125}{500} + \frac{4}{500} = \frac{129}{500}$

b) $\frac{3}{9} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{3} + \frac{2}{81} = \frac{27}{81} + \frac{2}{81} = \frac{29}{81}$

c) $\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{36}{25} - \frac{1}{8} = \frac{288}{200} - \frac{25}{200} = \frac{263}{200}$

d) $6 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{2}{7}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{8}{20} + \frac{5}{20}\right) - \frac{4}{49} =$
 $= 6 \cdot \frac{13}{20} - \frac{4}{49} = \frac{78}{20} - \frac{4}{49} = \frac{39}{10} - \frac{4}{49} = \frac{1911}{490} - \frac{40}{490} = \frac{1871}{490}$

28 ■ ■ ■ Copia en tu cuaderno y completa las siguientes frases:

a) Si tengo que elevar una fracción a un exponente, elevo el _____ y el _____ a dicho _____.

b) Una potencia con _____ negativo, sea cual sea el signo de la base, es igual a _____ partido por la misma potencia pero con exponente positivo.

a) Numerador, denominador, exponente.

b) Exponente, uno.

29 ■ ■ ■ Transforma las siguientes potencias en fracciones:

a) 2^{-4}

b) 3^{-2}

c) 5^{-2}

d) 7^{-3}

e) 4^{-5}

f) 8^{-3}

g) 9^{-2}

h) 18^{-2}

a) $2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

b) $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

c) $5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

d) $7^{-3} = \left(\frac{1}{7}\right)^3$

e) $4^{-5} = \left(\frac{1}{4}\right)^5$

f) $8^{-3} = \left(\frac{1}{8}\right)^3$

g) $9^{-2} = \left(\frac{1}{9}\right)^2$

h) $18^{-2} = \left(\frac{1}{18}\right)^2$

30 ■ ■ ■ Calcula las siguientes potencias y exprésalas en forma de fracción:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}$

c) $\left(\frac{1}{2^4}\right)^{-3}$

d) $\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-2}$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

f) $\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-1} \cdot 5^3$

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{1}\right)^3 = 7^3 = 343$

c) $\left(\frac{1}{2^4}\right)^{-3} = (2^4)^3 = 2^{12}$

d) $\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-2} = \left(\frac{3^2}{2}\right)^2 = \frac{3^4}{2^2} = \frac{81}{4}$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = 3^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 9 \cdot \frac{27}{8} = \frac{243}{8}$

f) $\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-1} \cdot 5^3 = 5^2 \cdot 5^3 = 5^5$

31 ■ ■ ■ Realiza las siguientes operaciones. Simplifica el resultado:

a) $5 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{12}\right) - \left(\frac{1}{12}\right)^{-1}$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 : \left[\frac{2}{5} - \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\right] + \left(\frac{3}{9}\right)^{-2}$

c) $\frac{3}{27} - \frac{1}{2} : \left[\left(\frac{2}{15} - \frac{3}{15}\right) \cdot \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{30}\right)\right]$

d) $\frac{9}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{18}{3} - 9\right) - \frac{1}{15}$

a) $5 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{12}\right) - \left(\frac{1}{12}\right)^{-1} =$
 $= 5 \cdot \left(\frac{9}{6} + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{10}{12} - \frac{1}{12}\right) - \left(\frac{1}{12}\right)^{-1} =$
 $= 5 \cdot \left(\frac{10}{6}\right)^2 - \frac{9}{12} - 12 = 5 \cdot \frac{100}{36} - \frac{9}{12} - 12 =$
 $= \frac{500}{36} - \frac{9}{12} - 12 = \frac{500}{36} - \frac{27}{36} - \frac{432}{36} = \frac{41}{36}$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \left(\frac{3}{2}\right)^2 : \left[\frac{2}{5} - \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\right] + \left(\frac{3}{9}\right)^{-2} = \\
 & = \frac{9}{4} : \left[\frac{4}{10} - \frac{1}{10} - \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right)\right] + \left(\frac{9}{3}\right)^2 = \\
 & = \frac{9}{4} : \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{4}\right) + 3^2 = \frac{9}{4} : \left(\frac{12}{40} - \frac{30}{40}\right) + 9 = \\
 & = \frac{9}{4} : \left(-\frac{18}{40}\right) + 9 = \frac{9}{4} : \left(-\frac{9}{20}\right) + 9 = -\frac{180}{36} + 9 = \\
 & = -\frac{180}{36} + \frac{324}{36} = \frac{144}{36} = \frac{72}{18} = \frac{36}{9} = \frac{12}{3} = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & \frac{3}{27} - \frac{1}{2} : \left[\left(\frac{2}{15} - \frac{3}{15}\right) \cdot \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{30}\right)\right] = \\
 & = \frac{3}{27} - \frac{1}{2} : \left[-\frac{1}{15} \cdot \left(\frac{42}{30} + \frac{2}{30}\right)\right] = \\
 & = \frac{3}{27} - \frac{1}{2} : \left(-\frac{1}{15} \cdot \frac{44}{30}\right) = \frac{3}{27} - \frac{1}{2} : \left(-\frac{44}{450}\right) = \\
 & = \frac{3}{27} + \frac{450}{88} = \frac{1}{9} + \frac{225}{44} = \frac{44}{396} + \frac{2025}{396} = \frac{2069}{396}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & \frac{9}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{18}{3} - 9\right) - \frac{1}{15} = \frac{9}{2} + \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{18}{3} - \frac{27}{3}\right) - \frac{1}{15} = \\
 & = \frac{9}{2} + \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{9}{3}\right) - \frac{1}{15} = \frac{9}{2} + \frac{1}{9} \cdot (-3) - \frac{1}{15} = \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \\
 & = \frac{135}{30} - \frac{10}{30} - \frac{2}{30} = \frac{123}{30} = \frac{41}{10}
 \end{aligned}$$

32  **Copia en tu cuaderno y completa la frase. Pon un ejemplo:**

«La raíz cuadrada de un número racional expresado en forma de fracción será igual a la _____

_____ del numerador partido por la _____ del denominador».

Raíz cuadrada, raíz cuadrada.

33  **Calcula la raíz cuadrada de los siguientes números racionales y explica cómo lo has hecho.**

$$\text{a)} \quad \sqrt{\frac{4}{16}} \qquad \text{b)} \quad \sqrt{\frac{25}{121}} \qquad \text{c)} \quad \sqrt{\frac{49}{81}}$$

$$\text{a)} \quad \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b)} \quad \sqrt{\frac{25}{121}} = \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{11^2}} = \frac{5}{11}$$

$$\text{c)} \quad \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{7^2}}{\sqrt{9^2}} = \frac{7}{9}$$

34  **Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado obtenido:**

$$\text{a)} \quad \sqrt{\frac{16}{25}} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\text{b)} \quad \sqrt{\frac{9}{81}} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right)$$

$$\text{c)} \quad \left(\frac{3}{6} + \frac{1}{2}\right)^2 : \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$\text{d)} \quad \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{5}\right) : 3 + \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \sqrt{\frac{16}{25}} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{5^2}} - \left(\frac{10}{15} + \frac{3}{15}\right) + \frac{4}{9} = \\
 & = \frac{4}{5} - \frac{13}{15} + \frac{4}{9} = \frac{36}{45} - \frac{39}{45} + \frac{20}{45} = \frac{17}{45}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \sqrt{\frac{9}{81}} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{9^2}} : \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{5} = \\
 & = \frac{3}{9} : \frac{4}{9} + \frac{2}{5} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & \left(\frac{3}{6} + \frac{1}{2}\right)^2 : \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9}} = \left(\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\right)^2 : \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{3^2}} = 1 : \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \\
 & = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9}{6} + \frac{4}{6} = \frac{13}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{5}\right) : 3 + \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{9}{5} : 3 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2^2}} = \\
 & = \frac{9}{15} + \frac{25}{16} + \frac{1}{2} = \frac{144}{240} + \frac{375}{240} + \frac{120}{240} = \frac{639}{240} = \frac{213}{80}
 \end{aligned}$$

35  **Realiza las siguientes operaciones. Simplifica el resultado.**

$$\text{a)} \quad \sqrt{\frac{25}{81}} + \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$$

$$\text{b)} \quad 2 : \left[\left(\frac{1}{7} + \frac{2}{14}\right) - \frac{1}{6}\right] + \sqrt{\frac{1}{16}}$$

$$\text{c)} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{8}\right)^2 - \sqrt{\frac{3}{8} - \frac{1}{8}}$$

$$\text{d)} \quad \sqrt{\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}} + 5 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt{\frac{25}{81}} + \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \\ & = \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{9^2}} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} - \frac{2}{6} + \frac{25}{9} = \\ & = \frac{30}{54} - \frac{18}{54} + \frac{150}{54} = \frac{162}{54} = \frac{81}{27} = \frac{27}{9} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & 2 : \left[\left(\frac{1}{7} + \frac{2}{14} \right)^2 - \frac{1}{6} \right] + \sqrt{\frac{1}{16}} = \\ & = 2 : \left[\left(\frac{2}{14} + \frac{2}{14} \right)^2 - \frac{1}{6} \right] + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4^2}} = \\ & = 2 : \left[\left(\frac{4}{14} \right)^2 - \frac{1}{6} \right] + \frac{1}{4} = 2 : \left(\frac{16}{196} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{4} = \\ & = 2 : \left(\frac{96}{1176} - \frac{196}{1176} \right) + \frac{1}{4} = 2 : \left(-\frac{100}{1176} \right) + \frac{1}{4} = \\ & = -\frac{2352}{100} + \frac{1}{4} = -\frac{2352}{100} + \frac{25}{100} = -\frac{2327}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{8}\right)^2 - \sqrt{\frac{3}{8} - \frac{1}{8}} = \\ & = \frac{125}{8} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{16}{56} - \frac{7}{56}\right)^2 - \sqrt{\frac{2}{8}} = \\ & = \frac{125}{8} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{9}{56}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{125}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{81}{3136} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2^2}} = \\ & = \frac{125}{8} + \frac{81}{9408} - \frac{1}{2} = \frac{147000}{9408} + \frac{81}{9408} - \frac{4704}{9408} = \\ & = \frac{142377}{9408} = \frac{47459}{3136} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \sqrt{\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}} + 5 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)^2 = \\ & = \sqrt{\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)} + 5 \cdot \left(\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\right)^2 = 1 + 5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \\ & = 1 + 5 \cdot \frac{25}{36} = 1 + \frac{125}{36} = \frac{36}{36} + \frac{125}{36} = \frac{161}{36} \end{aligned}$$

36  Por cada 10 sobres de propaganda repartidos en los buzones nos dan $\frac{6}{8}$ de euro. ¿Cuántos euros me darán por repartir 1 500 sobres?

$$\frac{1500}{10} \cdot \frac{6}{8} = \frac{225}{2} = 112,5 \text{ euros.}$$

4 NÚMEROS DECIMALES

<http://www.McGraw-Hill.es>

EJERCICIOS

1 Obtén la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

a) 4,37

b) 0,025

c) 905,158

d) 9,05158

$$a) \frac{437}{100}$$

$$b) \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}$$

$$c) \frac{905158}{1000}$$

$$d) \frac{905158}{100000}$$

2 Copia en tu cuaderno y completa las siguientes igualdades:

$$a) \frac{2}{5} = \frac{\quad}{100} =$$

$$b) \frac{\quad}{8} = \frac{125}{1000} =$$

a) 40

b) 1

3 Indica cuál es la fracción generatriz de los números decimales:

a) 3,3232...

b) 0,555...

c) 5,158158...

d) 25,111...

e) 0,2121...

f) 125,99...

g) 0,333...

$$a) 100x = 332,3232...$$

$$x = 3,3232...$$

$$99x = 332 - 3$$

$$x = \frac{332 - 3}{99} = \frac{329}{99}$$

$$b) 10x = 5,555...$$

$$x = 0,555...$$

$$9x = 5 - 0$$

$$x = \frac{5}{9}$$

$$c) 1000x = 5158,158158...$$

$$x = 5,158158...$$

$$999x = 5158 - 5$$

$$x = \frac{5158 - 5}{999} = \frac{5153}{999}$$

$$d) 10x = 251,111...$$

$$x = 25,111...$$

$$9x = 251 - 25$$

$$x = \frac{251 - 25}{9} = \frac{226}{9}$$

$$e) 100x = 21,2121...$$

$$x = 0,2121...$$

$$99x = 21 - 0$$

$$x = \frac{21}{99}$$

$$f) 10x = 1259,99...$$

$$x = 125,99...$$

$$9x = 1259 - 125$$

$$x = \frac{1259 - 125}{9} = \frac{1134}{9}$$

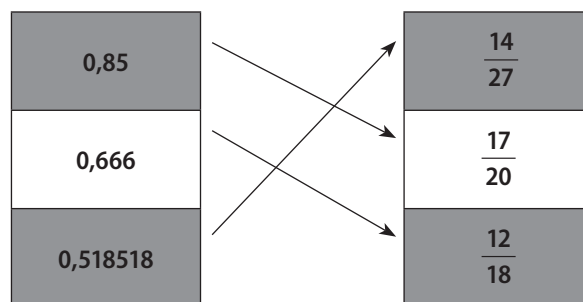
$$g) 10x = 3,33...$$

$$x = 0,33...$$

$$9x = 3 - 0$$

$$x = \frac{3}{9}$$

4 Copia en tu cuaderno y asocia cada expresión decimal con su fracción generatriz.



5 Obtén la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

a) 5,12333...

b) 0,07575...

c) 25,01212...

d) 123,5444...

e) 8,152323...

$$a) 1000x = 5123,333...$$

$$100x = 512,333...$$

$$900x = 5123 - 512$$

$$x = \frac{5123 - 512}{900} \Leftrightarrow x = \frac{1537}{300}$$

$$b) 1000x = 75,7575...$$

$$10x = 0,7575...$$

$$90x = 75 - 0$$

$$x = \frac{75 - 0}{990} \Leftrightarrow x = \frac{5}{66}$$

c) $1000x = 25\,012,1212\dots$

$$\begin{array}{r} 10x = 250,1212\dots \\ \hline 990x = 25\,012 - 250 \end{array}$$

$$x = \frac{25\,012 - 250}{990} \Leftrightarrow x = \frac{4\,127}{165}$$

d) $100x = 12\,354,444\dots$

$$\begin{array}{r} 10x = 1\,235,444\dots \\ \hline 90x = 12\,354 - 1\,235 \end{array}$$

$$x = \frac{12\,354 - 1\,235}{90} \Leftrightarrow x = \frac{11\,119}{90}$$

e) $10\,000x = 81\,523,2323\dots$

$$\begin{array}{r} 100x = 815,2323\dots \\ \hline 9\,900x = 81\,523 - 815 \end{array}$$

$$x = \frac{81\,523 - 815}{9\,900} \Leftrightarrow x = \frac{20\,177}{2\,475}$$

6 Realiza estas operaciones con números decimales:

a) $81,23 + 34,56 + 123,45$

b) $0,0555\dots + 1,4242\dots$

c) $2,53 - 1,58 + 14,5$

d) $10,5 + 21,15 - 8,45$

e) $25,45 - 3 + 11,32$

f) $2,133\dots - 0,333\dots + 12,25$

a) 239,24

b) $\frac{1}{18} + \frac{47}{33} = \frac{293}{198}$

c) 15,45

d) 23,2

e) 33,77

f) $\frac{32}{15} - \frac{1}{3} + \frac{1\,225}{100} = \frac{281}{20} = 14,05$

7 ¿Cuál es el perímetro de una mesa rectangular que mide 1,50 m de largo y 0,98 m de ancho?

El perímetro es la suma de todos los lados.

$$1,50 + 1,50 + 0,98 + 0,98 = 4,96 \text{ m}^2$$

8 El precio de un CD es 22,50 €, pero se ha pagado por él 15,85 €.

a) ¿Qué cantidad de dinero se ha rebajado?

b) Si para pagar se entrega un billete de 50 €, ¿cuánto dinero se le devuelve al comprador?

a) $22,5 - 15,85 = 6,65$ euros.

b) $50 - 15,85 = 34,15$ euros.

9 Realiza las operaciones con números decimales:

a) $1,2 \cdot 34,56$

b) $0,015 \cdot 1,2$

c) $12,53 \cdot 4,5$

d) $0,003 \cdot 2,5$

e) $21,5 \cdot 0,25$

a) 41,472

b) 0,018

c) 56,385

d) 0,0075

e) 5,375

10 ¿Cuál es la superficie de una mesa rectangular que mide 1,35 metros de largo y 0,75 metros de ancho?

La superficie de la mesa es largo por ancho.

$$1,35 \cdot 0,75 = 1,0125 \text{ m}^2$$

11 Si los pasos de Juan miden 0,65 metros, ¿qué distancia recorre si da 23 pasos?

$$0,65 \cdot 23 = 14,95 \text{ metros.}$$

12 Si $2,54 \cdot 3,6 = 9,144$, indica el resultado de las siguientes operaciones sin realizarlas:

a) $25,4 \cdot 3,6$

b) $2,54 \cdot 3,6 \cdot 10$

c) $2,54 \cdot 3,6 \cdot 0,1$

d) $254 \cdot 0,36$

e) $0,254 \cdot 36$

a) 91,44

b) 91,44

c) 0,9144

d) 91,44

e) 9,144

13 Efectúa las siguientes divisiones:

a) $53,25 : 0,3$

b) $0,025 : 2,5$

c) $125,5 : 0,02$

a) 177,5

b) 0,01

c) 6275

14 Si la longitud de una circunferencia es 18,84 centímetros, ¿cuánto mide el radio?

Tomando como $\pi = 3,14$, el radio mide:

$$18,84 : (3,14 \cdot 2) = 3 \text{ cm.}$$

15 Calcula las potencias:

a) $(0,333\dots)^2$

b) $1,5^3$

c) $(1,2666\dots)^2$

a) $(0,333\dots)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

b) 3,375

c) $(1,2666\dots)^2 = \left(\frac{19}{15}\right)^2 = \frac{361}{225}$

16 Calcula las potencias:

a) $1,75^{-2}$

b) $0,02^{-3}$

c) $(1,666\dots)^{-2}$

a) $\left(\frac{175}{100}\right)^{-2} = \left(\frac{100}{175}\right)^2 = \frac{10\,000}{30\,625} = \frac{16}{49}$

b) $\left(\frac{2}{100}\right)^{-3} = \left(\frac{100}{2}\right)^3 = \frac{1\,000\,000}{8} = 125\,000$

c) $\left(\frac{15}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{15}\right)^2 = \frac{81}{225} = \frac{9}{25}$

17 Calcula:

a) $[(23,5 + 36,5) \cdot 12,5] : 2$

b) $3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 2,1 + 3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 0,6 : 3$

c) $3 \cdot 6,2 : 2 + 2,8 \cdot 0,02 - (3,5 + 0,8) \cdot 0,95$

a) 375

b) 3,0615

c) 5,271

18 Calcula:

a) $(-2,5 \cdot 0,6)^2 + (-3)^3 : 3^2 - 0,4 \cdot 0,2^{-2}$

b) $(0,333\ldots)^3 + 0,33$

c) $(1,1666\ldots + 0,333\ldots)^2$

a) -10,75

b) $\frac{991}{2700} = 0,36703703\ldots$

c) $\frac{9}{4} = 2,25$

19 Aproxima hasta las milésimas los siguientes números decimales:

a) 5,2741

b) 0,1666...

c) 0,004581

a) 5,274

b) 0,167

c) 0,005

20 Expresa en forma decimal el número fraccionario $\frac{5}{6}$ y aproxima la expresión decimal hasta:

a) Las décimas.

b) Las centésimas.

$\frac{5}{6} = 0,8333\ldots$

a) 0,8

b) 0,83

2 Obtén la fracción generatriz de:

a) 0,25

b) 10,482

c) 0,0042

d) 42,08

e) 55,55

a) $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

b) $10,482 = \frac{10482}{1000} = \frac{5241}{500}$

c) $0,0042 = \frac{42}{10000} = \frac{21}{5000}$

d) $42,08 = \frac{4208}{100} = \frac{1052}{25}$

e) $55,55 = \frac{5555}{100} = \frac{1111}{20}$

3 Calcula la fracción generatriz de los números decimales periódicos puros:

a) $12,\overline{3}$

b) $12,\overline{35}$

c) $12,\overline{05}$

d) $0,\overline{3}$

e) $1,\overline{6}$

a) $10x = 123,3\ldots$

$x = 12,3\ldots$

$99x = 123 - 12$

$x = \frac{123 - 12}{9} \Leftrightarrow x = \frac{111}{9} = \frac{37}{3}$

b) $100x = 1235,35\ldots$

$x = 12,35\ldots$

$99x = 1235 - 12$

$x = \frac{1235 - 12}{99} \Leftrightarrow x = \frac{1223}{99}$

c) $100x = 1205,05\ldots$

$x = 12,05\ldots$

$99x = 1205 - 12$

$x = \frac{1205 - 12}{99} \Leftrightarrow x = \frac{1193}{99}$

d) $10x = 3,3\ldots$

$x = 0,3\ldots$

$9x = 3 - 0$

$x = \frac{3 - 0}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

e) $10x = 16,6\ldots$

$x = 1,6\ldots$

$9x = 16 - 1$

$x = \frac{16 - 1}{9} \Leftrightarrow x = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN NÚMERO DECIMAL

1 Clasifica las expresiones decimales:

a) 0,5

b) 0,25

c) 0,464646...

d) 0,54646...

e) 1,5757...

f) 2,74848

a) Decimal exacto.

b) Decimal exacto.

c) Periódico puro.

d) Periódico mixto.

e) Periódico puro.

f) Decimal exacto.

4 ☐ **Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos:**

a) $12,3\overline{5}$

b) $7,4\overline{25}$

c) $14,0\overline{4}$

d) $0,1\overline{6}$

e) $2,01\overline{6}$

a) $100x = 1\,235,55\dots$

$10x = 123,55\dots$

$90x = 1\,235 - 123$

$x = \frac{1\,235 - 123}{90} \Leftrightarrow x = \frac{1\,112}{90}$

b) $1\,000x = 7\,425,2525\dots$

$10x = 74,2525\dots$

$990x = 7\,425 - 74$

$x = \frac{7\,425 - 74}{990} \Leftrightarrow x = \frac{7\,351}{990}$

c) $100x = 1\,404,44\dots$

$10x = 140,44\dots$

$90x = 1\,404 - 140$

$x = \frac{1\,404 - 140}{90} \Leftrightarrow x = \frac{1\,264}{90} = \frac{632}{45}$

d) $100x = 16,666\dots$

$10x = 1,666\dots$

$90x = 16 - 1$

$x = \frac{16 - 1}{90} \Leftrightarrow x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

e) $1\,000x = 2\,016,666\dots$

$100x = 201,666\dots$

$900x = 2\,016 - 201$

$x = \frac{2\,016 - 201}{900} \Leftrightarrow x = \frac{1\,815}{900} = \frac{605}{300}$

5 ☐ **Copia en tu cuaderno y asocia cada número decimal con su fracción generatriz:**

0,42	→	$\frac{21}{50}$
103,8	↗	$\frac{12}{5}$
1,03	→	$\frac{103}{100}$
2,4	↘	$\frac{519}{5}$

6 ☐ **Copia en tu cuaderno y relaciona cada número decimal con su fracción generatriz:**

0,5	↗	$\frac{5}{2}$
2,5	→	$\frac{1}{2}$
3,75	↘	$\frac{51}{40}$
1,275	→	$\frac{15}{4}$

7 ☐ **Escribe dos fracciones que representen a los siguientes números decimales:**

a) 0,42

b) 0,83

c) $1,2\overline{4}$

d) $1,2\overline{4}$

e) $0,0\overline{9}$

f) $2,0\overline{5}$

a) $0,42 = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}$

b) $0,83 = \frac{83}{100}$

c) $100x = 124,2424\dots$

$x = 1,2424\dots$

$99x = 124 - 1$

$x = \frac{124 - 1}{99} \Leftrightarrow x = \frac{123}{99} = \frac{41}{33}$

d) $100x = 124,444\dots$

$10x = 12,444\dots$

$90x = 124 - 12$

$x = \frac{124 - 12}{90} \Leftrightarrow x = \frac{112}{90} = \frac{56}{45}$

e) $100x = 9,999\dots$

$10x = 0,999\dots$

$90x = 9 - 0$

$x = \frac{9}{90} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}$

f) $100x = 205,555\dots$

$10x = 20,555\dots$

$90x = 185$

$x = \frac{185}{90} \Leftrightarrow x = \frac{37}{18}$

8  **Copia en tu cuaderno y completa:**

a) $10,7 = \frac{\quad}{10}$ b) $25,4 = \frac{254 - \quad}{9}$

c) $5,456 = \frac{5456 - \quad}{990}$ d) $5,47 = \frac{\quad - 54}{990}$

a) $10,7 = \frac{107}{10}$

b) $25,4 = \frac{254 - 25}{9} = \frac{229}{9}$

c) $5,456 = \frac{5456 - 54}{990} = \frac{5402}{990}$

d) $5,47 = \frac{547 - 54}{90} = \frac{493}{90}$

9  **Encuentra un número decimal exacto comprendido entre:**

a) $3,45$ y $3,46$

b) $3,456$ y $3,457$

c) $2,4$ y $2,41$

d) $2,4$ y $2,42$

e) $14,8$ y $14,89$

a) 3,455 b) 3,4566 c) 2,401

d) 2,41 e) 14,889

10  **Encuentra un número decimal periódico comprendido entre:**

a) $2,3$ y $2,4$

b) $2,31$ y $2,32$

c) $2,31$ y $2,3$

d) $2,35$ y $2,356$

e) $2,45$ y $2,46$

a) 2,333... b) 2,3111... c) 2,3222...

d) 2,356111... e) 2,4555...

OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES**11**  **Calcula mentalmente:**

a) $0,48 + 1,43$

b) $10,45 + 10,4$

c) $20,45 + 42,30$

d) $100,01 + 90,02$

e) $99,02 + 101,08$

a) $0,48 + 1,43 = \frac{48}{100} + \frac{43}{30} = \frac{144}{300} + \frac{430}{300} = \frac{574}{300} = \frac{287}{150}$

b) $10,45 + 10,4 = \frac{1045}{100} + \frac{94}{9} = \frac{9405}{900} + \frac{9400}{900} = \frac{18805}{900} = \frac{3761}{180}$

c) $20,45 + 42,30 = \frac{2045}{100} + \frac{4230}{100} = \frac{6275}{100} = \frac{1255}{20} = \frac{251}{4}$

d) $100,01 + 90,02 = \frac{10001}{100} + \frac{8102}{90} = \frac{90009}{900} + \frac{81020}{900} = \frac{171029}{900}$

e) $99,02 + 101,08 = \frac{9902}{100} + \frac{10108}{100} = \frac{20010}{100} = \frac{2001}{10}$

12  **Calcula:**

a) $14,48 + 13,5 - 12,3$

b) $24,18 - 2,84 - 4,38$

c) $14,35 + 23,4 - 12,8$

d) $3,55 - 2,48 + 1,3$

e) $0,01 - 2,5 + 0,005$

a) $14,48 + 13,5 - 12,3 = 15,68$

b) $24,18 - 2,84 - 4,38 = 16,96$

c) $14,35 + 23,4 - 12,8 = 24,95$

d) $3,55 - 2,48 + 1,3 = 2,37$

e) $0,01 - 2,5 + 0,005 = -2,485$

13  **Calcula:**

a) $24,18 - 14,04$

b) $24,5 - 4,03$

c) $180,3 - 35,5$

d) $18,35 - 12,42$

e) $5,85 - 5,8$

a) $24,18 - 14,04 = \frac{2177}{90} - \frac{1264}{90} = \frac{913}{90}$

b) $24,5 - 4,03 = \frac{245}{10} - \frac{363}{90} = \frac{2205}{90} - \frac{363}{90} = \frac{1842}{90} = \frac{614}{30}$

c) $180,3 - 35,5 = \frac{1623}{9} - \frac{355}{10} = \frac{16230}{90} - \frac{3195}{90} = \frac{13035}{90} = \frac{4345}{30}$

d) $18,35 - 12,42 = \frac{1835}{100} - \frac{1242}{100} = \frac{593}{100}$

e) $5,85 - 5,8 = \frac{585}{100} - \frac{580}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

14 Razona si es verdadero o falso cada uno de los siguientes enunciados:

- a) La suma de dos números decimales periódicos puros es siempre un número decimal periódico puro.
b) La suma de dos números periódicos mixtos es siempre un número decimal periódico mixto.

a) Falso. Por ejemplo, $\frac{8}{9}$ y $\frac{1}{9}$ son periódicos puros, en concreto son 0,888... y 0,111... respectivamente y, sin embargo, $\frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$ que no es un decimal periódico puro.

b) Falso. Por ejemplo, $\frac{98}{90}$ y $\frac{1}{90}$ son periódicos mixtos, en concreto son 1,0888... y 0,0111... respectivamente y, sin embargo, $\frac{98}{90} + \frac{1}{90} = 1,1$ que no es un decimal periódico puro.

15 Observa estos apuntes de una cuenta:

Saldo inicial	
Hipoteca	-270,48 €
Recibo de la luz	-98,42 €
Ingreso	+200,50 €
Pago con tarjeta	-150,00 €
Saldo final	428,52 €

¿Cuál es el saldo inicial de la cuenta?

$$\text{Saldo inicial} = 428,52 - (-270,48 - 98,42 + 200,5 - 150) = 746,92 \text{ euros.}$$

16 Calcula:

- a) $14,28 \cdot 2,5$ b) $14,4 \cdot 3,02$
c) $3,45 \cdot 2,1$ d) $100,48 \cdot 7,05$
e) $12,40 \cdot 0,22$ f) $2,54 \cdot 3,2$
a) 35,7 b) 43,488
c) 7,245 d) 708,384
e) 2,728 f) 8,13

17 Calcula:

- a) $28,85 : 3,6$ b) $28,8 : 4,2$
c) $124,8 : 3,3$ d) $103,4 : 6,25$
e) $4,53 : 0,3$
a) 8,0138888... b) 6,85714...
c) 37,818181... d) 16,544
e) 15,1

18 Copia en tu cuaderno y escribe en el recuadro el símbolo $>$, $<$ o $=$ según corresponda:

- a) $125 \cdot 1,3$ 126 b) $12,5 + 18,4$ 30
c) $100 : 0,9$ 120 d) $100 : 0,1$ 1 000
e) $13,48 - 2,51$ 11 f) $14,18 + 12,05$ 25
g) $12,5 \cdot 100$ 1 000 h) $100,5 - 88,5$ 15
a) $>$ b) $>$ c) $<$ d) $=$
e) $<$ f) $>$ g) $>$ h) $<$

19 Efectúa mentalmente:

- a) $0,24 : 2$ b) $1,25 \cdot 2$
c) $0,4 \cdot 0,5$ d) $4,2 \cdot 2$
e) $7,64 : 10$ f) $7,64 : 100$
g) $0,24 : 0,12$

- a) 0,12 b) 2,5 c) 0,2 d) $\frac{76}{9}$
e) 0,764 f) 0,0764 g) 2

20 Si $248 \cdot 3\,652 = 905\,696$, calcula:

- a) $2,48 \cdot 36,52$
b) $9\,056,96 : 2,48$
c) $0,248 \cdot 0,3652$
d) $905,696 : 0,3652$
e) $905\,696 : 2\,480$

- a) $2,48 \cdot 36,52 = 90,5696$
b) $9\,056,96 : 2,48 = 3\,652$
c) $0,248 \cdot 0,3652 = 0,0905696$
d) $905,696 : 0,3652 = 2\,480$
e) $905\,696 : 2\,480 = 365,2$

21 Calcula:

- a) $10,3^4$ b) $12,03^{-2}$ c) $2,04^2$
d) $0,3^3$ e) $1,42^{-2}$
a) $10,3^4 = \left(\frac{103}{10}\right)^4 = \frac{11\,255\,0881}{10\,000} = 11\,255,0881$
b) $12,03^{-2} = \left(\frac{361}{30}\right)^{-2} = \left(\frac{30}{361}\right)^2 = \frac{900}{130\,321}$
c) $2,04^2 = \left(\frac{92}{45}\right)^2 = \frac{8\,464}{2\,025}$
d) $0,3^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$
e) $1,42^{-2} = \left(\frac{142}{100}\right)^{-2} = \left(\frac{100}{142}\right)^2 = \frac{10\,000}{20\,164} = \frac{2\,500}{5\,041}$

4 NÚMEROS DECIMALES

<http://www.McGraw-Hill.es>

22 Obtén la fracción generatriz de:

a) $1,2^{-3}$ b) $0,25^2$ c) $0,3^{-2}$

d) $0,16^3$ e) $0,02^{-1}$

a) $1,2^{-3} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{10}{12}\right)^3 = \frac{1000}{1728} = \frac{125}{216}$

b) $0,25^2 = \left(\frac{25}{100}\right)^2 = \frac{625}{10000} = \frac{1}{16}$

c) $0,3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

d) $0,16^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

e) $0,02^{-1} = \left(\frac{1}{45}\right)^{-1} = 45$

23 Sin hacer los cálculos correspondientes, indica si las siguientes desigualdades son ciertas:

a) $0,4^2 < 0,5^2$ b) $0,4^{-1} < 0,5^{-1}$

c) $0,4^{-3} > 0,5^{-3}$ d) $0,4^0 > 0,5^{-3}$

a) Verdadero.

b) Falso.

c) Verdadero.

d) Falso.

24 Copia en tu cuaderno y, sin realizar la potencia, asocia cada cálculo con su resultado:

$2,8^2$		$18,49$
$10,2^2$		$104,04$
$5,6^2$		$31,36$
$4,3^2$		$7,84$

25 Copia en tu cuaderno y, sin realizar la raíz cuadrada, asocia cada cálculo con su resultado aproximado:

$\sqrt{100,5}$		$10,02$
$\sqrt{20,14}$		$6,81$
$\sqrt{46,5}$		$5,01$
$\sqrt{25,2}$		$4,49$

26 Calcula:

a) $24,5 + 2,1 \cdot (2,48 - 1,23)$

b) $2,5 - 3,8 : (2,2 - 1,3)$

c) $(2,4 + 1,03) \cdot (100,05 - 38,2 : 2)$

d) $2,4 \cdot 2,3 - (4,5 \cdot 2 - 8,3)$

e) $[(1,26 + 1,42) : 2] \cdot (1,25 + 3)$

a) $24,5 + 2,1 \cdot (2,48 - 1,23) = 24,5 + 2,1 \cdot 1,25 =$
 $= 24,5 + 2,625 = 27,125$

b) $2,5 - 3,8 : (2,2 - 1,3) = 2,5 - 3,8 : 0,9 = 2,5 - 4,2 = -1,7$

c) $(2,4 + 1,03) \cdot (100,05 - 38,2 : 2) = 3,43 \cdot (100,05 - 19,1) =$
 $= 3,43 \cdot 80,95 = 277,6585$

d) $2,4 \cdot 2,3 - (4,5 \cdot 2 - 8,3) = 5,52 - (9 - 8,3) = 5,52 - 0,7 =$
 $= 4,82$

e) $[(1,26 + 1,42) : 2] \cdot (1,25 + 3) = (2,68 : 2) \cdot 4,25 =$
 $= 1,34 \cdot 4,25 = 5,695$

27 Calcula:

a) $2,4 \cdot (3,1 + 2,5) - 10,46$

b) $(3,5 - 2,4 \cdot 1,3) : (0,5 + 0,2 \cdot 3)$

c) $4,3 \cdot 0,5 - 4,3 \cdot 0,2 + 4,3 : 2$

d) $1,28 + 2,43 \cdot 3,2 - 2,45$

e) $2 \cdot (-3,1) \cdot (0,5 + 0,3)$

a) $2,4 \cdot (3,1 + 2,5) - 10,46 = 2,4 \cdot 5,6 - 10,46 = 13,44 - 10,46 =$
 $= 2,98$

b) $(3,5 - 2,4 \cdot 1,3) : (0,5 + 0,2 \cdot 3) = (3,5 - 3,12) : (0,5 + 0,6) =$
 $= 0,38 : 1,1 = 0,345$

c) $4,3 \cdot 0,5 - 4,3 \cdot 0,2 + 4,3 : 2 = 2,15 - 0,86 + 2,15 = 3,44$

d) $1,28 + 2,43 \cdot 3,2 - 2,45 = 1,28 + 7,776 - 2,45 = 6,606$

e) $2 \cdot (-3,1) \cdot (0,5 + 0,3) = -6,2 \cdot 0,8 = -4,96$

28 Calcula la superficie de un círculo de 0,85 dm de radio.

$A = \pi r^2 \Leftrightarrow A = \pi \cdot 0,85^2 = 0,7225 \cdot \pi \text{ dm}^2$

29 Una película de DVD cuesta 14,60 €, pero si compramos 5 nos hacen un descuento de 2,25 € por cada una de ellas. Calcula lo que hay que pagar por las 5 películas.

$5 \cdot (14,60 - 2,25) = 61,75 \text{ euros.}$

30 En el depósito de un coche caben 45 litros de gasoil. Si se sabe que en el depósito queda una reserva de 2,8 litros, ¿cuánto cuesta llenar el depósito si el litro de gasoil cuesta 0,92 €?

$0,92 \cdot (45 - 2,8) = 38,824. \text{ Costará } 38,82 \text{ euros.}$

31 Enviar un mensaje desde un móvil cuesta 0,15 €, y realizar una llamada vale 0,25 € más 0,12 € por el establecimiento de llamada. Calcula cuánto cuesta mandar siete mensajes y hacer seis llamadas.

$7 \cdot 0,15 + 6 \cdot (0,25 + 0,12) = 3,27 \text{ euros.}$

32 Un metro de tela cuesta 7,48 €. Si se compran 2,5 metros de tela, ¿cuánto hay que pagar en total?

$$2,5 \cdot 7,48 = 18,7 \text{ euros.}$$

33 Un terreno rectangular mide 28,5 metros de ancho por 45,75 metros de largo. Si se divide en tres partes iguales, ¿cuál es el área de cada parte?

$$(28,5 \cdot 45,75) : 3 = 434,625 \text{ m}^2.$$

34 La superficie de un campo de fútbol es 8 251,25 m². Si la anchura del campo es 80,5 m, ¿cuánto mide de largo?

$$8\,251,25 : 80,5 = 102,5 \text{ m.}$$

APROXIMACIÓN Y REDONDEO

35 Aproxima hasta las centésimas:

- | | |
|------------|------------|
| a) 42,745 | b) 28,359 |
| c) 10,2413 | d) 14,2459 |
| e) 1,429 | f) 0,0281 |
| a) 42,75 | b) 28,36 |
| c) 10,24 | d) 14,25 |
| e) 1,43 | f) 0,03 |

36 Efectúa estas divisiones redondeando el resultado hasta las milésimas:

- | | |
|-------------------|------------------|
| a) 25,4 : 12,42 | b) 24,36 : 15,34 |
| c) 48,273 : 12,66 | d) 12,45 : 32,3 |
| e) 0,008 : 0,04 | |
| a) 2,045 | b) 1,588 |
| c) 3,813 | d) 0,385 |
| e) 0,2 | |

37 Calcula las siguientes potencias redondeando el resultado hasta las cienmilésimas:

- | | | |
|---|----------------|----------------|
| a) $0,3^{-3}$ | b) $2,4^3$ | c) $12,3^{-4}$ |
| d) $1,6^2$ | e) $0,99^{-2}$ | f) $0,5^{-3}$ |
| a) $0,3^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$ | | |
| b) $2,4^3 = \left(\frac{22}{9}\right)^3 = \frac{10\,648}{729} = 14,60631$ | | |
| c) $12,3^{-4} = \left(\frac{123}{10}\right)^{-4} = \left(\frac{10}{123}\right)^4 = \frac{10\,000}{228\,886\,641} = 0,00004$ | | |
| d) $1,6^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} = 2,77778$ | | |

$$e) 0,99^{-2} = \left(\frac{99}{100}\right)^{-2} = \left(\frac{100}{99}\right)^2 = \frac{10\,000}{9\,801} = 1,0203$$

$$f) 0,5^{-3} = \left(\frac{5}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{5}\right)^3 = \frac{729}{125}$$

38 Tu mesa de trabajo mide 1,5 metros de largo por 95 centímetros de ancho.

- a) Calcula la superficie de la mesa.
 b) Aproxima la superficie obtenida hasta las centésimas.
 c) Si cubres la mesa con cuadrados de papel de 5 cm de lado, ¿cuántos cuadrados necesitas para tapar completamente la mesa?

$$a) 1,5 \cdot 0,95 = 1,425 \text{ m}^2$$

$$b) 1,43 \text{ m}^2$$

$$c) 1,425 : 0,0025 = 570 \text{ cuadrados.}$$

39 En una carrera de 100 metros, Juan emplea 13,18 segundos y Ángel emplea 13,08 segundos. El tiempo que se le da a Juan es 13,2 segundos y el que se le da a Ángel es 13,1 segundos.

¿Qué aproximación te parece más adecuada?

$$\text{Error relativo Juan} = \frac{0,02}{13,18} = 0,001517.$$

$$\text{Error relativo Ángel} = \frac{0,02}{13,08} = 0,001529.$$

Se aproxima mejor el tiempo dado a Juan.

40 La nota media de tu evaluación de Matemáticas es 5,78, pero en el boletín de calificaciones te ponen un 6. Tu compañero, que en la evaluación de Matemáticas tiene una nota media de 7,97, en el boletín de calificaciones tiene un 8.

¿Qué aproximación es mejor?

$$\text{Error relativo tuyo} = \frac{0,22}{5,78} = 0,038.$$

$$\text{Error relativo de tu compañero} = \frac{0,03}{7,97} = 0,0038.$$

Se aproxima más la nota de tu compañero, a ti te han beneficiado más.

41 Un reloj atrasa 3 minutos cada 6 horas y otro atrasa 5 minutos cada 8 horas.

Si se pusieran en la hora exacta al mismo tiempo, ¿qué reloj estaría dando la hora más aproximada a la real después de 24 horas?

$$\text{Primer reloj: } \frac{24}{6} \cdot 3 = 12 \text{ minutos se retrasa el primer reloj.}$$

$$\text{Segundo reloj: } \frac{24}{8} \cdot 5 = 15 \text{ minutos se retrasa el segundo reloj.}$$

La hora más aproximada la da el primero.

EJERCICIOS

1 Si en una librería, el precio de un libro es x euros y el de cada bolígrafo es 7 € menos, expresa algebraicamente lo que cuestan:

- a) Cuatro libros.
- b) Diez bolígrafos.
- c) La mitad de lo que cuestan seis libros.
- d) Cinco libros más tres bolígrafos.
- e) Cinco libros con un descuento de 3 €.
- f) Dos bolígrafos y seis libros.
- g) Tres bolígrafos y dos libros.
- h) Seis libros y un bolígrafo.

- a) $4x$
- b) $10 \cdot (x - 7)$
- c) $\frac{6x}{2}$
- d) $5x + 3 \cdot (x - 7)$
- e) $5x - 3$
- f) $6x + 2 \cdot (x - 7)$
- g) $3 \cdot (x - 7) + 2x$
- h) $6x + x - 7$

2 Si x es un número natural, escribe las expresiones algebraicas que representan:

- a) El doble de ese número.
- b) La tercera parte del mismo.
- c) Su cubo.
- d) Su anterior.
- e) Su posterior.
- f) Su triple más tres unidades.
- g) La mitad de su triple.
- h) El cuádruple más cuatro unidades.
- i) El doble de su posterior.

- a) $2x$
- b) $\frac{x}{3}$
- c) x^3
- d) $x - 1$
- e) $x + 1$
- f) $3x + 3$
- g) $\frac{3x}{2}$
- h) $4x + 4$
- i) $2 \cdot (x + 1)$

3 Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se dan:

- a) $12x + y$ si $x = 2, y = 3$
- b) $\frac{xy}{3}$ si $x = 3, y = 4$
- c) $(2x)^2$ si $x = 2$
- d) $\frac{a^2 - b}{a}$ si $a = 4, b = 6$
- e) $\frac{1}{3}x^2 + 2y$ si $x = 3, y = 2$

a) $12 \cdot 2 + 3 = 24 + 3 = 27$

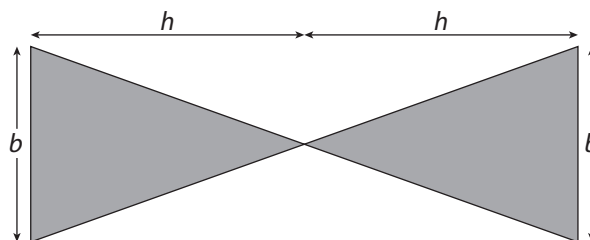
b) $\frac{3 \cdot 4}{3} = 4$

c) $(2 \cdot 2)^2 = 16$

d) $\frac{4^2 - 6}{4} = \frac{16 - 6}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

e) $\frac{1}{3} \cdot 3^2 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$

4 Halla la expresión algebraica que representa el área de la siguiente figura y calcula su valor numérico, sabiendo que las bases miden 5 cm y que la altura de ambos triángulos es 7 cm.



$$A = 2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = 2 \cdot \frac{5 \cdot 7}{2} \Leftrightarrow A = 35 \text{ cm}^2$$

5 Señala cuántos términos hay en cada una de las siguientes expresiones algebraicas. En caso de ser polinomios, concreta de qué tipo son:

- a) $3mn^2$
- b) $3y^2 + 2xy - 1$
- c) $\frac{5}{2}x + 1$
- d) $4ab - 2b + a$
- e) $7x^2z + z + 2$
- f) $2ya$

Expresión algebraica	Términos	Tipo
$3mn^2$	1	Monomio
$3y^2 + 2xy - 1$	3	Trinomio
$\frac{5}{2}x + 1$	2	Binomio
$4ab - 2b + a$	3	Trinomio
$7x^2z + z + 2$	3	Trinomio
$2ya$	1	Monomio

6 Describe estas expresiones algebraicas (monomio, binomio, trinomio, etc.), e indica la parte literal, el coeficiente y el grado de cada término:

- a) $9a^3b^4 + 3$ b) $4y^2z^3 - 5y$ c) $8z + y - 2y^5$
 d) $\frac{3}{4}m^4$ e) $7a + 4b^2a - 2b + 1$ f) x

Expresión algebraica	Tipo	Parte literal	Coeficiente	Grado
$9a^3b^4 + 3$	Binomio	a^3b^4	9, 3	7
$4y^2z^3 - 5y$	Binomio	y^2z^3, y	5, -5	5
$8z + y - 2y^5$	Trinomio	z, y, y^5	8, 1, -2	5
$\frac{3}{4}m^4$	Monomio	m^4	$\frac{3}{4}$	4
$7a + 4b^2a - 2b + 1$	Cuatrinomio	a, b^2a, b	7, 4, -2, 1	3
x	Monomio	x	1	1

7 Halla el resultado de las siguientes operaciones con monomios:

- a) $5z + 6z + z$ b) $10x^2 - 7x^2 + x^2$
 c) $6yx + 4xy + yx$ d) $2n^2m + 3n^2m$
 e) $\frac{3}{4}x - 2x + x$ f) $a^2 + 3a^2 + 9ab$
 a) $12z$ b) $4x^2$ c) $11xy$
 d) $5n^2m$ e) $-\frac{1}{4}x$ f) $4a^2 + 9ab$

8 Realiza la multiplicación de los siguientes monomios:

- a) $5x^2 \cdot 3x$ b) $3b^2 \cdot \frac{1}{2}b$
 c) $2a^2 \cdot a \cdot 5a$ d) $4y \cdot (-4)y^2$
 e) $4y \cdot 2y^2$ f) $6a^3 \cdot 2a$
 a) $15x^3$ b) $\frac{3}{2}b^3$ c) $10a^4$
 d) $-16y^3$ e) $8y^3$ f) $12a^4$

9 Indica cuáles de estas igualdades son correctas y cuáles son incorrectas. Razona tu respuesta:

- a) $3a + a = 4a^2$ b) $5x + x + x = 7x$
 c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 = x^2$ d) $2n^2 + 3n^2 - 5n^2 = 0$
 e) $3zy + 5zy = 8yz$ f) $5x^2 + 2x = 7x^3$
 a) Incorrecta. b) Correcta.
 c) Correcta. d) Correcta.
 e) Correcta. f) Incorrecta.

10 Realiza la división de los siguientes monomios:

- a) $\frac{24a^4}{6a^2}$ b) $\frac{4ab}{2b}$
 c) $\frac{12m^2}{15m}$ d) $\frac{-9x^2y^2}{3x}$
 e) $\frac{12y^5}{6y^2}$ f) $\frac{6y^8x}{3x^3y}$
 a) $\frac{24a^4}{6a^2} = 4a^2$ b) $\frac{4ab}{2b} = 2a$
 c) $\frac{12m^2}{15m} = \frac{4m}{5}$ d) $\frac{-9x^2y^2}{3x} = -3xy^2$
 e) $\frac{12y^5}{6y^2} = 2y^3$ f) $\frac{6y^8x}{3x^3y} = \frac{2y^7}{x^2}$

11 Dados los polinomios:

$$A(x) = 12x^6 + 6x^4 + 3x + 2$$

$$B(x) = 4x^6 - 4x^4 + 2$$

$$C(x) = 4x^4 - 5x^3 + x - 1$$

Calcula las siguientes operaciones:

- a) $A(x) + B(x) + C(x)$ b) $A(x) - B(x)$
 c) $B(x) + A(x)$ d) $C(x) - A(x)$
 a) $A(x) + B(x) + C(x)$

$$\begin{array}{r} 12x^6 + 6x^4 + 3x + 2 \\ 4x^6 - 4x^4 + 2 \\ \hline 16x^6 + 6x^4 - 5x^3 + 4x + 3 \end{array}$$

b) $A(x) - B(x)$

$$\begin{array}{r} 12x^6 + 6x^4 + 3x + 2 \\ -4x^6 + 4x^4 - 2 \\ \hline 8x^6 + 10x^4 + 3x \end{array}$$

c) $B(x) + A(x)$

$$\begin{array}{r} 4x^6 - 4x^4 + 2 \\ 12x^6 + 6x^4 + 3x + 2 \\ \hline 16x^6 + 2x^4 + 3x + 4 \end{array}$$

d) $C(x) - A(x)$

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^3 + x - 1 \\ -12x^6 - 6x^4 - 3x - 2 \\ \hline -12x^6 - 2x^4 - 5x^3 - 2x - 3 \end{array}$$

12 Haz la suma o resta de los polinomios:

$$a) \left(\frac{3}{4}z^2 + 5z^3 - 3z \right) + \left(\frac{1}{2}z^2 + 4z^3 + z \right)$$

$$b) (3n^5 - 4n^2 + 5) - (2n^5 + 6n^2 + 3)$$

$$c) (m^3 + 3m + 7) - (m^3 - 2m + 1)$$

$$d) (y^{10} + 3y^3 - y) + ((y^5)^2 - 4y^2 + 5y + 8)$$

$$a) \begin{array}{r} \frac{3}{4}z^2 + 5z^3 - 3z \\ \frac{1}{2}z^2 + 4z^3 + z \\ \hline \frac{5}{4}z^2 + 9z^3 - 2z \end{array}$$

$$b) \begin{array}{r} 3n^5 - 4n^2 + 5 \\ -2n^5 - 6n^2 - 3 \\ \hline n^5 - 10n^2 + 2 \end{array}$$

$$c) \begin{array}{r} m^3 + 3m + 7 \\ -m^3 + 2m - 1 \\ \hline 5m + 6 \end{array}$$

$$d) \begin{array}{r} y^{10} + 3y^3 - y \\ y^{10} - 4y^2 + 5y + 8 \\ \hline 2y^{10} + 3y^3 - 4y^2 + 4y + 8 \end{array}$$

13 Calcula las multiplicaciones siguientes y reduce al máximo el resultado:

$$a) (-z)^2 \cdot (z^3 + z^2 - 5z)$$

$$b) 7y \cdot (6y^2 + 3y - 3)$$

$$c) (-2m)^2 \cdot (3m^2 + 2m)$$

$$d) x^6 \cdot (2x^2 - 4x + 3)$$

$$e) 3x \cdot \left(\frac{1}{3}x + x^2 \right)$$

$$f) \frac{1}{3}x \cdot (9x^2 + 27)$$

$$a) \begin{array}{r} z^3 + z^2 - 5z \\ z^2 \\ \hline z^5 + z^4 - 5z^3 \end{array}$$

$$b) \begin{array}{r} 6y^2 + 3y - 3 \\ 7y \\ \hline 42y^3 + 21y^2 - 21y \end{array}$$

$$c) \begin{array}{r} 3m^2 + 2m \\ 4m^2 \\ \hline 12m^4 + 8m^3 \end{array}$$

$$d) \begin{array}{r} 2x^2 - 4x + 3 \\ x^6 \\ \hline 2x^8 - 4x^7 + 3x^6 \end{array}$$

$$e) \begin{array}{r} \frac{1}{3}x + x^2 \\ 3x \\ \hline x^2 + 3x^3 \end{array}$$

$$f) \begin{array}{r} 9x^2 + 27 \\ \frac{1}{3}x \\ \hline 3x^3 + 9x \end{array}$$

14 Teniendo en cuenta los polinomios:

$$A(x) = 5x^5 + 3x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 2$$

$$B(x) = 3x^2 + x - 2$$

$$C(x) = 7x - 10x^2 + 10$$

$$D(x) = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 2$$

Calcula:

$$a) A(x) \cdot B(x)$$

$$b) -A(x) \cdot C(x)$$

$$c) C(x) \cdot B(x)$$

$$d) B(x) \cdot C(x)$$

$$e) A(x) \cdot C(x)$$

$$f) D(x) \cdot C(x)$$

$$g) D(x) \cdot B(x)$$

$$h) -D(x) \cdot B(x)$$

$$i) A(x) \cdot (-D(x))$$

$$a) A(x) \cdot B(x)$$

$$\begin{array}{r} 5x^5 + 3x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \\ 3x^2 + x - 2 \\ \hline -10x^5 - 6x^4 + 8x^2 - x + 4 \\ 5x^6 + 3x^5 - 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \\ 15x^7 + 9x^6 - 12x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 6x^2 \\ \hline 15x^7 + 14x^6 - 7x^5 - 18x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + 4 \end{array}$$

$$b) -A(x) \cdot C(x)$$

$$\begin{array}{r} -5x^5 - 3x^4 + 4x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \\ 7x - 10x^2 + 10 \\ \hline -50x^5 - 30x^4 + 40x^2 - 5x + 20 \\ 50x^7 + 30x^6 - 40x^4 + 5x^3 - 20x^2 \\ - 35x^6 - 21x^5 + 28x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 14x \\ \hline 50x^7 - 5x^6 - 71x^5 - 70x^4 + 33x^3 + \frac{33}{2}x^2 + 9x + 20 \end{array}$$

$$c) C(x) \cdot B(x)$$

$$\begin{array}{r} -10x^2 + 7x + 10 \\ 3x^2 + x - 2 \\ \hline 20x^2 - 14x - 20 \\ -10x^3 + 7x^2 + 10x \\ -30x^4 + 21x^3 + 30x^2 \\ \hline -30x^4 + 11x^3 + 57x^2 - 4x - 20 \end{array}$$

d) $B(x) \cdot C(x)$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + x - 2 \\ 7x - 10x^2 + 10 \\ \hline 30x^2 + 10x - 20 \\ -30x^4 - 10x^3 + 20x^2 \\ 21x^3 + 7x^2 - 14x \\ \hline -30x^4 + 11x^3 + 57x^2 - 4x - 20 \end{array}$$

e) $A(x) \cdot C(x)$

$$\begin{array}{r} 5x^5 + 3x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \\ -10x^2 + 7x + 10 \\ \hline 50x^5 + 30x^4 - 40x^2 + 5x - 20 \\ 35x^6 + 21x^5 - 28x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 14x \\ -50x^7 - 30x^6 + 40x^4 - 5x^3 + 20x^2 \\ \hline -50x^7 + 5x^6 + 71x^5 + 70x^4 - 33x^3 - \frac{33}{2}x^2 - 9x - 20 \end{array}$$

f) $D(x) \cdot C(x)$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{5}x^2 + 2x + 2 \\ -10x^2 + 7x + 10 \\ \hline 2x^2 + 20x + 20 \\ \frac{7}{5}x^3 + 14x^2 + 14x \\ -2x^4 - 20x^3 - 20x^2 \\ \hline -2x^4 - \frac{93}{5}x^3 - 4x^2 + 34x + 20 \end{array}$$

g) $D(x) \cdot B(x)$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{5}x^2 + 2x + 2 \\ 3x^2 + x - 2 \\ \hline -\frac{2}{5}x^2 - 4x - 4 \\ \frac{1}{5}x^3 + 2x^2 + 2x \\ \hline \frac{3}{5}x^4 + 6x^3 + 6x^2 \\ \hline \frac{3}{5}x^4 + \frac{31}{5}x^3 + \frac{38}{5}x^2 - 2x - 4 \end{array}$$

h) $-D(x) \cdot B(x)$

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{5}x^2 - 2x - 2 \\ 3x^2 + x - 2 \\ \hline \frac{2}{5}x^2 + 4x + 4 \\ -\frac{1}{5}x^3 - 2x^2 - 2x \\ -\frac{3}{5}x^4 - 6x^3 - 6x^2 \\ \hline -\frac{3}{5}x^4 - \frac{31}{5}x^3 - \frac{38}{5}x^2 + 2x + 4 \end{array}$$

i) $A(x) \cdot (-D(x))$

$$\begin{array}{r} 5x^5 + 3x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \\ -\frac{1}{5}x^2 - 2x - 2 \\ \hline -10x^5 - 6x^4 + 8x^2 - x + 4 \\ -10x^6 - 6x^5 + 8x^3 - x^2 + 4x \\ -x^7 - \frac{3}{5}x^6 + \frac{4}{5}x^4 - \frac{1}{10}x^3 + \frac{2}{5}x^2 \\ \hline -x^7 - \frac{53}{5}x^6 - 16x^5 - \frac{26}{5}x^4 + \frac{79}{10}x^3 + \frac{37}{5}x^2 + 3x + 4 \end{array}$$

15 Calcula las siguientes identidades notables:

a) $(x + 2)^2$

b) $(2x - 3)^2$

c) $(3x^2 - 4x)^2$

d) $(x + 2) \cdot (x - 2)$

e) $\left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2$

f) $(2x - 5) \cdot (2x + 5)$

a) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

b) $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

c) $(3x^2 - 4x)^2 = 9x^4 - 24x^3 + 16x^2$

d) $(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$

e) $\left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 = \frac{4}{9}x^2 - 4x + 9$

f) $(2x - 5) \cdot (2x + 5) = 4x^2 - 25$

16 Indica si las siguientes igualdades son ciertas:

a) $(5x + 8)^2 = 5x^2 + 8^2$

b) $\left(\frac{1}{2}y + 2z\right) \cdot \left(\frac{1}{2}y - 2z\right) = \frac{1}{4}y^2 - 4z^2$

c) $(3m - m^2)^2 = 9m^2 - 6m^3 + m^4$

a) Falsa.

b) Verdadera.

c) Verdadera.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EXPRESIONES ALGEBRAICAS.
EL LENGUAJE ALGEBRAICO

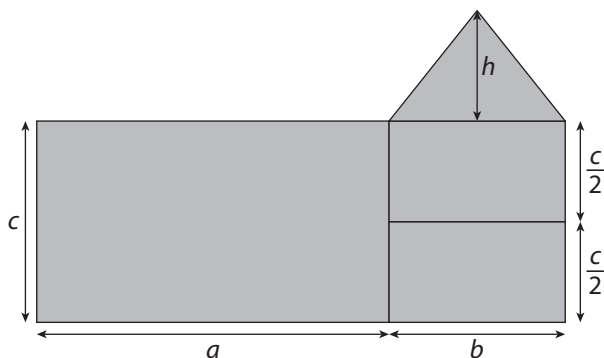
1 La variable x representa un número natural. Expresa en función de él:

- a) Su cuádruple.
b) El doble de su posterior.
c) La mitad de su anterior más cuatro unidades.
- a) $4x$ b) $2(x+1)$ c) $\frac{x-1}{2} + 4$

2 Expresa algebraicamente los siguientes enunciados:

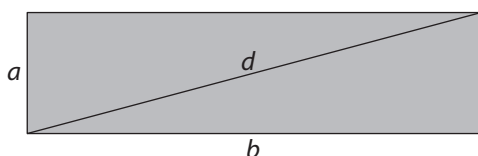
- a) Las dos terceras partes del cuadrado de un número.
b) El cuadrado del doble de un número.
c) El triple de un número más tres.
d) El triple de un número, más tres.
- a) $\frac{2}{3}x^2$ b) $2x^2$
c) $3(x+3)$ d) $3x+3$

3 Expresa algebraicamente el área del dibujo:



$$A = a \cdot c + b \cdot c + \frac{b \cdot h}{2}$$

4 Expresa algebraicamente el valor de la siguiente diagonal:



$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

5 Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

- a) $x^2 + 2x$ si $x = 2$
b) $x^2 + 2x + mx$ si $x = 1, m = -1$
c) $2m + mx$ si $x = 2, m = \frac{1}{2}$
d) $xy - x^3$ si $x = 4, y = 3$
- a) $x^2 + 2x = 2^2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$
b) $x^2 + 2x + 2m = 1^2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1 + 2 - 2 = 1$
c) $2m + mx = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 + 1 = 2$
d) $xy - x^3 = 4 \cdot 3 - 4^3 = 12 - 64 = -52$

6 Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla indicando el valor numérico de cada expresión:

	$x = -1$	$x = 0$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
$x^3 - x$	0	0	$-\frac{3}{8}$	6
$6x - \frac{x^2}{2}$	$-\frac{13}{2}$	0	$\frac{23}{8}$	10
$x \cdot (10 - 6x)$	-16	0	$\frac{7}{2}$	-4
$2 \cdot (x - 1) - 3$	-7	-3	-4	-1

7 La velocidad de un cuerpo en movimiento viene definida por la siguiente expresión: $v = \frac{e}{t}$, donde v es el valor de dicha velocidad, e el espacio recorrido y t el tiempo que ha estado en movimiento. Si un cuerpo ha recorrido 500 metros en 30 segundos, ¿cuál es su velocidad?

$$v = \frac{500}{30} \Leftrightarrow v = 16,6 \text{ m/s}$$

8 Escribe las siguientes expresiones algebraicas de manera que queden ordenadas de menor a mayor en función de su valor numérico en $x = -3$.

- a) $x^2 + 2x - x$ b) $3x^2 + 10x$ c) $x^3 + 2x - 7$
- a) $(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - (-3) = 9 - 6 + 3 = 6$
b) $3 \cdot (-3)^2 + 10 \cdot (-3) = 3 \cdot 9 - 30 = 27 - 30 = -3$
c) $(-3)^3 + 2 \cdot (-3) - 7 = -27 - 6 - 7 = -40$
 $c < b < a$

9 Halla el valor numérico en cada caso:

a) $m^2 + nx - m + 7$ si $m = 4, n = -1, x = 2$

b) $2xy - x + y^2 + 2y$ si $x = 3, y = 5$

c) $7m - \frac{1}{2}x^2 - 12$ si $m = 2, x = 2$

d) $8y^3 - 7y^2 + y - 2$ si $y = -2$

e) $x^2 + 2xy + y^2$ si $x = 3, y = -2$

a) $m^2 + nx - m + 7 = 4^2 + (-1) \cdot 2 - 4 + 7 = 17$

b) $2xy - x + y^2 + 2y = 2 \cdot 3 \cdot 5 - 3 + 5^2 + 2 \cdot 5 =$
 $= 30 - 3 + 25 + 10 = 62$

c) $7m - \frac{1}{2}x^2 - 12 = 7 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 12 = 14 - 2 - 12 = 0$

d) $8y^3 - 7y^2 + y - 2 = 8 \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + (-2) - 2 =$
 $= -64 - 28 - 2 - 2 = -96$

e) $x^2 + 2xy + y^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) + (-2)^2 = 9 - 12 + 4 = 1$

MONOMIOS Y POLINOMIOS

10 Explica con tus propias palabras el significado de los términos:

a) Monomio.

b) Polinomio.

c) Término.

d) Coeficiente.

e) Binomio.

f) Factor.

a) Monomio es una expresión algebraica formada por la multiplicación de números, letras o números y letras.

b) Polinomio es una expresión algebraica formada por la suma o resta de monomios no semejantes.

c) Término es la expresión algebraica formada por un monomio.

d) Coeficiente es la parte numérica de un monomio.

e) Binomio es el polinomio formado por dos monomios no semejantes.

f) Factor es cada una de las cantidades que se multiplican para formar un producto.

11 Clasifica las siguientes expresiones algebraicas, e indica el coeficiente y la parte literal de cada uno de los monomios. ¿Cuántos términos tiene cada uno?

a) $12x^2y + 15y - 2$ b) $-2nm^3 + \frac{1}{2}x$

c) $x^2 + x - 2$ d) $\frac{3}{5}x^2yz$

e) $\frac{-x^2y}{2} + 1$ f) $\frac{3}{5}ym^5 - x$

Expresión algebraica	Tipo	Parte literal	Coeficiente	Grado
$12x^2y + 15y - 2$	Trinomio	x^2y, y	12, 15, -2	3
$-2nm^3 + \frac{1}{2}x$	Binomio	nm^3, x	-2, $\frac{1}{2}$	4
$x^2 + x - 2$	Trinomio	x^2, x	1, 1, -2	2
$\frac{3}{5}x^2yz$	Monomio	x^2yz	$\frac{3}{5}$	4
$\frac{-x^2y}{2} + 1$	Binomio	x^2y	$-\frac{1}{2}, 1$	3
$\frac{3}{5}ym^5 - x$	Binomio	ym^5, x	$\frac{3}{5}, -1$	6

12 Clasifica las siguientes expresiones y di cuál es el coeficiente y cuál es la parte literal de cada monomio.

a) $-\frac{x^2yz}{2}$

b) $(2xy)^2 + x + \frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}xy + 5$

d) $mnx + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{5}$

Expresión algebraica	Tipo	Parte literal	Coeficiente	Grado
$-\frac{x^2yz}{2}$	Monomio	x^2yz	$-\frac{1}{2}$	4
$(2xy)^2 + x + \frac{1}{2}$	Trinomio	$(xy)^2, x$	4, 1, $\frac{1}{2}$	4
$\frac{3}{4}xy + 5$	Binomio	xy	$\frac{3}{4}, 5$	2
$mnx + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{5}$	Trinomio	mnx, x^2	1, $\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}$	3

13 Describe los siguientes polinomios, indicando el número de términos que lo componen y cuáles son los coeficientes y las partes literales de cada uno.

a) $A(x) = 64x^3 + 24x^2$

b) $B(x) = 6x + 3x - 5x - 4$

c) $C(x) = 8x - 28x^3 + 6x^3 - 49x^5 - 20$

d) $D(x) = 6x + 3x - 6x - 4$

Expresión algebraica	Tipo	Parte literal	Coeficiente	N.º de términos
$64x^3 + 24x^2$	Binomio	x^3, x^2	64, 24	2
$6x + 3x - 5x - 4 = 4x - 4$	Binomio	x	4, -4	2
$8x - 28x^3 + 6x^3 - 49x^5 - 20 = -49x^5 - 22x^3 + 8x - 20$	Cuatrinomio	x^5, x^3, x	-49, -22, 8, -20	4
$6x + 3x - 6x - 4 = 3x - 4$	Binomio	x	3, -4	2

14 ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Razónalas.

- a) La parte literal del término independiente es x .
- b) El coeficiente del monomio xy^2 es cero.
- c) Todos los binomios están compuestos por dos monomios.
- d) Dos términos de un polinomio son semejantes si tienen la misma parte literal.

- a) Falsa, el término independiente no tiene parte literal.
- b) Falsa, es 1.
- c) Cierta.
- d) Cierta.

OPERACIONES CON MONOMIOS

15 ¿Qué condiciones deben cumplir dos monomios para que se puedan sumar o restar? ¿Ocurre lo mismo en el caso de multiplicar o dividir monomios?

Para que se puedan sumar o restar tienen que tener la misma parte literal. No ocurre lo mismo para multiplicar o para dividir.

16 Reduce al máximo las siguientes expresiones:

- a) $x^2 + 3x + 5x^2 - x + 2$
- b) $2x^5 - x^2 + 7x^2 - x^5 - 1$
- c) $2x^3 - x^3 + 2$
- d) $x^2 - 7x^2 + 30$

- a) $6x^2 + 2x + 2$
- b) $x^5 + 6x^2 - 1$
- c) $x^3 + 2$
- d) $-6x^2 + 30$

17 Calcula:

- a) $6x^2 + 3x^2$
- b) $5y^2 + y^2$
- c) $m^3 + 10m^3 + 3m^3$
- d) $-9x^6 + 3x^6 - x^6$

- a) $9x^2$
- b) $6y^2$
- c) $14m^3$
- d) $-7x^6$

18 Opera los siguientes monomios:

- a) $(7x) \cdot y$
- b) $(2x^5) \cdot x^2$
- c) $(-2x^2) \cdot x$
- d) $\left(\frac{3y}{4}\right) \cdot y^2$
- a) $(7x) \cdot y = 7xy$
- b) $(2x^5) \cdot x^2 = 2x^7$
- c) $(-2x^2) \cdot x = -2x^3$
- d) $\left(\frac{3y}{4}\right) \cdot y^2 = \frac{3}{4}y^3$

19 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $\frac{(2z)^3}{\frac{1}{2}z} + 3z^2$
- b) $\frac{-\frac{3}{4}xy}{\frac{1}{4}xy} + \frac{1}{4}xy$
- c) $2z \cdot z^2$
- d) $\frac{-2m^3}{3} \cdot \frac{(3m)^2}{m^2}$

e) $3m \cdot m^3 - m^4$

$$a) \frac{(2z)^3}{\frac{1}{2}z} + 3z^2 = \frac{8z^3}{\frac{1}{2}z} + 3z^2 = 16z^2 + 3z^2 = 19z^2$$

$$b) \frac{-\frac{3}{4}xy}{\frac{1}{4}xy} + \frac{1}{4}xy = -3 + \frac{1}{4}xy$$

$$c) 2z \cdot z^2 = 2z^3$$

$$d) \frac{-2m^3}{3} \cdot \frac{(3m)^2}{m^2} = -6m^3$$

$$e) 3m \cdot m^3 - m^4 = 3m^4 - m^4 = 2m^4$$

20 Opera:

$$a) \frac{7xy + 2xy}{2xy}$$

$$b) 2x \cdot (5x + x^2) - x^3 + 5x^2$$

$$c) \left(\frac{7}{2}xy\right) \cdot (2xy)$$

$$d) 4x^3 + 5x^3$$

$$e) -6m^2 + m^2$$

$$a) \frac{7xy + 2xy}{2xy} = \frac{9xy}{2xy} = \frac{9}{2}$$

$$b) 2x \cdot (5x + x^2) - x^3 + 5x^2 = 10x^2 + 2x^3 - x^3 + 5x^2 = 15x^2 + x^3$$

$$c) \left(\frac{7}{2}xy\right) \cdot (2xy) = 7x^2y^2$$

$$d) 4x^3 + 5x^3 = 9x^3$$

$$e) -6m^2 + m^2 = -5m^2$$

21 ¿Son ciertas las siguientes igualdades?

$$a) \left(-\frac{1}{2}xy\right) \cdot (2x^2y) = -x^3y$$

$$b) \frac{-\frac{1}{4}m^2}{\frac{1}{4}m^2} = 1$$

$$c) \frac{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}{xyz} = x^3y^3z^3$$

$$d) 6x + 2x^2 - 6x \cdot 2x^2 = 0$$

a) Falsa.

b) Falsa.

c) Falsa.

d) Falsa.

22 **Copia en tu cuaderno y une las columnas:**

$\frac{1}{2}xy^2$		No es un monomio.
-5		Aunque tiene igual variable no se puede sumar con 3m.
$8ab + b$		La parte literal de este monomio no existe.
$4m^2$		El coeficiente de este monomio es un número fraccionario.

23 **Contesta si es verdadero o falso:**

- a) Un monomio con coeficiente negativo no se puede multiplicar por otro.
- b) El resultado de la multiplicación entre dos monomios es siempre otro monomio.
- c) Para sumar dos monomios, los coeficientes han de ser iguales.
- d) A la hora de dividir polinomios, primero se dividen los coeficientes y después la parte literal.
- e) Para multiplicar monomios, las partes literales han de ser semejantes.

- a) Falsa. b) Verdadera. c) Falsa.
- d) Falsa. e) Falsa.

24 **Calcula mentalmente:**

- a) $7mx^2 + x^2m - 5x^2m$ b) $6y + 4y - 10y$
- c) $4x^2 + x^2 + 5x^2$ d) $2 \cdot (4xm + 5xm)$
- a) $3mx^2$ b) 0
- c) $10x^2$ d) $18xm$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

25 **Haz la suma o resta de los siguientes polinomios:**

- a) $(2x + 3x^2 + 2) + (4x^2 + 2x + 1)$
- b) $(5m^2 + 3m + m^3) + (2m^2 + 2m - m^3)$
- c) $(3x^2 + 2x^4 + 3x) - (-x^2 + x^4 + 2x)$
- d) $(2x^3 - 2) - (3x^3 - 2x + 2)$
- a) $(2x + 3x^2 + 2) + (4x^2 + 2x + 1) = 7x^2 + 4x + 3$
- b) $(5m^2 + 3m + m^3) + (2m^2 + 2m - m^3) = 7m^2 + 5m$
- c) $(3x^2 + 2x^4 + 3x) - (-x^2 + x^4 + 2x) = x^4 + 4x^2 + x$
- d) $(2x^3 - 2) - (3x^3 - 2x + 2) = -x^3 + 2x - 4$

26 **Opera:**

- a) $10x \cdot (6x^2 + 3x)$ b) $6x^2 \cdot (x^2 + x^4 + 3x^4)$
- c) $3x^2 \cdot (2x + 3x^2 - x)$ d) $5x \cdot (3x^2 - 1)$
- a) $10x \cdot (6x^2 + 3x) = 60x^3 + 30x^2$
- b) $6x^2 \cdot (x^2 + x^4 + 3x^4) = 6x^4 + 6x^6 + 18x^6$
- c) $3x^2 \cdot (2x + 3x^2 - x) = 6x^3 + 9x^4 - 3x^3$
- d) $5x \cdot (3x^2 - 1) = 15x^3 - 5x$

27 **Realiza la multiplicación de los siguientes polinomios:**

- a) $(3x + 2x^2 + 7) \cdot (4x - 2x^2 + 3)$
- b) $(2x^3 + x) \cdot (5x^2 - 2x + 3)$
- c) $(-3x^2 + 2) \cdot (5x^2 + x^3 + 2)$
- d) $(2x - 2) \cdot (3x + 3)$
- e) $(3x^4 - 2x + 5) \cdot (x^2 - x)$

$$\begin{array}{r} a) \quad 2x^2 + 3x + 7 \\ -2x^2 + 4x + 3 \\ \hline 6x^2 + 9x + 21 \\ 8x^3 + 12x^2 + 28x \\ -4x^4 - 6x^3 - 14x^2 \\ \hline -4x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 37x + 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad 5x^2 - 2x + 3 \\ 2x^3 + x \\ \hline 5x^3 - 2x^2 + 3x \\ 10x^5 - 4x^4 + 6x^3 \\ \hline 10x^5 - 4x^4 + 11x^3 - 2x^2 + 3x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} c) \quad x^3 + 5x^2 + 2 \\ -3x^2 + 2 \\ \hline 2x^3 + 10x^2 + 4 \\ -x^5 - 15x^4 \quad - 6x^2 \\ \hline -x^5 - 15x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} d) \quad 2x - 2 \\ 3x + 3 \\ \hline 6x - 6 \\ 6x^2 - 6x \\ \hline 6x^2 \quad - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} e) \quad 3x^4 - 2x + 5 \\ x^2 - x \\ \hline -3x^5 \quad + 2x^2 - 5x \\ 3x^6 \quad - 2x^3 + 5x^2 \\ \hline 3x^6 - 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 5x \end{array}$$

28 ■■ Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left[\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - 2x^3 - x\right] + (x^4 + 3x^3 + 2x)$

b) $\left(\frac{x^3}{2} + x^2 + \frac{3}{5}\right) - \left(-x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}\right)$

c) $2(x+y) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3$

d) $\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}x^2 + 2$

e) $\frac{1}{4}y^5 - \frac{2}{4}y^5 + y^2 + 3y^4 + \frac{3}{4}y^5 - y^5$

a) $\frac{5}{4}x^4 + x^3 + x$

b) $\frac{3x^3}{2} + 3x^2 - \frac{3}{20}$

c) $\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + 3$

d) 2

e) $-\frac{2}{4}y^5 + y^2 + 3y^4$

29 ■■ Opera:

a) $\frac{3}{8}m(m+n^2) + mn^2$

b) $\left(-4x^2 + \frac{1}{3}xy - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - xy + 2\right)$

c) $[4(x+y) - 3x - y] \cdot (2x+y)$

d) $[3(a \cdot b)^2 + 2] \cdot (x - 2y)$

a) $\frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{8}mn^2 + mn^2 = \frac{3}{8}mn^2 + \frac{11}{8}mn^2$

b) $-2x^4 + \frac{25}{6}x^3y - 9x^2 + \frac{4}{3}xy - 4 - \frac{1}{3}x^2y^2$

c) $2x^2 + 7xy + 3y^2$

d) $3a^2b^2x - 6a^2b^2y - 4y + 2x$

30 ■■ Opera y reduce al máximo las siguientes expresiones:

a) $5x \cdot (x+2) - x^2$

b) $x^2 \cdot (x+1) + x^2$

c) $xy + 3y \cdot (x+y)$

a) $4x^2 + 10x$

b) $x^3 + 2x^2$

c) $4xy + 3y^2$

31 ■■ Realiza las siguientes operaciones entre polinomios:

a) $\left(y^3 - \frac{1}{3}y\right) \cdot \left(y^2 + \frac{1}{2}y\right)$

b) $2 \cdot (6-a) + 4a - 6 + a - 4 - 6a - 4$

c) $12x \cdot \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 6x \cdot (-2x)^2 + 2x^2$

d) $\frac{3}{4}x \cdot (-4x^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{3}{2}x \cdot (-x^2)$

a) $y^5 + \frac{1}{2}y^4 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{6}y^2$

b) $-3a - 2$

c) $-\frac{56}{3}x^3 + 2x^2$

d) $\frac{3}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^3$

32 ■■ Realiza las siguientes operaciones y reduce al máximo la expresión algebraica resultante.

a) $4 \cdot (x+b) + (-2) \cdot (x+b)$

b) $10 \cdot (2-4x) - 6 \cdot (4x-2)$

c) $3(x^2-1) - \frac{1}{2}(x+2) \cdot \frac{1}{2}(2x+1)$

d) $(3x+2)^2 + 3x^3 - 10x - 2$

a) $2x + 2b$

b) $-64x + 32$

c) $\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

d) $3x^3 + 9x^2 + 2x + 2$

33 ■■ Dados los polinomios $A(x) = x^2 + 4x + 4$ y $B(x) = 2x^2 + x - 2$, comprueba que la multiplicación de polinomios cumple la propiedad conmutativa, es decir, $A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$.

$$A(x) \cdot B(x) \qquad x^2 + 4x + 4$$

$$2x^2 + x - 2$$

$$\hline -2x^2 - 8x - 8$$

$$x^3 + 4x^2 + 4x$$

$$2x^4 + 8x^3 + 8x^2$$

$$\hline 2x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 4x - 8$$

$$B(x) \cdot A(x)$$

$$2x^2 + x - 2$$

$$x^2 + 4x + 4$$

$$\hline 8x^2 + 4x - 8$$

$$8x^3 + 4x^2 - 8x$$

$$2x^4 + x^3 - 2x^2$$

$$\hline 2x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 4x - 8$$

34 Opera:

a) $3x \cdot (4xy + 2x) - 2 \cdot \left(x^2y + \frac{1}{2}x\right)$

b) $(5x^2 + 3x + 2) \cdot (4x - 3) - x^3 + 5x^4$

c) $(3x^2y + yx^2 - y) - \left(\frac{1}{2}y + 3x^2 + 4x^4\right)$

d) $(4a^2 - b^2) \cdot (b^2 + a) - (a^3 + 2b^4) \cdot 3$

a) $3x \cdot (4xy + 2x) - 2 \cdot \left(x^2y + \frac{1}{2}x\right) =$
 $= 12x^2y + 6x^2 - 2x^2y - x = 10x^2y + 6x^2 - x$

b) $(5x^2 + 3x + 2) \cdot (4x - 3) - x^3 + 5x^4 =$
 $= 20x^3 - 15x^2 + 12x^2 - 9x + 8x - 6 - x^3 + 5x^4 =$
 $= 5x^4 + 19x^3 - 3x^2 - x - 6$

c) $(3x^2y + yx^2 - y) - \left(\frac{1}{2}y + 3x^2 + 4x^4\right) =$
 $= 3x^2y + yx^2 - y - \frac{1}{2}y - 3x^2 - 4x^4 =$
 $= 4yx^2 - \frac{3}{2}y - 3x^2 - 4x^4$

d) $(4a^2 - b^2) \cdot (b^2 + a) - (a^3 + 2b^4) \cdot 3 =$
 $= 4a^2b^2 + 4a^3 - b^4 - b^2a - 3a^3 - 6b^4 =$
 $= 4a^2b^2 + a^3 - 7b^4 - b^2a$

IDENTIDADES NOTABLES

35 ¿Qué son las identidades notables? Explícalo ayudándote con ejemplos.

Son multiplicaciones entre binomios que se pueden expresar de forma sencilla sin necesidad de operar por el procedimiento habitual.

36 Halla las siguientes identidades notables y comprueba que, operando de la forma habitual, se obtiene el mismo resultado.

a) $(3x^2 + 2)^2$

b) $(4m^2 - 2m) \cdot (5m^2 + 3m)$

c) $(5 - y^2)^2$

d) $(5x - 2)^2$

e) $(x - 4) \cdot (x + 4)$

f) $(2a - 2)^2$

a) $(3x^2 + 2)^2 = 9x^4 + 12x^2 + 4$

b) $(4m^2 - 2m) \cdot (5m^2 + 3m) \Rightarrow$ No es identidad notable.

c) $(5 - y^2)^2 = 25 - 12y^2 + y^4$

d) $(5x - 2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$

e) $(x - 4) \cdot (x + 4) = x^2 - 16$

f) $(2a - 2)^2 = 4a^2 - 8a + 4$

37 ¿Son ciertas las siguientes igualdades?

a) $(5a^2b + 2)^2 = (5a^2b)^2 + 20a^2b + 4$

b) $\frac{(2+x)^2}{2} = 2 + 2x + x$

c) $(xy - 3x) \cdot (xy + 3x) = x^2y^2 - 9x^2$

d) $(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) = x^4 - 1$

a) Sí. b) No.

c) Sí. d) Sí.

38 Simplifica las expresiones:

a) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

b) $\frac{(a+b) \cdot (-b+a)}{a^2 - b^2}$

c) $\frac{9x^2 - 100}{3x - 10}$

d) $\frac{25 - 2x + x^2}{(5-x)^2}$

a) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x+1)^2}{x+1} = x+1$

b) $\frac{(a+b) \cdot (-b+a)}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = 1$

c) $\frac{9x^2 - 100}{3x - 10} = \frac{(3x-10) \cdot (3x+10)}{3x-10} = 3x+10$

d) $\frac{25 - 10x + x^2}{(5-x)^2} = \frac{-(-x+5)^2}{(5-x)^2} = -1$

39 Basándote en las identidades notables factoriza las siguientes expresiones:

a) $a^2 + 2ax + x^2$

b) $4a^2 + 4a + 1$

c) $81 - 4x^2$

d) $9 - 6y + y^2$

a) $(a+x)^2$

b) $(2a+1)^2$

c) $(9-2x) \cdot (9+2x)$

d) $(y-3)^2$

40 Opera teniendo en cuenta las identidades notables:

a) $\frac{49a^2 - 25}{8a - a + 5} + 5a$

b) $\frac{(64 - 16xy + x^2y^2) \cdot (8 - xy)}{(8 - xy)^3}$

a) $\frac{49a^2 - 25}{8a - a + 5} + 5a = \frac{(7a+5) \cdot (7a-5)}{7a+5} + 5a =$
 $= 7a - 5 + 5a = 12a - 5$

b) $\frac{(64 - 16xy + x^2y^2) \cdot (8 - xy)}{(8 - xy)^3} = \frac{(8 - xy)^2 \cdot (8 - xy)}{(8 - xy)^3} = 1$

EJERCICIOS

1 Indica si las siguientes igualdades entre expresiones algebraicas son identidades o ecuaciones:

- a) $x + 2 = 7$ b) $0x = 0$
 c) $6x = 48$ d) $5x = 12x - 7x$
 e) $2x + 6 = 2(x + 3)$ f) $x^2 = 25$
 g) $x + 6 = 2x$ h) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Identidades: b, d, e, h. Ecuaciones: a, c, f, g.

2 Pon un ejemplo en cada uno de los siguientes casos:

- a) Una ecuación de primer grado con una incógnita.
 b) Una ecuación de segundo grado con una incógnita.
 c) Una identidad.
 d) Una ecuación incompatible.

- a) $3x = 2$ b) $x^2 - 9 = 0$
 c) $(x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$ d) $x + 2 = x + 3$

3 Copia en tu cuaderno y une entre sí las ecuaciones que son equivalentes:

$x + 5 = 10$	$x - 10 = -15$
$2x - 8 = 12$	$x + 10 = 20$
$-5x = 25$	$5x - 3x - 1 = 5$
$3x - 4 = 5$	$2x + 4 = 14$

4 Indica qué cálculos haces para obtener la ecuación equivalente de la ecuación inicial:

a) Ecuación inicial: $2x + 10 = 26$.

Ecuación equivalente: $x + 5 = 13$.

b) Ecuación inicial: $5x - 10 = 15$.

Ecuación equivalente: $5x - 3 = 22$.

- a) Dividir entre 2 los dos miembros.
 b) Sumar 7 a los dos miembros.

5 Resuelve las ecuaciones:

- a) $2x + 7 = 5x - 5$ b) $6x + 5 = -5 + 4x$
 c) $5(2x + 4) + 10 = 5x$ d) $2(x - 3) = 5(x - 2) + 4$
 e) $4(2 - x) + 10 = 2(1 - x)$ f) $x - 2(x - 4) = 3(4x - 10)$

- a) $2x + 7 = 5x - 5$
 $2x - 5x = -5 - 7$
 $-3x = -12$
 $x = 4$
 c) $5(2x + 4) + 10 = 5x$
 $10x + 20 + 10 = 5x$
 $10x - 5x = -20 - 10$
 $5x = -30$
 $x = -6$
 b) $6x + 5 = -5 + 4x$
 $6x - 4x = -5 - 5$
 $2x = -10$
 $x = -5$
 d) $2(x - 3) = 5(x - 2) + 4$
 $2x - 6 = 5x - 10 + 4$
 $2x - 5x = -10 + 4 + 6$
 $-3x = 0$
 $x = 0$

- e) $4(2 - x) + 10 = 2(1 - x)$
 $8 - 4x + 10 = 2 - 2x$
 $-4x + 2x = 2 - 8 - 10$
 $-2x = -16$
 $x = 8$
 f) $x - 2(x - 4) = 3(4x - 10)$
 $x - 2x + 8 = 12x - 30$
 $x - 2x - 12x = -30 - 8$
 $-13x = -38$
 $x = \frac{38}{13}$

6 Resuelve estas ecuaciones:

- a) $\frac{x}{6} = x + 5$ b) $\frac{5x + 3}{9} = \frac{3x - 5}{2}$

c) $\frac{2(x + 5)}{5} - 3(x + 4) = \frac{-x}{10}$

a) $\frac{x}{6} = x + 5 \Leftrightarrow x = 6x + 30 \Leftrightarrow x - 6x = 30 \Leftrightarrow -5x = 30 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -6$

b) $\frac{5x + 3}{9} = \frac{3x - 5}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot (5x + 3) = 9 \cdot (3x - 5) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 10x + 6 = 27x - 45 \Leftrightarrow 10x - 27x = -45 - 6 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -17x = -51 \Leftrightarrow x = \frac{-51}{-17} \Leftrightarrow x = 3$

c) $\frac{2(x + 5)}{5} - 3(x + 4) = \frac{-x}{10} \Leftrightarrow \frac{2x + 10}{5} - 3x - 12 = \frac{-x}{10} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{2 \cdot (2x + 10)}{10} - \frac{30x}{10} - \frac{120}{10} = \frac{-x}{10} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4x + 20 - 30x - 120 = -x \Leftrightarrow 4x - 30x + x = -20 + 120 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -25x = 100 \Leftrightarrow x = -\frac{100}{25} \Leftrightarrow x = -4$

7 Indica cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado con una incógnita:

- a) $x + 2y = 5$ b) $x^2 - 7x = 16$
 c) $x^2 + y = 12$ d) $x^2 - 16 = 0$
 e) $x^2 = 3x$ f) $2x + 5 = 3x - 2$

b), d), e).

8 Resuelve las ecuaciones de segundo grado con una incógnita:

- a) $x^2 = 25$ b) $x^2 - 16 = 0$
 c) $2x^2 - 128 = 0$ d) $x^2 - 5x = 0$
 e) $2x^2 + 4x = 0$ f) $3x^2 - 6x = 0$

- a) $x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \sqrt{25} \Leftrightarrow x = \pm 5$
 b) $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt{16} \Leftrightarrow x = \pm 4$
 c) $2x^2 - 128 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 128 \Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt{64} \Leftrightarrow x = \pm 8$
 d) $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 5$
 e) $2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -2$
 f) $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$

9 En la clase de 2.º A el número de chicos es el doble que el de chicas. Si la clase tiene 30 alumnos en total, ¿cuántos chicos y chicas hay en la clase?

Sea x el número de chicas:

$$x + 2x = 30 \Leftrightarrow 3x = 30 \Leftrightarrow x = 10$$

Hay 10 chicas y 20 chicos.

10 Un jardín tiene forma rectangular y es el doble de largo que de ancho. Si la superficie total del jardín es de 98 m^2 , ¿cuáles son las dimensiones del jardín?

Sea x los metros del ancho:

$$x \cdot 2x = 98 \Leftrightarrow 2x^2 = 98 \Leftrightarrow x = 7$$

Mide 7 m de ancho y 14 m de largo.

11 Copia en tu cuaderno y asocia cada sistema de ecuaciones con su solución:

$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$	$\swarrow$	$x = 6, y = 2$
$\begin{cases} 10x + y = 5 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$	$\searrow$	$x = 1, y = 0$
$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$	$\swarrow$	$x = 1, y = -5$

12 Construye un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que tenga por solución $x = 1$, $y = 5$.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$$

13 Benjamín ha comprado tres camisas y dos corbatas y ha pagado en total por la compra 140 €. Si el precio de una camisa y una corbata es 55 €, plantea el sistema de ecuaciones que permite calcular el precio de una camisa y el precio de una corbata.

Sea x el precio de una camisa y y el precio de una corbata,

entonces: $\begin{cases} 3x + 2y = 140 \\ x + y = 55 \end{cases}$

14 Resuelve por el método de sustitución estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y = -10 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$

Se despeja x en la segunda ecuación: $x = 3y - 1$.

Se sustituye el valor de x en la primera ecuación:

$$2(3y - 1) - 5y = -1$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$2(3y - 1) - 5y = -1 \Leftrightarrow 6y - 2 - 5y = -1 \Leftrightarrow y = 1$$

Una vez calculado el valor de y , se obtiene el valor de x sustituyendo en la expresión: $x = 3y - 1$.

$$x = 3 \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow x = 2$$

b) $\begin{cases} 4x + y = -10 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$

Se despeja x en la segunda ecuación: $x = \frac{-12 + 3y}{2}$

Se sustituye el valor de x en la primera ecuación:

$$4 \cdot \frac{-12 + 3y}{2} + y = -10$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$4 \cdot \frac{-12 + 3y}{2} + y = -10 \Leftrightarrow 2(-12 + 3y) + y = -10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -24 + 6y + y = -10 \Leftrightarrow -24 + 7y = -10 \Leftrightarrow y = 2$$

Una vez calculado el valor de y , se obtiene el valor de x sustituyendo en la expresión: $x = \frac{-12 + 3y}{2}$.

$$x = \frac{-12 + 3 \cdot 2y}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-12 + 6}{2} \Leftrightarrow x = -3$$

c) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$

Se despeja x en la primera ecuación: $x = -3y - 2$.

Se sustituye el valor de x en la segunda ecuación:

$$4(-3y - 2) - 3y = 7$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$4(-3y - 2) - 3y = 7 \Leftrightarrow -12y - 8 - 3y = 7 \Leftrightarrow y = -1$$

Una vez calculado el valor de y , se obtiene el valor de x sustituyendo en la expresión: $x = -3y - 2$.

$$x = -3 \cdot (-1) - 2 \Leftrightarrow x = 1$$

d) $\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$

Se despeja x en la primera ecuación: $x = \frac{8 - 2y}{5}$

Se sustituye el valor de x en la segunda ecuación:

$$3 \cdot \frac{8 - 2y}{5} - 2y = -8$$

6 ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

<http://www.McGraw-Hill.es>

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$3 \cdot \frac{8-2y}{5} - 2y = -8 \Leftrightarrow \frac{24-6y}{5} - 2y = -8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 24 - 6y - 10y = -40 \Leftrightarrow -16y = -64 \Leftrightarrow y = 4$$

Una vez calculado el valor de y , se obtiene el valor de x sustituyendo en la expresión: $x = \frac{8-2y}{5}$

$$x = \frac{8-2 \cdot 4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{8-8}{5} \Leftrightarrow x = 0$$

15 Resuelve por el método de igualación los sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = -11 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x - 2y = -18 \\ -x + 6y = 32 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 3y = -2 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = -11 \end{cases}$$

Se despeja la incógnita x en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{2-2y}{4} \quad x = \frac{-11+3y}{2}$$

Se igualan las dos expresiones de x :

$$\frac{2-2y}{4} = \frac{-11+3y}{2}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\frac{2 \cdot (2-2y)}{4 \cdot 2} = \frac{4 \cdot (-11+3y)}{2 \cdot 4} \Leftrightarrow 4 - 4y = -44 + 12y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4y - 12y = -44 - 4 \Leftrightarrow -16y = -48 \Leftrightarrow y = 3$$

El valor correspondiente a x se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo

$$\text{en: } x = \frac{2-2y}{4} \\ x = \frac{2-2 \cdot 3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2-6}{4} \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x - 2y = -18 \\ -x + 6y = 32 \end{cases}$$

Se despeja la incógnita x en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{-18+2y}{4} \quad x = \frac{32-6y}{-1}$$

Se igualan las dos expresiones de x :

$$\frac{-18+2y}{4} = \frac{32-6y}{-1}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\frac{-1 \cdot (-18+2y)}{4 \cdot (-1)} = \frac{4 \cdot (32-6y)}{-1 \cdot 4} \Leftrightarrow 18 - 2y = 128 - 24y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2y + 24y = 128 - 18 \Leftrightarrow 22y = 110 \Leftrightarrow y = 5$$

El valor correspondiente a x se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo

$$\text{en: } x = \frac{-18+2y}{4} \\ x = \frac{-18+2 \cdot 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-18+10}{4} \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 3y = -2 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$$

Se despeja la incógnita x en las dos ecuaciones:

$$x = -2 - 3y \quad x = \frac{7+3y}{4}$$

Se igualan las dos expresiones de x :

$$-2 - 3y = \frac{7+3y}{4}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$-2 - 3y = \frac{7+3y}{4} \Leftrightarrow -8 - 12y = 7 + 3y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -12y - 3y = 7 + 8 \Leftrightarrow -15y = 15 \Leftrightarrow y = -1$$

El valor correspondiente a x se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo

$$\text{en: } x = -2 - 3y \\ x = -2 - 3 \cdot (-1) \Leftrightarrow x = -2 + 3 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{d) } \begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$$

Se despeja la incógnita x en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{8-2y}{5} \quad x = \frac{-8+2y}{3}$$

Se igualan las dos expresiones de x :

$$\frac{8-2y}{5} = \frac{-8+2y}{3}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\frac{8-2y}{5} = \frac{-8+2y}{3} \Leftrightarrow \frac{3 \cdot (8-2y)}{5 \cdot 3} = \frac{5 \cdot (-8+2y)}{3 \cdot 5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 24 - 6y = -40 + 10y \Leftrightarrow -6y - 10y = -40 - 24 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -16y = -64 \Leftrightarrow y = 4$$

El valor correspondiente a x se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo

$$\text{en: } x = \frac{8-2y}{5} \\ x = \frac{8-2 \cdot 4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{8-8}{5} \Leftrightarrow x = 0$$

16 Resuelve por el método de reducción los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 5x + 3y = -1 \\ -x - 4y = 7 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} -x + 2y = 8 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 6 \\ x - 4y = -12 \end{array} \right\} \quad \text{d) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = -1 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 5x + 3y = -1 \\ -x - 4y = 7 \end{array} \right\}$$

Si se quiere eliminar la incógnita x , los coeficientes de x en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la segunda ecuación por 5.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y = -1 \\ -5x - 20y = 35 \end{array} \right\}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = -1 \\ -5x - 20y = 35 \\ \hline -17y = 34 \end{array}$$

y se obtiene el sistema: $\left. \begin{array}{l} 5x + 3y = -1 \\ -17y = 34 \end{array} \right\}$

Se despeja y en la segunda ecuación: $y = -2$

Para calcular x se sustituye el valor obtenido de y en la primera ecuación:

$$5x + 3y = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1 - 3y}{5} \Leftrightarrow x = \frac{-1 - 3 \cdot (-2)}{5} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} -x + 2y = 8 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right\}$$

Si se quiere eliminar la incógnita x , los coeficientes de x en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la primera ecuación por 2.

$$\left. \begin{array}{l} -2x + 4y = 16 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right\}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -2x + 4y = 16 \\ 2x - y = 2 \\ \hline 3y = 18 \end{array}$$

y se obtiene el sistema: $\left. \begin{array}{l} -2x + 4y = 16 \\ 3y = 18 \end{array} \right\}$

Se despeja y en la segunda ecuación: $y = 6$

Para calcular x se sustituye el valor obtenido de y en la primera ecuación:

$$-2x + 4y = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16 - 4y}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{16 - 4 \cdot 6}{-2} \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 6 \\ x - 4y = -12 \end{array} \right\}$$

Si se quiere eliminar la incógnita y , los coeficientes de y en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la primera ecuación por 2.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 4y = 12 \\ x - 4y = -12 \end{array} \right\}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 6x + 4y = 12 \\ x - 4y = -12 \\ \hline 7x = 0 \end{array}$$

y se obtiene el sistema: $\left. \begin{array}{l} 6x + 4y = 12 \\ 7x = 0 \end{array} \right\}$

Se despeja x en la segunda ecuación: $x = 0$

Para calcular y se sustituye el valor obtenido de x en la primera ecuación:

$$6x + 4y = 12 \Leftrightarrow y = \frac{12 - 6x}{4} \Leftrightarrow y = \frac{12 - 6 \cdot 0}{4} \Leftrightarrow y = 3$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = -1 \end{array} \right\}$$

Si se quiere eliminar la incógnita y , los coeficientes de y en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por 3:

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 6y = 16 \\ 9x + 6y = -3 \end{array} \right\}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 4x - 6y = 16 \\ 9x + 6y = -3 \\ \hline 13x = 13 \end{array}$$

y se obtiene el sistema: $\left. \begin{array}{l} 4x - 6y = 16 \\ 13x = 13 \end{array} \right\}$

Se despeja x en la segunda ecuación: $x = 1$

Para calcular y se sustituye el valor obtenido de x en la primera ecuación:

$$4x - 6y = 16 \Leftrightarrow y = \frac{16 - 4x}{-6} \Leftrightarrow y = \frac{16 - 4 \cdot 1}{-6} \Leftrightarrow y = -2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

ECUACIÓN E IDENTIDAD

1 Indica si las siguientes igualdades entre expresiones algebraicas son identidades o ecuaciones:

- a) $2x + 5 = 11$ b) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$
 c) $7x = -4x + 11x$ d) $4x + 12 = 2(2x + 6)$
 e) $x^2 = 49$ f) $7x + 2 = 4x + 14$

Ecuaciones: a), e), f).

Identidades: b), c), d).

2 Resuelve mentalmente las ecuaciones:

- a) $x + 7 = 12$ b) $24x = 120$
 c) $4y - 4 = 12$ d) $x + 6 = 2x$
 a) 5 b) 5 c) 4 d) 6

3 Resuelve mentalmente las ecuaciones:

- a) $x + 9 = 15$ b) $2x = 24$
 c) $5y - 4 = 16$ d) $2x - 14 = 4$
 a) 6 b) 12 c) 4 d) 9

4 Identifica qué tipo de ecuación son las siguientes:

- a) $2x + 7 = x - 5$ b) $x^2 + 7x = 6$
 c) $x + y = 12$ d) $y - 11 = 2(y - 3)$
 e) $y^2 = 36$

- a) Primer grado con una incógnita.
 b) Segundo grado con una incógnita.
 c) Primer grado con dos incógnitas.
 d) Primer grado con una incógnita.
 e) Segundo grado con una incógnita.

ECUACIONES EQUIVALENTES

5 Escribe tres ecuaciones de primer grado con una incógnita que tengan como solución $x = 5$.

- a) $x - 5 = 0$ b) $2 \cdot x - 3 = x + 2$ c) $2 \cdot x = 10$

6 Escribe tres ecuaciones de primer grado con una incógnita que tengan como solución $x = 0$.

- a) $2x - 3 = x - 3$ b) $10 \cdot x = 0$ c) $x + 7 = 7$

7 Escribe tres ecuaciones de primer grado con una incógnita que no tengan solución.

- a) $2 + x = 3 + x$ b) $2 \cdot (x - 3) = 2x + 4$

c) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(x + 1)$

8 Copia en tu cuaderno y relaciona las ecuaciones equivalentes:

$2x - 4 = 0$	$\rightarrow$	$2x + 9 = 7$
$x + 5 = 10$	$\rightarrow$	$3x - 6 = 0$
$-x + 6 = 7$	$\rightarrow$	$x - 3 = 2$
$3x - 2 = 10$	$\rightarrow$	$x + 1 = 7$
$2x - 5 = 7$	$\rightarrow$	$x + 3 = 7$

9 Indica qué cálculo tienes que realizar para obtener la ecuación equivalente a la ecuación inicial:

a) Ecuación inicial: $4x - 10 = 26 + x$

Ecuación equivalente: $3x = 36$

b) Ecuación inicial: $7x + 14 = 63$

Ecuación equivalente: $7x - 3 = 46$

c) Ecuación inicial: $2x = 10$

Ecuación equivalente: $4x - 5 = 15$

- a) Sumar 10 y restar x a los dos miembros.
 b) Restar 17 a los dos miembros.
 c) Multiplicar por 2 y restar 5 a los dos miembros.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

10 Resuelve las ecuaciones:

- a) $6x + 2 = 7x - 1$ b) $5x - 3 = 3x + 7$
 c) $-2x + 5 = 4x + 11$ d) $2x + 4 = 6x - 3$

- a) $6x + 2 = 7x - 1 \Leftrightarrow 6x - 7x = -1 - 2 \Leftrightarrow -x = -3 \Leftrightarrow x = 3$
 b) $5x - 3 = 3x + 7 \Leftrightarrow 5x - 3x = 7 + 3 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$
 c) $-2x + 5 = 4x + 11 \Leftrightarrow -4x - 2x = 11 - 5 \Leftrightarrow -6x = 6 \Leftrightarrow x = -1$
 d) $2x + 4 = 6x - 3 \Leftrightarrow 2x - 6x = -3 - 4 \Leftrightarrow -4x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$

11 Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $2(x + 5) = 3x - 2$
 b) $-3(2x - 4) = -2(4x - 3)$
 c) $2(x - 6) + 7 = 4x - 17$
 d) $5(x + 4) - (x + 3) = 2x - 3$
 a) $2(x + 5) = 3x - 2 \Leftrightarrow 2x + 10 = 3x - 2 \Leftrightarrow 2x - 3x = -2 - 10 \Leftrightarrow -x = -12 \Leftrightarrow x = 12$
 b) $-3(2x - 4) = -2(4x - 3) \Leftrightarrow -6x + 12 = -8x + 6 \Leftrightarrow -6x + 8x = 6 - 12 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$
 c) $2(x - 6) + 7 = 4x - 17 \Leftrightarrow 2x - 12 + 7 = 4x - 17 \Leftrightarrow 2x - 4x = -17 - 7 + 12 \Leftrightarrow -2x = -12 \Leftrightarrow x = 6$
 d) $5(x + 4) - (x + 3) = 2x - 3 \Leftrightarrow 5x + 20 - x - 3 = 2x - 3 \Leftrightarrow 5x - x - 2x = -3 - 20 + 3 \Leftrightarrow 2x = -20 \Leftrightarrow x = -10$

12 Resuelve las ecuaciones:

a) $4(x - 6) + 4 = 2x - 4$

b) $2 - 6x = 5x - 10x$

c) $7x - 1 = -5x + 5$

d) $x - 5 + 9(2 - x) = 3(-4 - x)$

e) $2(x - 4) - 3(x + 5) = 5(x - 1)$

f) $11(x - 1) - 5(x + 1) = 2(x + 14)$

g) $7(3x + 5) - 10x + 9 = 0$

a) $4(x - 6) + 4 = 2x - 4 \Leftrightarrow 4x - 24 + 4 = 2x - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x - 2x = -4 + 24 - 4 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$

b) $2 - 6x = 5x - 10x \Leftrightarrow -6x + 5x = -2 \Leftrightarrow x = 2$

c) $7x - 1 = -5x + 5 \Leftrightarrow 7x + 5x = 5 + 1 \Leftrightarrow 12x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $x - 5 + 9(2 - x) = 3(-4 - x) \Leftrightarrow -5 + 18 - 9x = -12 - 3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -9x + 3x = -12 + 5 - 18 \Leftrightarrow -6x = -25 \Leftrightarrow x = \frac{25}{6}$

e) $2(x - 4) - 3(x + 5) = 5(x - 1) \Leftrightarrow 2x - 8 - 3x - 15 = 5x - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 3x - 5x = -5 + 8 + 15 \Leftrightarrow -6x = 18 \Leftrightarrow x = -3$

f) $11(x - 1) - 5(x + 1) = 2(x + 14) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11x - 11 - 5x - 5 = 2x + 28 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11x - 5x - 2x = 28 + 11 + 5 \Leftrightarrow 4x = 44 \Leftrightarrow x = 11$

g) $7(3x + 5) - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow 21x + 35 - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 21x - 10x = -35 - 9 \Leftrightarrow 11x = -44 \Leftrightarrow x = -4$

13 Resuelve la ecuación: $2x + 3 = 2(x + 3)$

¿Cuántas soluciones tiene?

$2x + 3 = 2(x + 3) \Leftrightarrow 2x + 3 = 2x + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 2x = 6 - 3 \Leftrightarrow 0x = 3$

No tiene solución.

14 Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{x}{2} + 5 = 2(x - 2)$

b) $6x + 3 = \frac{7x + 4}{4} + 2$

c) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = x - 5$

d) $2x + 1 = -3\left(\frac{x}{9} + 2\right)$

e) $\frac{x}{2} + 5 = 2(x - 3) + 2$

f) $\frac{x}{4} + \frac{x}{2} - 6 = 3(x - 8)$

a) $\frac{x}{2} + 5 = 2(x - 2) \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 5 = 2x - 4 \Leftrightarrow x + 10 = 4x - 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 4x = -8 - 10 \Leftrightarrow -3x = -18 \Leftrightarrow x = 6$

b) $6x + 3 = \frac{7x + 4}{4} + 2 \Leftrightarrow 24x + 12 = 7x + 4 + 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24x - 7x = 12 - 12 \Leftrightarrow 17x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = x - 5 \Leftrightarrow \frac{4x}{12} + \frac{6x}{12} - \frac{3x}{12} = \frac{12x - 60}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x + 6x - 3x = 12x - 60 \Leftrightarrow -5x = -60 \Leftrightarrow x = 12$

d) $2x + 1 = -3\left(\frac{x}{9} + 2\right) \Leftrightarrow 18x + 9 = -3x - 54 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18x + 3x = -54 - 9 \Leftrightarrow 21x = -63 \Leftrightarrow x = \frac{-63}{21} = -3$

e) $\frac{x}{2} + 5 = 2(x - 3) + 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 5 = 2x - 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 10 = 4x - 12 \Leftrightarrow x - 4x = -12 - 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x = -22 \Leftrightarrow x = \frac{22}{3}$

f) $\frac{x}{4} + \frac{x}{2} - 6 = 3(x - 8) \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{x}{2} - 6 = 3x - 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 2x - 24 = 12x - 96 \Leftrightarrow -13x = -72 \Leftrightarrow x = \frac{72}{13}$

15 Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{x}{7} = 2x$

b) $\frac{x + 4}{5} = \frac{15x - 4}{11}$

c) $2x + 4 = \frac{6x + 12}{4} + \frac{1}{2}$

d) $\frac{3x + 5}{2} + 4 = \frac{2x - 1}{3} - 6$

e) $\frac{2x - 1}{3} - \frac{13}{6} = \frac{2(x - 2)}{4}$

a) $\frac{x}{7} = 2x \Leftrightarrow x = 14x \Leftrightarrow x - 14x = 0 \Leftrightarrow -13x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $\frac{x + 4}{5} = \frac{15x - 4}{11} \Leftrightarrow \frac{11 \cdot (x + 4)}{5 \cdot 11} = \frac{5 \cdot (15x - 4)}{11 \cdot 5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11x + 44 = 75x - 20 \Leftrightarrow 11x - 75x = -20 - 44 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -64x = -64 \Leftrightarrow x = 1$

c) $2x + 4 = \frac{6x + 12}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 \cdot (2x + 4) = 6x + 12 + 1 \cdot 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x + 16 = 6x + 12 + 2 \Leftrightarrow 8x - 6x = 14 - 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$

d) $\frac{3x + 5}{2} + 4 = \frac{2x - 1}{3} - 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot (3x + 5) + 6 \cdot 4 = 2 \cdot (2x - 1) - 6 \cdot 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9x + 15 + 24 = 4x - 2 - 36 \Leftrightarrow 9x - 4x = -38 - 15 - 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x = -77 \Leftrightarrow x = -\frac{77}{5}$

e) $\frac{2x - 1}{3} - \frac{13}{6} = \frac{2(x - 2)}{4} \Leftrightarrow 4(2x - 1) - 2 \cdot 13 = 6 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x - 4 - 26 = 6x - 12 \Leftrightarrow 8x - 6x = -12 + 30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 18 \Leftrightarrow x = 9$

16 Halla la solución de estas ecuaciones:

a) $\frac{5(x+2)}{2} + 5 = 2(3x+1) - 8$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x+1}{2} = 2(-x+4) + 4x$

c) $\frac{x}{5} - \frac{3(x-1)}{2} = 2 + \frac{x}{3}$

d) $\frac{5(x-1)}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 10$

e) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} - 1 = \frac{17}{30}$

a) $\frac{5(x+2)}{2} + 5 = 2(3x+1) - 8 \Leftrightarrow \frac{5x+10}{2} + 5 = 6x+2-8 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5x+10+10 = 12x+4-16 \Leftrightarrow 5x-12x = -12-20 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -7x = -32 \Leftrightarrow x = \frac{32}{7}$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x+1}{2} = 2(-x+4) + 4x \Leftrightarrow \frac{x}{3} + \frac{x+1}{2} = -2x+8+4x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x+3x+3 = -12x+48+24x \Leftrightarrow 5x-12x = 48-3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -7x = 45 \Leftrightarrow x = -\frac{45}{7}$

c) $\frac{x}{5} - \frac{3(x-1)}{2} = 2 + \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{5} - \frac{3x-3}{2} = 2 + \frac{x}{3} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 6x-45x+45 = 60+10x \Leftrightarrow -39x-10x = 60-45 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -49x = 15 \Leftrightarrow x = -\frac{15}{49}$

d) $\frac{5(x-1)}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 10 \Leftrightarrow \frac{5x-5}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 10 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 6 \cdot (5x-5) + 3x+4x = 120 \Leftrightarrow 30x-30+7x = 120 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 30x+7x = 120+30 \Leftrightarrow 37x = 150 \Leftrightarrow x = \frac{150}{37}$

e) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} - 1 = \frac{17}{30} \Leftrightarrow 20x+15x+12x-60 = 34 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 47x = 94 \Leftrightarrow x = 2$

**ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO
CON UNA INCÓGNITA****17** Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $(x+1)(x-1) = 0$

b) $x^2 - 100 = 0$

c) $x(x-5) = 0$

d) $(x+1)^2 = 9$

a) $(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

b) $x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 10$

c) $x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 5$

d) $(x+1)^2 = 9 \Leftrightarrow x = 2; x = -4$

18 Resuelve las ecuaciones:

a) $x^2 = 16$

b) $x^2 - 64 = 0$

c) $3x^2 - 243 = 0$

d) $4x^2 - 30 = 34$

e) $x^2 - 40 = 81$

f) $x^2 + 4x = 0$

g) $4x^2 + 16x = 0$

h) $2x^2 - 6x = 4x$

i) $3x^2 - 1 = 2$

j) $3x^2 - 6x = 3x$

k) $x^2 - 10 = 39$

l) $-x^2 - 7x = 0$

a) $x = \pm 4$

b) $x = \pm 8$

c) $x = \pm 9$

d) $x = \pm 4$

e) $x = \pm 11$

f) $x = 0; x = -4$

g) $x = 0; x = -4$

h) $x = 0; x = 5$

i) $x = \pm 1$

j) $x = 0; x = 3$

k) $x = \pm 7$

l) $x = 0; x = -7$

19 Escribe una ecuación de segundo grado que:

a) Tenga dos soluciones.

b) No tenga solución.

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $x^2 + 9 = 0$

20 Calcula el valor de b en la ecuación $x^2 + bx = 0$, sabiendo que sus soluciones son $x = 0$ y $x = -4$.Si sólo tiene la solución $x = 0$, ¿cuánto vale b ?Sustituimos los valores de x en la ecuación:

$$0 + 0b = 0$$

$$(-4)^2 + b(-4) = 0 \Leftrightarrow 16 = 4b \Leftrightarrow b = 4$$

Si $x = 0$, $b = 0$.**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS****21** Determina dos números naturales consecutivos cuya suma sea 161.Resolvemos la ecuación $x + x + 1 = 161$.

Los números son el 80 y el 81.

22 Calcula el lado de un triángulo equilátero de 90 cm de perímetro.Resolvemos la ecuación $3 \cdot x = 90$. El lado es 30 cm.**23** Calcula la medida de los ángulos de un triángulo sabiendo que $\hat{A} = x$, $\hat{B} = x + 50^\circ$ y $\hat{C} = x + 40^\circ$.Resolvemos la ecuación $x + x + 50 + x + 40 = 180$.Entonces, $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 80^\circ$ y $\hat{C} = 70^\circ$.**24** Una piscina tiene 20 m de largo y 10 m de ancho. Si el volumen de la piscina es 440 m³, calcula la profundidad.Resolvemos la ecuación $20 \cdot 10 \cdot x = 440$. Su profundidad es 2,2 m.

25 Un campo está vallado con postes separados entre sí 5 m. Si la puerta de entrada mide 10 m y el perímetro del campo es 465 m, ¿cuántos postes tiene la valla?

Resolvemos la ecuación $5 \cdot x + 10 = 465$. La valla tiene 91 postes.

26 Determina tres números pares consecutivos cuya suma sea 18.

Resolvemos la ecuación $x + (x + 2) + (x + 4) = 18$. Los números son 4, 6 y 8.

27 Ana María tiene 120 € en su hucha. Si decide echar en la hucha 15 € cada semana, ¿cuántas semanas tardará en tener 270 € ahorrados?

Resolvemos la ecuación $120 + 15x = 270$. Tarda 10 semanas.

28 En un poliedro se cumple la fórmula de Euler:
CARAS + VÉRTICES = ARISTAS + 2

a) Si el poliedro tiene 8 caras y el número de aristas es el doble que el número de vértices, ¿cuántas aristas y vértices tiene?

b) Si es un poliedro regular, el número de vértices es 12 y el número de aristas es 30, ¿de qué poliedro se trata?

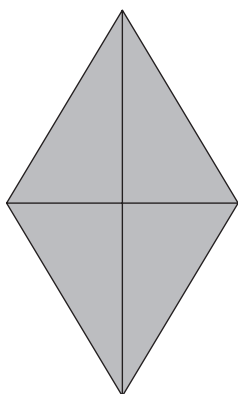
a) Llamamos x al número de vértices: $8 + x = 2x + 2$.

Tiene 12 aristas y 6 vértices.

b) Llamamos x al número de caras: $x + 12 = 30 + 2$.

Tiene 20 caras.

29 El área de un rombo es 30 cm^2 . Si la diagonal menor mide 6 cm, ¿cuál es la medida de la diagonal mayor?



Resolvemos la ecuación: $30 = \frac{x \cdot 6}{2} \Leftrightarrow x = 10 \text{ cm}$

30 La tercera parte de un jardín está sembrada de césped. Si 40 m^2 es la superficie de jardín que está sin césped, ¿cuál es la superficie total del jardín?

Si la tercera parte del jardín está sembrada, $\frac{2}{3}$ de jardín no está sembrado.

Resolvemos la ecuación: $\frac{2x}{3} = 40$. La superficie del jardín es 60 m^2 .

31 De un tonel se extrae la tercera parte de su contenido, y más tarde se extrae la mitad del resto. Si finalmente quedan 100 L, ¿cuál es la capacidad del tonel?

Sea x la capacidad del tonel. Resolvemos la ecuación:

$$x - \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x}{3} \right) = 100. \text{ La capacidad es de 300 litros.}$$

32 Los ahorros de tres hermanos suman 100 €. Si el hermano mayor tiene el doble de dinero ahorrado que el tercer hermano, y el segundo hermano tiene dos euros menos que el tercero, ¿cuál es la cantidad de dinero ahorrado que tiene cada uno?

Sea x el dinero que tiene el tercer hermano. Resolvemos la ecuación: $2x + (x - 2) + x = 100$. El mayor tiene 51 euros, el segundo 23,5 euros y el tercero 25,5 euros.

33 Si quiero comprar 8 chocolatinas me faltan dos euros, pero si compro 6 chocolatinas me sobran dos euros. ¿Cuál es el precio de una chocolatina?

Resolvemos la ecuación: $8x - 2 = 6x + 2$. El precio de una chocolatina es 2 euros.

34 Calcula un número que multiplicado por su tercera parte sea igual a 48.

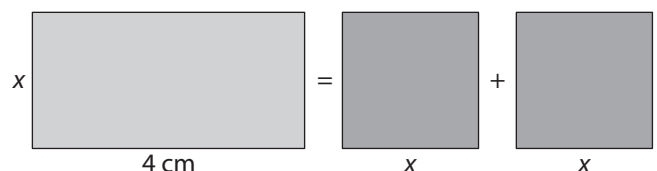
Resolvemos la ecuación: $x \cdot \frac{x}{3} = 48$. Hay dos números que satisfacen el enunciado del ejercicio, el 12 y el -12.

35 Un hexágono regular tiene una superficie de 63 cm^2 . Si su apotema mide 3 cm, calcula la medida del lado del hexágono.

Llamamos x al lado del hexágono. Resolvemos la ecuación:

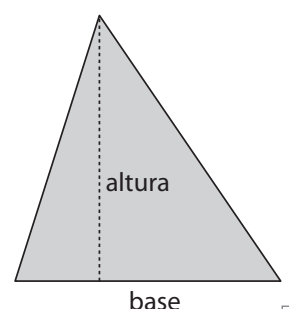
$$63 = \frac{6x \cdot 3}{2}. \text{ El lado mide 7 cm.}$$

36 ¿Cuánto mide el lado del cuadrado para que el área del rectángulo sea la suma de las áreas de los cuadrados?



Resolvemos la ecuación: $4x = x^2 + x^2$. El lado del cuadrado es de 2 cm.

37 Un triángulo, con la base igual que la altura, tiene un área de 32 m^2 . Calcula la longitud de la base.



Llamamos x a la base y la altura del triángulo. Resolvemos la ecuación: $32 = \frac{x \cdot x}{2}$. La base mide 8 m.

38  En un jardín se quiere construir un estanque circular de $78,5 \text{ m}^2$. ¿Cuál debe ser la medida del radio del estanque?

Resolvemos la ecuación: $\pi \cdot x^2 = 78,5$. El radio mide 4,99 m. (Si se toma $\pi = 3,14$, el radio sale 5.)

39  Una pared mide 3,75 m de largo por 2,40 m de alto y está alicatada con 400 azulejos cuadrados. ¿Cuál es la longitud del lado de los azulejos?

La superficie de cada azulejo es $3,75 \cdot 2,4 : 400 = 0,0225$. Resolvemos la ecuación: $x^2 = 0,0225$. El lado de cada azulejo mide 0,15 m o, lo que es lo mismo, 15 cm.

40  El área total de un cubo es 150 cm^2 . ¿Cuánto mide la arista del cubo?

Llamamos x al lado del cubo. Resolvemos la ecuación: $6x^2 = 150$. El lado del cubo es de 5 cm.

SISTEMAS DE ECUACIONES

41  Indica tres soluciones de la ecuación $2x + 4y = 12$.

a) $x = 0; y = 3$ b) $x = 6; y = 0$ c) $x = 2; y = 2$

42  Resuelve por el método de sustitución los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 6y = -10 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x + y = 5 \\ 3x - 2y = -10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x - y = -2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$

Se despeja x en la segunda ecuación: $x = \frac{1 + 3y}{5}$

Se sustituye el valor de x en la primera ecuación:

$$2 \cdot \frac{1 + 3y}{5} + y = 5$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$2 + 6y + 5y = 25 \Leftrightarrow 11y = 23 \Leftrightarrow y = \frac{23}{11}$$

Una vez calculado el valor de y , se obtiene el valor de x sustituyendo en la expresión: $x = \frac{1 + 3y}{5}$.

$$x = \frac{1 + 3 \cdot \frac{23}{11}}{5} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \frac{69}{11}}{5} \Leftrightarrow x = \frac{11 + 69}{55} \Leftrightarrow x = \frac{16}{11}$$

b) $\begin{cases} 2x + 6y = -10 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases}$

Se despeja x en la primera ecuación: $x = \frac{-10 - 6y}{2}$

Se sustituye el valor de x en la segunda ecuación:

$$3 \cdot \frac{-10 - 6y}{2} - 4y = 11$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$-30 - 18y - 8y = 22 \Leftrightarrow -26y = 52 \Leftrightarrow y = -\frac{52}{26} \Leftrightarrow y = -2$$

Una vez calculado el valor de y , se obtiene el valor de x

sustituyendo en la expresión: $x = \frac{-10 - 6y}{2}$.

$$x = \frac{-10 - 6y}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-10 - 6 \cdot (-2)}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

c) $\begin{cases} 7x + y = 5 \\ 3x - 2y = -10 \end{cases}$

Se despeja y en la primera ecuación: $y = 5 - 7x$

Se sustituye el valor de y en la segunda ecuación:

$$3x - 2 \cdot (5 - 7x) = -10$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$3x - 10 + 14x = -10 \Leftrightarrow 17x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Una vez calculado el valor de x , se obtiene el valor de y sustituyendo en la expresión: $y = 5 - 7x$.

$$y = 5 - 7 \cdot 0 \Leftrightarrow y = 5$$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x - y = -2 \end{cases}$

Se despeja x en la segunda ecuación: $x = -2 + y$

Se sustituye el valor de x en la primera ecuación:

$$2 \cdot (-2 + y) + 3y = 11$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$2 \cdot (-2 + y) + 3y = 11 \Leftrightarrow -4 + 2y + 3y = 11 \Leftrightarrow 5y = 15 \Leftrightarrow y = 3$$

Una vez calculado el valor de y , se obtiene el valor de x sustituyendo en la expresión: $x = -2 + y$.

$$x = -2 + 3 \Leftrightarrow x = 1$$

43  Utilizando el método de igualación, resuelve los sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} 2x + 5y = -6 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 12x - 2y = 14 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 7x + 12y = 1 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} 2x + 5y = -6 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$$

Se despeja la incógnita x en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{-6 - 5y}{2} \quad x = 8 + 3y$$

Se igualan las dos expresiones de x :

$$\frac{-6 - 5y}{2} = 8 + 3y$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\begin{aligned} \frac{-6 - 5y}{2} = 8 + 3y &\Leftrightarrow -6 - 5y = 16 + 6y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -11y = 22 \Leftrightarrow y = -2 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a x se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo en: $x = 8 + 3y$.

$$x = 8 + 3 \cdot (-2) \Leftrightarrow x = 8 - 6 \Leftrightarrow x = 2$$

b)
$$\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 12x - 2y = 14 \end{cases}$$

Se despeja la incógnita x en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{4 + 3y}{7} \quad x = \frac{14 + 2y}{12}$$

Se igualan las dos expresiones de x :

$$\frac{4 + 3y}{7} = \frac{14 + 2y}{12}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\begin{aligned} \frac{4 + 3y}{7} = \frac{14 + 2y}{12} &\Leftrightarrow 12 \cdot (4 + 3y) = 7 \cdot (14 + 2y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 48 + 36y = 98 + 14y \Leftrightarrow 22y = 50 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{50}{22} = \frac{25}{11} \end{aligned}$$

El valor correspondiente a x se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo en: $x = \frac{4 + 3y}{7}$.

$$x = \frac{4 + 3 \cdot \frac{25}{11}}{7} \Leftrightarrow x = \frac{4 + \frac{75}{11}}{7} \Leftrightarrow x = \frac{119}{77} = \frac{17}{11}$$

c)
$$\begin{cases} 7x + 12y = 1 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

Se despeja la incógnita x en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{1 - 12y}{7} \quad x = \frac{3y}{2}$$

Se igualan las dos expresiones de x :

$$\frac{1 - 12y}{7} = \frac{3y}{2}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\frac{1 - 12y}{7} = \frac{3y}{2} \Leftrightarrow 2 - 24y = 21y \Leftrightarrow -45y = -2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{45}$$

El valor correspondiente a x se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo

en: $x = \frac{3y}{2}$

$$x = \frac{3 \cdot \frac{2}{45}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

d)
$$\begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Se despeja la incógnita y en las dos ecuaciones:

$$y = \frac{1 - 6x}{-5} \quad y = \frac{5 - 2x}{3}$$

Se igualan las dos expresiones de y :

$$\frac{1 - 6x}{-5} = \frac{5 - 2x}{3}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\begin{aligned} \frac{1 - 6x}{-5} = \frac{5 - 2x}{3} &\Leftrightarrow 3 - 18x = -25 + 10x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -18x - 10x = -25 - 3 \Leftrightarrow -28x = -28 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a y se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo

en: $y = \frac{5 - 2x}{3}$.

$$y = \frac{5 - 2 \cdot 1}{3} \Leftrightarrow y = \frac{5 - 2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{3}{3} = 1$$

44  Resuelve por el método de reducción los sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -x + 2y = 9 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + 5y = -13 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$$

6 ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

<http://www.McGraw-Hill.es>

a)
$$\begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Si se quiere eliminar la incógnita x , los coeficientes de x en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la segunda ecuación por -7 :

$$\begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ -7x - 21y = -77 \end{cases}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ -7x - 21y = -77 \end{cases}$$

$$-19y = -76$$

y se obtiene el sistema:
$$\begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ -19y = -76 \end{cases}$$

Se despeja y en la segunda ecuación: $y = 4$

Para calcular x se sustituye el valor obtenido de y en la primera ecuación:

$$7x + 2y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 - 2y}{7} \Leftrightarrow x = \frac{1 - 2 \cdot 4}{7} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{7} = -1$$

b)
$$\begin{cases} -x + 2y = 9 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$$

Si se quiere eliminar la incógnita x , los coeficientes de x en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la primera ecuación por 2:

$$\begin{cases} -2x + 4y = 18 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} -2x + 4y = 18 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$$

$$y = 6$$

Para calcular x se sustituye el valor obtenido de y en la primera ecuación:

$$-x + 2y = 9 \Leftrightarrow x = -9 + 2y \Leftrightarrow x = -9 + 2 \cdot 6 \Leftrightarrow x = 3$$

c)
$$\begin{cases} 2x + 5y = -13 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$$

Si se quiere eliminar la incógnita y , los coeficientes de y en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por 5:

$$\begin{cases} 4x + 10y = -26 \\ 15x - 10y = 45 \end{cases}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + 10y = -26 \\ 15x - 10y = 45 \end{cases}$$

$$19x = 19$$

y se obtiene el sistema:
$$\begin{cases} 4x + 10y = -26 \\ 19x = 19 \end{cases}$$

Se despeja x en la segunda ecuación: $x = 1$

Para calcular y se sustituye el valor obtenido de x en la primera ecuación:

$$4x + 10y = -26 \Leftrightarrow y = \frac{-26 - 4x}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-26 - 4 \cdot 1}{10} \Leftrightarrow y = -3$$

d)
$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$$

Si se quiere eliminar la incógnita x , los coeficientes de x en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la segunda ecuación por -2 :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ -2x + 6y = 6 \end{cases}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ -2x + 6y = 6 \end{cases}$$

$$11y = 22$$

y se obtiene el sistema:
$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 11y = 22 \end{cases}$$

Se despeja y en la segunda ecuación: $y = 2$

Para calcular x se sustituye el valor obtenido de y en la primera ecuación:

$$2x + 5y = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16 - 5y}{2} \Leftrightarrow x = \frac{16 - 5 \cdot 2}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

45  **Plantea un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cuyas soluciones sean:**

a) $x = 0, y = -2$

b) $x = 3, y = 5$

c) $x = -1, y = -2$

Una solución:

a)
$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ x + 3y = -6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

46 ■■ En un hotel rural hay 14 camas repartidas en habitaciones dobles y triples. Escribe una ecuación que relacione el número de habitaciones dobles y triples del hotel y busca todas las soluciones posibles de la ecuación.

La ecuación es $14 = 2x + 3y$, donde x e y son el número de habitaciones dobles y triples, respectivamente. Las soluciones posibles son:

- a) $x = 1; y = 4$
- b) $x = 4; y = 2$

47 ■■ Si en el problema anterior el número total de habitaciones es 5, ¿cuántas habitaciones dobles y triples hay en el hotel?

Como $x + y = 5$, entonces hay 1 doble y 4 triples.

48 ■■ Juan tiene en su monedero 80 céntimos en monedas de 5 y 20 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene? Escribe la ecuación que relaciona estos datos y busca todas las soluciones posibles.

La ecuación es $80 = 5x + 20y$, donde x e y son el número de monedas de 5 y 20 céntimos, respectivamente. Las soluciones posibles son:

- a) $x = 4; y = 3$
- b) $x = 8; y = 2$
- c) $x = 12; y = 1$

49 ■■ Si en el problema anterior Juan lleva 10 monedas, ¿cuántas monedas de 5 y 20 céntimos tiene?

Como $x + y = 10$, entonces tiene 8 monedas de 5 céntimos y 2 monedas de 20 céntimos.

50 ■■ En una clase de 2.º de ESO hay 28 alumnos. Todos han participado en un concurso de redacción y a final de curso se les regala por su participación un libro a cada chica y dos cómics a cada chico. Si en total se han repartido 44 regalos, ¿cuántos chicos y chicas hay en la clase?

Sea x el número de chicas e y el número de chicos:

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ x + 2y = 44 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, hay 12 chicas y 16 chicos.

51 ■■ Un examen tiene 40 preguntas. Un alumno contestó correctamente a 22 preguntas. Si la calificación que obtuvo por el examen fue 48 puntos, ¿cuál es la puntuación de cada respuesta correcta o incorrecta?

Sea x la puntuación de las respuestas correctas, e y la puntuación de las respuestas incorrectas, la ecuación es:

$$22x + 18y = 48$$

Al ser una ecuación con dos incógnitas, despejamos la x y vemos las posibles soluciones.

$$x = \frac{48 - 18y}{22}$$

x puede tomar valores desde 1,2 hasta 2,18, e y toma valores desde 1,2 hasta 0.

Por tanto la solución es: Si $y = 1$, $x = 1,36$.

52 ■■ Calcula dos números naturales sabiendo que su suma es 15 y el doble del primero más el triple del segundo es 37.

$$\text{El sistema es: } \begin{cases} x + y = 15 \\ 2x + 3y = 37 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, $x = 8$, $y = 7$.

53 ■■ El perímetro de un rectángulo es 32 cm. Si mide 8 cm más de largo que de ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

$$\text{El sistema es: } \begin{cases} 2x + 2y = 32 \\ x = 8y \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, $x = \frac{128}{9}$ cm, $y = \frac{16}{9}$ cm.

54 ■■ En una pizzería se hacen dos tipos de pizzas: cuatro estaciones a 3,50 € la unidad, y marinera a 4 € cada una. Una tarde vendieron 35 pizzas y se recaudaron 132,50 €. ¿Cuántas pizzas se vendieron de cada clase?

Llamamos x a las pizzas cuatro estaciones e y a las pizzas marinera.

$$\text{El sistema es: } \begin{cases} x + y = 35 \\ 3,5x + 4y = 132,50 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema: $x = 15$, $y = 20$.

EJERCICIOS

- **1** Calcula el cuarto proporcional de 2, 8 y 12.

$$\frac{2}{8} = \frac{12}{48}$$

- **2** Halla el cuarto proporcional de 0,25; 0,75 y 1,50.

$$\frac{0,25}{0,75} = \frac{1,50}{4,50}$$

- **3** Determina la media geométrica de 5 y 9.

$$\frac{5}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{45}}{9}$$

- **4** Halla la media proporcional de $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{5}$.

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{10}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{10}}}{\frac{4}{5}}$$

- **5** Determina la media proporcional de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$.

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{15}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{15}}}{\frac{1}{5}}$$

- **6** Como $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ utiliza las propiedades 1 y 22 del margen para completar las proporciones:

a) $\frac{15}{6} = \frac{\quad}{2}$ b) $\frac{3}{6} = \frac{\quad}{2}$ c) $\frac{6}{4} = \frac{\quad}{8}$

a) $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{6}{4} = \frac{12}{8}$

- **7** A velocidad constante un automóvil consume 6 L de combustible en 100 km. ¿Cuántos litros consume en 35 km a la misma velocidad?

Por cada kilómetro consume $\frac{6}{100}$ litros, luego en 35 km consume $35 \cdot \frac{6}{100} = 2,1$ litros.

- **8** La rueda de una bicicleta recorre una distancia de 12,32 m cuando da 7 vueltas, ¿qué distancia recorre cuando la rueda da 3 vueltas? Si la bicicleta se desplazó 2,52 m, ¿cuántas vueltas ha dado la rueda?

En una vuelta recorre $\frac{12,32}{7} = 1,76$ metros, luego en 3 vueltas recorre $3 \cdot 1,76 = 5,28$ metros. Como recorre 1 metro cada $\frac{7}{12,32}$ vueltas, cuando recorre 2,52 metros ha dado $2,52 \cdot \frac{7}{12,32} = 1,43$ vueltas aproximadamente.

- **9** Si por jugar 3 partidas de bolos hay que pagar 10,5 €, ¿cuánto hay que pagar por jugar 5 partidas? ¿Cuál es el precio de dos partidas?

Por cada partida se paga $\frac{10,5}{3} = 3,5$ euros, por 5 se pagarán $5 \cdot 3,5 = 17,5$ € y el precio de dos partidas será $2 \cdot 3,5 = 7$ €.

- **10** Para hacer un pastel para cuatro personas se necesitan, entre otros ingredientes, 0,5 kg de harina y 0,75 L de leche. ¿Qué cantidad de harina y de leche es necesaria para hacer un pastel para nueve personas?

Si para 1 persona se necesitan $\frac{0,5}{4}$ kg de harina y $\frac{0,75}{4}$ litros de leche, para 9 personas se necesitan 1,125 kg de harina y 1,6875 litros de leche.

- **11** Completa la tabla sabiendo que las magnitudes A y B son inversamente proporcionales:

Magnitud A	4	8	12	24
Magnitud B	12	6	4	2

- **12** Si dos personas venden 150 décimos de lotería en 3 días, ¿en cuántos días venderán los 150 décimos cinco personas?

Una sola persona los vendería en $2 \cdot 3 = 6$ días, por lo que cinco personas los venderán en $\frac{6}{5} = 1,2$ días.

- **13** Un granjero tiene pienso para alimentar a 25 vacas durante 40 días. Si vende 10 vacas, ¿durante cuántos días podrá alimentar a las vacas restantes?

Si tuviera una sola vaca la podría alimentar durante $25 \cdot 40 = 1000$ días, luego si tiene 15 las podrá alimentar durante $\frac{1000}{15} = 66,6$ días, aproximadamente.

- **14** Si escribes 25 líneas en cada folio, un trabajo te ocupa 11 folios. Si tienes que hacer el trabajo en 12 folios, ¿cuántas líneas deberías escribir en cada folio?

Si lo escribiera en un folio tendría que escribir $25 \cdot 11 = 275$ líneas, si lo escribo en 12 folios tendré que escribir $\frac{275}{12} = 22,92$ líneas en cada folio, aproximadamente.

15 Si un niño consume 2,25 litros de leche al día, ¿cuántos litros de leche consume en el mes de noviem-bre?

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ día} \dots\dots\dots 2,25 \text{ litros} \\ 30 \text{ días} \dots\dots\dots x \text{ litros} \end{array} \right\} x = 30 \cdot 2,25 = 67,5 \text{ litros}$$

16 El perro guardián Silver se come a la semana 4 kg de pienso. ¿Qué cantidad de pienso consume en 63 días?

$$\left. \begin{array}{l} 7 \text{ días} \dots\dots\dots 4 \text{ kg} \\ 63 \text{ días} \dots\dots\dots x \text{ kg} \end{array} \right\} x = \frac{63 \cdot 4}{7} \Leftrightarrow x = 36$$

17 Si un baldosín tiene una superficie de 225 cm², ¿cuántos son necesarios para alicatar una pared rectangular que mide 3 m de alto y 6 m de largo?

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ baldosín} \dots\dots\dots 225 \text{ cm}^2 \\ x \text{ baldosines} \dots\dots\dots 180\,000 \text{ cm}^2 \end{array} \right\} x = \frac{180\,000}{225} = 800 \text{ bald.}$$

18 El precio de cinco fotocopias es 0,75 €. ¿Cuál es el precio de 35 fotocopias?

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ fotocopias} \dots\dots\dots 0,75 \text{ €} \\ 35 \text{ fotocopias} \dots\dots\dots x \text{ €} \end{array} \right\} x = \frac{35 \cdot 0,75}{5} = 5,25 \text{ €}$$

19 A la velocidad media de 110 km/h, un automóvil tarda 2,20 horas en recorrer la distancia entre dos poblaciones. ¿A qué velocidad media tiene que circular para recorrer la misma distancia en 2,5 horas?

$$\left. \begin{array}{l} 2,2 \text{ h} \dots\dots\dots 110 \text{ km/h} \\ 2,5 \text{ h} \dots\dots\dots x \end{array} \right\} x = \frac{2,2 \cdot 110}{2,5} = 96,8 \text{ km/h}$$

20 Tres grifos iguales tardan 15 horas en llenar un depósito de agua. ¿Cuánto tiempo tardarían en llenar el mismo depósito si sólo funcionaran dos grifos?

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ grifos} \dots\dots\dots 15 \text{ h} \\ 2 \text{ grifos} \dots\dots\dots x \end{array} \right\} x = \frac{3 \cdot 15}{2} = 22,5 \text{ horas}$$

21 Calcula el 3,5 %, el 20 %, el 75 % y el 0,5 % de 120.

- a) $120 \cdot 0,035 = 4,2$
- b) $120 \cdot 0,2 = 24$
- c) $120 \cdot 0,75 = 90$
- d) $120 \cdot 0,005 = 0,6$

22 Si se supone que el 65 % de las personas de una ciudad de 150 000 habitantes usan habitualmente el transporte público, ¿qué número de personas utiliza el transporte público un día cualquiera en esa ciudad?

$$150\,000 \cdot \frac{65}{100} = 97\,500 \text{ personas.}$$

23 Si el precio de un libro tiene una rebaja del 10 % y cuesta 25 €, ¿cuál es el precio del libro sin rebaja?

$$25 \cdot \frac{100}{90} = 27,777\dots \text{ euros.}$$

24 Si tres de cada cinco alumnos de tu clase aprobaron el último examen de matemáticas, ¿cuál es el porcentaje de alumnos que han aprobado esta asignatura?

$$\frac{3}{5} = 0,6. \text{ El porcentaje es del } 60 \%.$$

25 Tres amigos compran un décimo de lotería. El primer amigo aporta 5 €, el segundo 6 € y el tercero 9 €. Como el número ha resultado premiado con 100 000 €, deciden repartirse el premio proporcionalmente a las cantidades aportadas por cada uno. ¿Qué cantidad le corresponde a cada amigo?

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} = \frac{100\,000}{20}$$

$$x = 5\,000 \cdot 5 = 25\,000 \text{ €}$$

$$y = 5\,000 \cdot 6 = 30\,000 \text{ €}$$

$$z = 5\,000 \cdot 9 = 45\,000 \text{ €}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

RAZÓN Y PROPORCIÓN

1 ☐ Escribe tres razones equivalentes a:

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{0,25}{0,3}$

a) $\frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}$

b) $\frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}$

c) $\frac{25}{30}, \frac{2,5}{3}, \frac{250}{300}$

2 ☐ Escribe tres razones equivalentes a:

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{1,5}{2}$

a) $\frac{4}{10}, \frac{10}{25}, \frac{20}{50}$

b) $\frac{8}{6}, \frac{12}{9}, \frac{20}{15}$

c) $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}$

■ 3 ■ ☐ Calcula el valor de x en las proporciones:

a) $\frac{7}{14} = \frac{x}{6}$ b) $\frac{100}{x} = \frac{5}{6}$ c) $\frac{x}{9} = \frac{16}{12}$

- a) 3
b) 120
c) 12

■ 4 ■ ☐ Indica qué razones son proporcionales:

$$\frac{2}{5} \quad \frac{14}{35} \quad \frac{20}{50} \quad \frac{12}{18} \quad \frac{7}{20}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35} = \frac{20}{50}$$

■ 5 ■ ☐ Calcula el valor de x en las proporciones:

a) $\frac{3}{5} = \frac{x}{15}$ b) $\frac{10}{x} = \frac{15}{18}$ c) $\frac{x}{8} = \frac{13}{104}$

- a) 9 b) 12 c) 1

■ 6 ■ ☐ Indica qué razones son proporcionales:

$$\frac{2}{7} \quad \frac{28}{70} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{14}{35} \quad \frac{4}{10}$$

$$\frac{28}{70} = \frac{14}{35} = \frac{4}{10}$$

■ 7 ■ ☐ Si la constante de proporcionalidad es 0,4, completa la proporción:

$$\frac{\quad}{4} = \frac{5}{\quad} = \frac{\quad}{12} = \frac{\quad}{8}$$

$$\frac{1,6}{4} = \frac{5}{12,5} = \frac{4,8}{12} = \frac{3,2}{8}$$

■ 8 ■ ☐ Calcula la razón entre la base y la altura en los siguientes triángulos:

- a) 0,5 cm de longitud de la base y 15 mm de altura.
b) 112 dm de longitud de la base y 245 cm de altura.
c) 3,45 m de longitud de la base y 1,2 m de altura.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{32}{7}$ c) $\frac{23}{8}$

■ 9 ■ ☐ Calcula la razón entre la base y la altura de los siguientes rectángulos:

- a) 1,5 m de longitud de la base y 1,5 dm de altura.
b) 1,2 cm de longitud de la base y 0,75 cm de altura.
c) 12,45 mm de longitud de la base y 20 mm de altura.
d) 15,6 dm de longitud de la base y 75,5 cm de altura.

a) $\frac{10}{1}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{249}{400}$ d) $\frac{312}{151}$

RELACIONES ENTRE LOS TÉRMINOS DE UNA PROPORCIÓN

■ 10 ■ ☐ Halla el cuarto proporcional de cada una de las series de números:

- a) 12, 8 y 2. b) 2, 6 y 8.

- c) 15, 12 y 9. d) 3, 8 y 6.

a) $\frac{12}{8} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow 12 \cdot x = 8 \cdot 2 \Leftrightarrow x = \frac{8 \cdot 2}{12} = 1,333...$

b) $\frac{2}{6} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow 2 \cdot x = 8 \cdot 6 \Leftrightarrow x = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$

c) $\frac{15}{12} = \frac{9}{x} \Leftrightarrow 15 \cdot x = 12 \cdot 9 \Leftrightarrow x = \frac{12 \cdot 9}{15} = 7,2$

d) $\frac{3}{8} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow 3 \cdot x = 8 \cdot 6 \Leftrightarrow x = \frac{8 \cdot 6}{3} = 16$

■ 11 ■ ☐ Halla el cuarto proporcional de cada una de las series de números:

- a) 0,3; 0,5 y 1.

- b) 2,5; 2 y 1,5.

- c) 12,5; 7 y 5,5.

- d) 0,5; 0,9 y 0,1.

a) $\frac{0,3}{0,5} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 0,3 \cdot x = 0,5 \cdot 1 \Leftrightarrow x = \frac{0,5 \cdot 1}{0,3} = 1,666...$

b) $\frac{2,5}{2} = \frac{1,5}{x} \Leftrightarrow 2,5 \cdot x = 1,5 \cdot 2 \Leftrightarrow x = \frac{1,5 \cdot 2}{2,5} = 1,2$

c) $\frac{12,5}{7} = \frac{5,5}{x} \Leftrightarrow 12,5 \cdot x = 5,5 \cdot 7 \Leftrightarrow x = \frac{5,5 \cdot 7}{12,5} = 3,08$

d) $\frac{0,5}{0,9} = \frac{0,1}{x} \Leftrightarrow 0,5 \cdot x = 0,1 \cdot 0,9 \Leftrightarrow x = \frac{0,1 \cdot 0,9}{0,5} = 0,18$

■ 12 ■ ☐ Halla la media geométrica de:

- a) 9 y 25.

- b) 12 y 15.

- c) 4 y 9.

- d) 16 y 25.

a) $\frac{9}{x} = \frac{x}{25} \Leftrightarrow x^2 = 9 \cdot 25 \Leftrightarrow x = \sqrt{225} = 15$

b) $\frac{12}{x} = \frac{x}{15} \Leftrightarrow x^2 = 12 \cdot 15 \Leftrightarrow x = \sqrt{180} = 13,42$

c) $\frac{4}{x} = \frac{x}{9} \Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot 9 \Leftrightarrow x = \sqrt{36} = 6$

d) $\frac{16}{x} = \frac{x}{25} \Leftrightarrow x^2 = 16 \cdot 25 \Leftrightarrow x = \sqrt{400} = 20$

13 Halla la media proporcional de:

- a) 0,25 y 0,64. b) 0,09 y 0,16.
c) 1 y 144. d) 12 y 3.

a) $\frac{0,25}{x} = \frac{x}{0,64} \Leftrightarrow x^2 = 0,25 \cdot 0,64 \Leftrightarrow x = \sqrt{0,16} = 0,4$

b) $\frac{0,09}{x} = \frac{x}{0,16} \Leftrightarrow x^2 = 0,09 \cdot 0,16 \Leftrightarrow x = \sqrt{0,0144} = 0,12$

c) $\frac{1}{x} = \frac{x}{144} \Leftrightarrow x^2 = 1 \cdot 144 \Leftrightarrow x = \sqrt{144} = 12$

d) $\frac{12}{x} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x^2 = 12 \cdot 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{36} = 6$

14 Demuestra las equivalencias siguientes:

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

c) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

a) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow d \cdot (a+b) = b \cdot (c+d) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow d \cdot a + d \cdot b = b \cdot c + b \cdot d \Leftrightarrow d \cdot a = b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

b) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow d \cdot (a-b) = b \cdot (c-d) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow d \cdot a - d \cdot b = b \cdot c - b \cdot d \Leftrightarrow d \cdot a = b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

c) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow d \cdot (a+b) = b \cdot (c+d) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow d \cdot a + d \cdot b = b \cdot c + b \cdot d \Leftrightarrow d \cdot a = b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow d \cdot (a-b) = b \cdot (c-d) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow d \cdot a - d \cdot b = b \cdot c - b \cdot d \Leftrightarrow d \cdot a = b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

15 Demuestra las igualdades siguientes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Podemos suponer que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, lo que equivale a que $a \cdot d = b \cdot c$.

Veamos que las otras igualdades también son ciertas.

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a \cdot (b+d) = b \cdot (a+c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab + ad = ba + bc \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} \Leftrightarrow a \cdot (b-d) = b \cdot (a-c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab - ad = ba - bc \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

16 Teniendo en cuenta que A y B son dos magnitudes directamente proporcionales, completa en tu cuaderno la siguiente tabla. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

Magnitud A	5	15	35	60	65
Magnitud B	12	36	84	144	156

La constante de proporcionalidad es $\frac{5}{12} = 0,41666\dots$

17 Si A y B son dos magnitudes directamente proporcionales, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

Magnitud A	0,6	1,35	1,8	2,25
Magnitud B	1	2,25	3	3,75

La constante de proporcionalidad es $\frac{0,6}{1} = 0,6$

18 Si 0,6 es la constante de proporcionalidad de dos magnitudes directamente proporcionales, completa la proporción:

$$\frac{\quad}{5} = \frac{9}{\quad} = \frac{\quad}{30}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15} = \frac{18}{30}$$

19 ¿Son directamente proporcionales la longitud de una circunferencia y la longitud de su diámetro? Da varios ejemplos y compruébalo.

Sí, porque al aumentar la longitud de la circunferencia aumenta el diámetro. Basta tener en cuenta que $l = \pi \cdot d$, donde l es la longitud y d el diámetro.

20 Si al escribir a máquina se dan 540 pulsaciones en 3 minutos, ¿cuántas pulsaciones se dan en 7 minutos?

$$\left. \begin{array}{l} 540 \text{ pulsaciones} \dots\dots\dots 3 \text{ min} \\ x \text{ pulsaciones} \dots\dots\dots 7 \text{ min} \end{array} \right\} x = \frac{540 \cdot 7}{3} \Leftrightarrow x = 1260$$

21 Un automóvil ha consumido 36 litros de combustible para recorrer 450 km a una velocidad media de 110 km/h. ¿Cuántos litros consume para recorrer 150 km a la misma velocidad?

$$\left. \begin{array}{l} 36 \text{ litros} \dots\dots\dots 450 \text{ km} \\ x \text{ litros} \dots\dots\dots 150 \text{ km} \end{array} \right\} x = \frac{36 \cdot 150}{450} \Leftrightarrow x = 12$$

22 Si por cuatro entradas para el teatro se ha pagado 62 €, ¿cuánto tendremos que pagar si vamos a comprar tres entradas?

$$\left. \begin{array}{l} 4 \text{ entradas} \dots\dots 62 \text{ €} \\ 3 \text{ entradas} \dots\dots x \text{ €} \end{array} \right\} x = \frac{3 \cdot 62}{4} = 46,5 \text{ €}$$

23 Un cocinero tarda 45 minutos en hacer tres tartas de chocolate. ¿Cuántas tartas puede hacer en dos horas y media?

$$\left. \begin{array}{l} 45 \text{ min} \dots\dots 3 \text{ tartas} \\ 150 \text{ min} \dots\dots x \text{ tartas} \end{array} \right\} x = \frac{150 \cdot 3}{45} = 10 \text{ tartas}$$

24 Una impresora tarda 1,5 minutos en imprimir 10 folios. ¿Cuánto tiempo tardará en imprimir un trabajo de 80 folios?

$$\left. \begin{array}{l} 1,5 \text{ min} \dots\dots 10 \text{ folios} \\ x \text{ min} \dots\dots 80 \text{ folios} \end{array} \right\} x = \frac{80 \cdot 1,5}{10} = 12 \text{ minutos}$$

25 Una máquina fabrica 130 bombillas en 5 horas. ¿Cuántas bombillas fabrica la máquina en 24 horas?

$$\left. \begin{array}{l} 130 \text{ bombillas} \dots\dots 5 \text{ horas} \\ x \text{ bombillas} \dots\dots 24 \text{ horas} \end{array} \right\} x = \frac{24 \cdot 130}{5} = 624 \text{ bombillas}$$

26 Copia en tu cuaderno y completa la tabla relativa a una máquina envasadora de botellas. En ella se relacionan el número de botellas con la capacidad de las mismas.

Número de botellas	Capacidad de las botellas
1 200	0,5 litros
300	2 litros
800	0,75 litros
1 000	0,6 litros
$1818 + \frac{2}{11}$	33 centilitros
400	1,5 litros

27 Un grupo de 12 alpinistas tiene comida para 10 días. Si dos de ellos abandonan la expedición por enfermedad, ¿para cuántos días tendrá entonces comida el resto de la expedición?

La comida para un alpinista es $10 \cdot 12 = 120$ días; para 10 alpinistas: $\frac{120}{10} = 12$ días.

28 En un hotel la habitación doble vale 65 € por día. Calcula cuánto cuesta el alojamiento de seis personas durante ocho días en ese hotel.

La cantidad que deben pagar 2 personas durante ocho días:

$$\left. \begin{array}{l} 65 \text{ €} \dots\dots\dots 1 \text{ día} \\ x \text{ €} \dots\dots\dots 8 \text{ días} \end{array} \right\} x = \frac{8 \cdot 65}{1} = 520 \text{ €}$$

Para seis personas cuesta: $520 \cdot 3 = 1560 \text{ €}$

29 En una empresa hay 10 técnicos que realizan un trabajo y les ocupa 35 horas a la semana a cada uno. Si dos técnicos se van de vacaciones, ¿cuántas horas a la semana tienen que trabajar cada uno para realizar el mismo trabajo?

Un técnico tiene que trabajar $10 \cdot 35 = 350$ horas a la semana; para ocho técnicos: $\frac{350}{8} = 43,75$ horas a la semana.

30 Una persona da pasos de 0,60 metros de longitud. Para recorrer la distancia de su casa hasta la panadería tiene que dar 520 pasos. Si acorta la longitud del paso 10 centímetros, ¿cuántos pasos deberá dar para recorrer la misma distancia?

Los metros que recorre con 520 pasos son: $0,60 \cdot 520 = 312$ metros; si cada paso es de 0,5 metros: $\frac{312}{0,5} = 624$ pasos.

31 En un supermercado tienen 4 sacos de alubias de 60 kg cada uno. Si se distribuyen en paquetes de 1,5 kg, ¿cuántos paquetes tienen que hacer?

El número total de kg de alubias es: $60 \cdot 4 = 240$ kg; si se reparte en paquetes de 1,5 kg: $\frac{240}{1,5} = 160$ paquetes.

32 Una imprenta, si quiere entregar un encargo de folletos publicitarios en cinco días, tiene que imprimir 4 500 folletos diarios. Si quiere entregar el trabajo en tres días, ¿cuántos folletos tiene que imprimir cada día?

El número total de folletos es de: $4500 \cdot 5 = 22500$; si quiere hacer el trabajo en tres días: $\frac{22500}{3} = 7500$ folletos diarios.

33 Para hacer un trabajo de la clase de Plástica, un alumno tarda 2 horas, otro tarda 4 horas y otro 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarían en hacer el mismo trabajo si lo realizasen juntos?

$\frac{12}{11}$ horas.

APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD

34 **Completa:**

a) 20 % de $\square = 48$

b) $\square$ % de 400 = 35

c) 15 % de 1 200 = $\square$

d) 85 % de $\square = 102$

- a) 240 b) 8,75 c) 180 d) 120

35 **Completa:**

a) 15,5 % de $\square = 86,8$

b) $\square$ % de 64 = 45

c) 65,5 % de 92 = $\square$

d) $\square$ % de 150 = 7,5

- a) 560 b) 70,3125 c) 60,26 d) 5

36 Ana y Julio juegan con un tirachinas. Ana da en el blanco 14 de 20 tiros y Julio 18 de 26 tiros. Calcula el porcentaje de aciertos de cada uno. ¿Quién tiene mejor puntería?

$$\text{Ana} = \frac{14}{20} \cdot 100 = 70\%; \text{ Julio} = \frac{18}{26} \cdot 100 = 69,23\%.$$

Ana tiene mejor puntería.

37 Una ciudad tiene 30 000 habitantes. En el mes de agosto la población se incrementa un 60 %. ¿Cuántos habitantes tiene esa ciudad en el mes de agosto?

$$1,6 \cdot 30\,000 = 48\,000 \text{ habitantes.}$$

38 Según la Organización Mundial de la Salud, el 35 % de los fumadores padecerá una enfermedad pulmonar en el futuro. Si el 40 % de la población de una ciudad de 54 000 habitantes son fumadores, ¿cuántas personas de esa ciudad podrán padecer una enfermedad pulmonar?

$$0,35 \cdot 0,4 \cdot 54\,000 = 7\,560 \text{ habitantes.}$$

39 Una camisa vale 35 €. Si se rebaja un 12 % y posteriormente se rebaja un 5 %, ¿cuál es el precio final de la camisa?

$$35 \cdot 0,88 \cdot 0,95 = 29,26 \text{ €}$$

40 Si una barra de pan que costaba 0,55 €, cuesta ahora 0,75 €, ¿cuál es el tanto por ciento de subida que ha experimentado?

$$\frac{x}{100} \cdot 0,55 = 0,20, \text{ luego } x = 36,36\%.$$

41 Si un DVD cuesta 120 € más el 16 % de IVA, ¿cuál es su precio real?

$$\text{Precio} = 1,16 \cdot 120 = 139,2 \text{ euros.}$$

42 El precio de unos zapatos se ha rebajado en una primera rebaja un 8 %, y en una segunda rebaja un 15 %. Si el precio final es 31,20 €, ¿cuál es el precio inicial de los zapatos?

$$\frac{31,20}{0,92 \cdot 0,85} = 40 \text{ €}$$

43 La reserva hidráulica en España en el mes de enero de 2006 fue 24 947 hm³, que representa el 46,8 % de su capacidad total de embalse. ¿Cuántos hectómetros cúbicos pueden ser embalsados en España?

$$\begin{array}{l} 24\,947 \text{ hm}^3 \dots\dots\dots 46,8\% \\ x \dots\dots\dots 100\% \end{array} \left\{ \right.$$

$$x = \frac{100 \cdot 24\,947}{46,8} \Leftrightarrow x = 53\,305,5555\dots \text{ hm}^3$$

44 Los medios de comunicación informan de que el 60 % de los alumnos de 2.º de ESO estudian dos idiomas. Si en una clase de 2.º de ESO hay 25 alumnos, ¿cuántos de estos alumnos se supone que estudian dos idiomas?

$$\frac{60}{100} \cdot 25 = 15 \text{ alumnos}$$

45 Reparte 2 000 € entre cuatro personas de modo que la primera reciba un 50 % más que la segunda, ésta un 50 % más que la tercera y ésta un 50 % más que la cuarta.

Sea x lo que recibe la cuarta persona. Entonces, $x + 1,5x + 1,5^2x + 1,5^3x = 2\,000$, de donde $x = 246,15$.

La tercera recibirá 369,22, la segunda 553,83 y la primera recibirá 830,55 euros.

46 Un agricultor tiene un campo de 2,5 hectáreas y otro de 4,2 hectáreas. Dispone de 3 horas para regar. Si el agricultor quiere que el tiempo de riego sea proporcional a la superficie del campo, ¿cuánto tiempo debe dedicar a regar cada campo?

$$\frac{x}{2,5} = \frac{y}{4,2} = \frac{3}{6,7}$$

Luego al primer campo debe dedicarle:

$$x = 2,5 \cdot \frac{3}{6,7} = 1,12 \text{ horas,}$$

$$\text{y al otro campo } y = 4,2 \cdot \frac{3}{6,7} = 1,88 \text{ horas.}$$

47  Completa la tabla que representa la reserva hídrica de España en cada cuenca.

Cuenca	Capacidad (hm³)	Reserva actual (hm³)	%
Norte	4 360	2 703	61,9
Duero	7 463	3 709,1	49,7
Tajo	11 007,2	4 590	41,7
Guadiana	8 859	5 014,2	56,6
Guadalquivir	8 763,5	3 558	40,6
Sur	1 041	272	26,1

48  La calificación de Matemáticas se obtiene de la siguiente forma:

- Un 20 % por comportamiento en la clase.
- Un 30 % por la realización de ejercicios.
- Un 50 % por la nota del examen.

a) Calcula la calificación final de un alumno si las anotaciones que tiene el profesor de él son:

- 4 sobre 10 por el comportamiento en clase.
- 6 sobre 10 por la realización de ejercicios.
- 5 sobre 10 por la nota del examen.

b) Si la calificación que ha obtenido un alumno es 8, ¿cuál es la puntuación que tiene por cada uno de los apartados: comportamiento en clase, por los ejercicios realizados y por la nota de examen?

a) $0,2 \cdot 4 + 0,3 \cdot 6 + 0,5 \cdot 5 = 5,1$.

49  Los socios de una empresa deciden repartir proporcionalmente al número de acciones los 4 200 € de beneficios del último mes. Si la distribución de acciones entre los socios es:

	Acciones
Socio A	20 %
Socio B	40 %
Socio C	10 %
Socio D	30 %

- a) ¿Qué cantidad de dinero corresponde a cada socio?
- b) Si la empresa destina un 10 % de los beneficios para obra social, ¿qué cantidad de dinero corresponde al socio C?

a) La suma de las cantidades de los cuatro socios es:

$$A + B + C + D = 4\,200$$

La suma las acciones es 100.

La cantidad que se recibe por cada acción es: $\frac{4\,200}{100} = 42$.

El socio A recibe $20 \cdot 42 = 840$ €.

El socio B recibe $40 \cdot 42 = 1\,680$ €.

El socio C recibe $10 \cdot 42 = 420$ €.

El socio D recibe $30 \cdot 42 = 1\,260$ €.

b) $420 \cdot 0,9 = 378$ €.

50  El pago de los gastos comunitarios de un edificio es proporcional a la superficie de las viviendas, que son:

Tipo A	90 m²
Tipo B	110 m²
Tipo C	150 m²

Si los gastos comunitarios de un año son 30 000 €, calcula la cantidad que corresponde pagar por cada tipo de vivienda.

$$\frac{x}{90} = \frac{y}{110} = \frac{z}{150} = \frac{30\,000}{90 + 110 + 150} = \frac{600}{7}$$

Luego la vivienda de 90 m² debe pagar

$$x = 90 \cdot \frac{600}{7} = 7\,714,28 \text{ euros.}$$

La vivienda de 110 m² debe pagar:

$$y = 110 \cdot \frac{600}{7} = 9\,428,57 \text{ euros.}$$

La vivienda de 150 m² debe pagar:

$$z = 150 \cdot \frac{600}{7} = 12\,857,14 \text{ euros.}$$

51  Una empresa formada por tres socios reparte los beneficios del último trimestre de la siguiente forma:

Socio A	4 500 €
Socio B	7 200 €
Socio C	6 300 €

Calcula el porcentaje de ganancias de cada socio.

Los beneficios totales son: $4\,500 + 7\,200 + 6\,300 = 18\,000$ €.

$$\text{Socio A: } \left. \begin{array}{l} 18\,000 \text{ €} \dots\dots\dots 100 \% \\ 4\,500 \text{ €} \dots\dots\dots x \% \end{array} \right\} x = \frac{4\,500 \cdot 100}{18\,000} = 25 \%$$

$$\text{Socio B: } \left. \begin{array}{l} 18\,000 \text{ €} \dots\dots\dots 100 \% \\ 7\,200 \text{ €} \dots\dots\dots x \% \end{array} \right\} x = \frac{7\,200 \cdot 100}{18\,000} = 40 \%$$

$$\text{Socio C: } \left. \begin{array}{l} 18\,000 \text{ €} \dots\dots\dots 100 \% \\ 6\,300 \text{ €} \dots\dots\dots x \% \end{array} \right\} x = \frac{6\,300 \cdot 100}{18\,000} = 35 \%$$

52  Un ayuntamiento dispone de 10000 € para repartir entre tres asociaciones culturales de la localidad, de 200, 350 y 425 socios respectivamente.

a) ¿Qué cantidad recibirá cada asociación si el reparto es proporcional al número de socios de cada una de ellas?

b) Si de la cantidad recibida del ayuntamiento cada asociación cultural destina un 15 % para promover y promocionar sus actividades entre la población, ¿qué cantidad destina cada asociación?

$$a) \frac{x}{200} = \frac{y}{350} = \frac{z}{425} = \frac{10000}{975} = \frac{400}{39}$$

Luego la primera recibirá:

$$x = 200 \cdot \frac{400}{39} = 2051,28 \text{ euros.}$$

La segunda:

$$y = 350 \cdot \frac{400}{39} = 3589,74 \text{ euros}$$

La tercera recibirá:

$$z = 425 \cdot \frac{400}{39} = 4358,97 \text{ euros}$$

b) La primera destina: $2051,28 \cdot 0,15 = 307,69 \text{ €}$

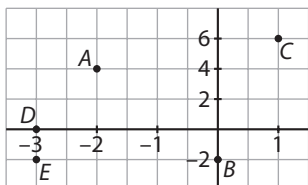
La segunda destina: $3589,74 \cdot 0,15 = 538,46 \text{ €}$

La tercera destina: $4358,97 \cdot 0,15 = 653,85 \text{ €}$

8 FUNCIONES

EJERCICIOS

1 Traza en tu cuaderno unos ejes de coordenadas y representa en ellos los puntos $A(-2, 4)$, $B(0, -2)$, $C(1, 6)$, $D(-3, 0)$ y $E(-3, -2)$.



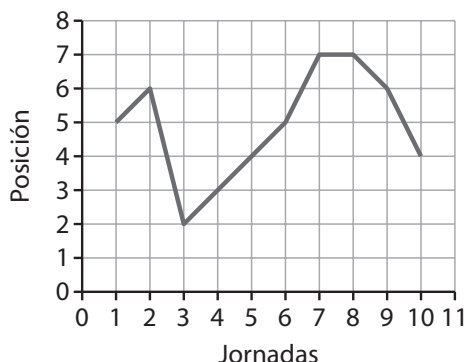
2 Encuentra las coordenadas del vértice D del rectángulo $ABCD$, sabiendo que las coordenadas conocidas son $A(1, -3)$, $B(1, 4)$ y $C(-4, 4)$.

$D(-4, -3)$.

3 A partir del gráfico de la gripe de Carlos, responde a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre las 10 y las 13 horas?
 - ¿A qué horas del día la temperatura de Carlos es de $37,5^\circ\text{C}$?
 - ¿En qué intervalos de tiempo la temperatura sube o baja?
 - ¿Puedes deducir cuándo ha tomado Carlos un anti-térmico?
 - ¿Cuál fue la máxima temperatura? ¿Y la mínima?
 - ¿Cuál fue la oscilación de la temperatura durante el día?
- 1°C
 - 11, 14, 17 y 21,5 horas.
 - Sube: [8,13] y [15,20]; baja: [13,15] y [20,23].
 - A las 13 y a las 20 horas.
 - 39°C , $36,5^\circ\text{C}$
 - $39 - 36,5 = 2,5^\circ\text{C}$

4 El gráfico representa la clasificación de un club de fútbol en el campeonato de Liga durante las diez primeras jornadas. Interpreta la marcha del equipo en el campeonato de Liga a partir del gráfico.

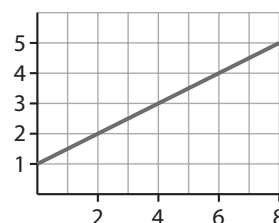


<http://www.McGraw-Hill.es>

En la primera jornada se colocó en el quinto puesto; en la segunda retrasó una posición; en la tercera pasó al segundo puesto y fue perdiendo un lugar cada semana hasta la sexta jornada, en la que estaba en la quinta posición; la jornada siguiente perdió dos posiciones, quedando en el séptimo lugar, donde se mantuvo en la octava jornada; adelantó un lugar en la novena jornada y dos en la décima, quedando en el puesto cuarto.

5 Dibuja la gráfica correspondiente a la siguiente tabla de valores y une los puntos con una línea poligonal:

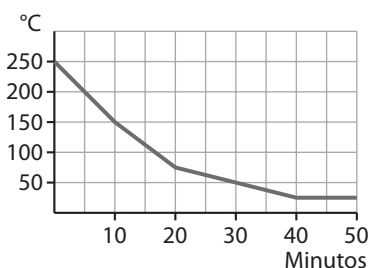
Variable x	0	2	4	6	8
Variable y	1	2	3	4	5



6 El enfriamiento de un horno eléctrico desde el instante en que se desconecta sigue la evolución indicada en la tabla:

Tiempo transcurrido (min)	0	10	20	30	40	50
Temperatura ($^\circ\text{C}$)	250	150	75	50	25	25

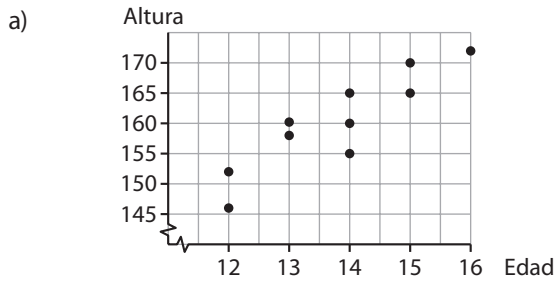
Representa la gráfica asociada a esta tabla de valores.



7 En el colegio se ha realizado un estudio para analizar la relación entre la edad y la altura de los alumnos. Los resultados correspondientes a diez niños se recogen en la tabla de valores.

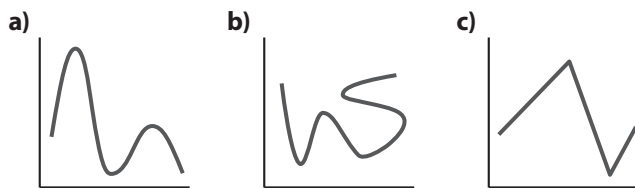
Edad	12	12	13	15	14	15	14	13	16	14
Altura (cm)	146	152	158	165	160	170	155	160	172	165

- Representa la gráfica correspondiente.
- ¿Tiene sentido unir los puntos obtenidos?
- ¿En qué valores está comprendida la edad de los diez niños elegidos para el estudio? ¿Y la estatura?



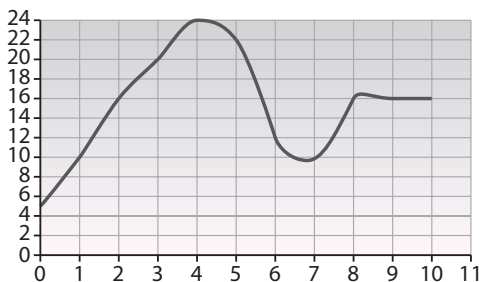
- b) No tiene sentido unir los puntos.
c) Entre 12 y 16 años. Entre 146 y 172 cm.

8 Indica qué gráficas representan una función:



La a) y la c).

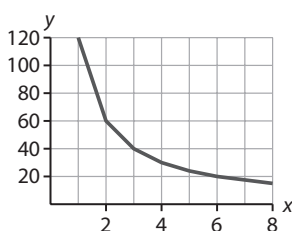
9 Describe las características de la función representada en la gráfica.



Dominio $[0, 10]$; recorrido $[5, 24]$; creciente $[0, 4]$ y $[7, 8]$; decreciente $[4, 7]$ y $[8, 9]$; constante $[9, 10]$; extremos en $(0, 4)$, $(4, 24)$, $(7, 10)$ y $(8, 17)$.

10 Representa en tu cuaderno la gráfica correspondiente a los valores de la tabla y, a partir de ella, describe las características de la función.

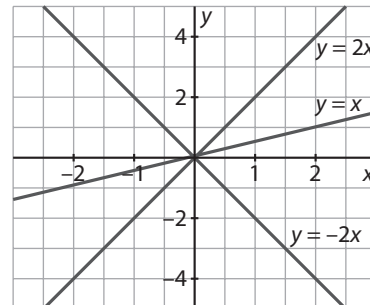
Variable independiente (x)	1	2	3	4	5	6	8
Variable dependiente (y)	120	60	40	30	24	20	15



Dominio $[1, 8]$, recorrido $[15, 120]$; siempre decreciente; extremos en $(1, 120)$ y $(8, 15)$.

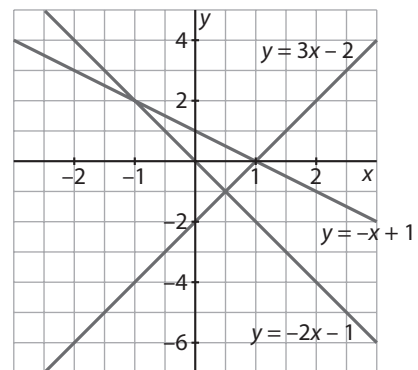
11 Dibuja la gráfica de las funciones:

- a) $y = 2x$ b) $y = x$ c) $y = -2x$



12 Dibuja la gráfica de las funciones:

- a) $y = -x + 1$ b) $y = 3x - 2$ c) $y = -2x - 1$



13 Por alquilar un coche hay que pagar 90 € como cantidad fija, más 2 € por cada kilómetro recorrido.

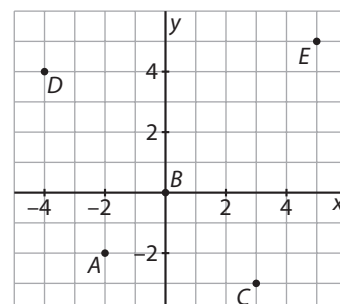
¿Cuál es la función que relaciona el precio total del alquiler del coche con el número de kilómetros recorridos?

$y = 2x + 90$, donde x es el número de kilómetros recorridos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

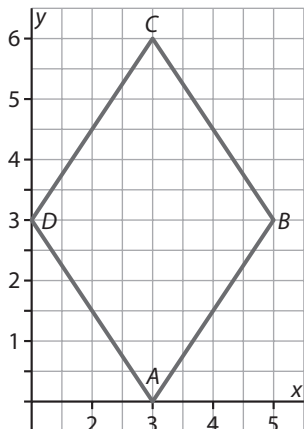
REPRESENTACIÓN DE COORDENADAS EN EL PLANO

1 Representa en los ejes de coordenadas los puntos $A(-2, -2)$, $B(0, 0)$, $C(3, -3)$, $D(-4, 4)$ y $E(5, 5)$.



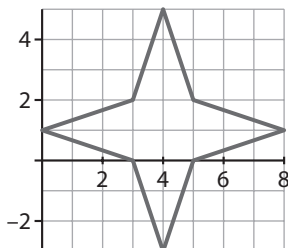
2 Une los puntos de coordenadas $A(3, 0)$, $B(5, 3)$, $C(3, 6)$ y $D(1, 3)$. ¿Qué figura geométrica se obtiene?

Un rombo.



3 Los vértices de una estrella dibujada en el plano son los puntos de coordenadas $A(0, 1)$, $B(3, 0)$, $C(4, -3)$, $D(5, 0)$, $E(8, 1)$, $F(5, 2)$, $G(4, 5)$ y $H(3, 2)$. Determina las coordenadas del centro de la estrella.

El centro está en el $(4, 1)$.



4 Los vértices de un paralelogramo son los puntos de coordenadas $A(-3, 2)$, $B(0, 2)$, $C(1, 4)$ y $D(-2, 4)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección de las diagonales?

$(-1, 3)$

5 Si los puntos $A(4, 1)$, $B(13, 4)$, $C(10, 7)$ y $D(x, y)$ son las coordenadas de los vértices de un paralelogramo, ¿cuáles son las coordenadas del vértice D ?

Los vértices deben ir ordenados: A , B , C y D . El vértice que falta es el $(1, 4)$. Si no se impusiera orden habría otros dos puntos que también formarían con los anteriores un paralelogramo: el $(7, 2)$ y el $(19, 10)$.

INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS

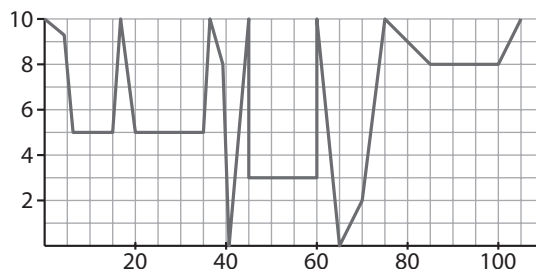
6 Piensa en tu estado de ánimo, un lunes desde que te despiertas hasta que te acuestas. Haz una gráfica que represente esta situación dando valores reales a la primera magnitud (horas del día), y valores aproximados a la segunda magnitud (estado de ánimo entre 0 y 10).

Respuesta abierta.

7 En un partido de fútbol sucede lo siguiente:

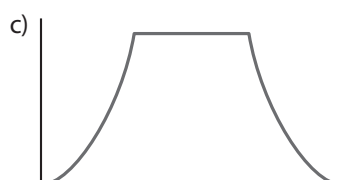
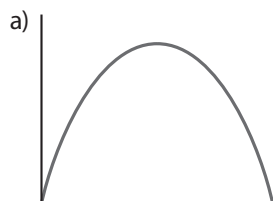
- Salida de los equipos al campo.
- Errores arbitrales.
- Gol del equipo local.
- Penalti en contra de los locales.
- Error en el lanzamiento del penalti.
- Gol del equipo local.
- Descanso.
- Gol del equipo visitante.
- Fin del partido.
- Victoria del equipo local.

En tu cuaderno, haz la gráfica del ruido que se produce en el estadio en función del momento del partido.

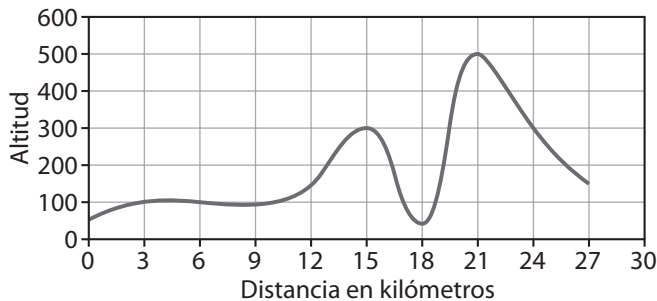


8 Representa una gráfica que describa cada una de las situaciones siguientes:

- a) La variación de la temperatura de un horno desde el instante inicial de encendido hasta su enfriamiento final.
- b) El número de alumnos que hay en el patio del colegio durante un día cualquiera de clase.
- c) La cantidad de espectadores en un campo de fútbol, desde una hora antes del inicio del partido hasta una hora después del final.



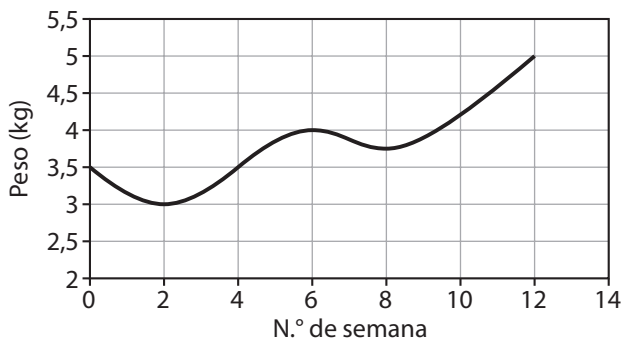
9 El perfil de un paseo en bicicleta de 27 kilómetros viene dado por la siguiente gráfica:



Interpreta la gráfica del trazado del perfil.

El paseo empieza a una altitud de 50 metros y acaba a una altitud de 150 metros. Empieza subiendo hasta aproximadamente el minuto 4, en el que desciende levemente hasta el minuto 7,5, donde empieza a escalar el primer puerto serio de una altura de 300 metros, lo que consigue en el minuto 15 (aprox.). Baja hasta los 50 metros en el minuto 18 y vuelve a subir un segundo puerto que tiene una altura de 500 metros, lo que consigue en el minuto 21, y desde aquí baja hasta los 150 metros, coincidiendo con el minuto 27.

10 Interpreta la gráfica del peso de un bebé utilizando el vocabulario adecuado.



Función continua; dominio $[0, 12]$, recorrido $[3, 5]$; decreciente en los intervalos 0 a 2 y 6 a 8; creciente en los intervalos 2 a 6 y 8 a 10; extremos en los puntos (2, 3), (6, 4), (8, 3,75) y (12, 5).

GRÁFICA ASOCIADA A UNA TABLA DE VALORES

11 Utiliza una tabla para indicar el tiempo que dedicas cada día a ver la televisión y representa la gráfica correspondiente.

Respuesta abierta.

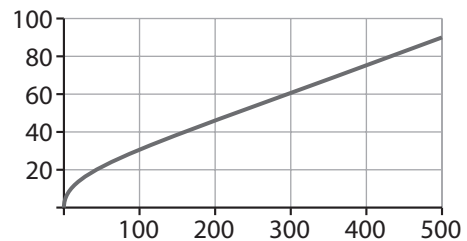
12 Utiliza una tabla para indicar el tiempo que dedicas cada día a estudiar y representa la gráfica correspondiente.

Respuesta abierta.

13 Los datos de la tabla corresponden a un paseo en globo. Las variables son la altura x (m) y la distancia que se divide desde el globo y (km). Construye la gráfica. ¿Tiene sentido unir los puntos?

x	y
4	6
10	12
20	18
30	22
50	28
100	38
500	90

Sí tiene sentido unir los puntos.



14 Construye las gráficas que corresponden a cada una de las siguientes tablas. Decide si debes unir los puntos o no.

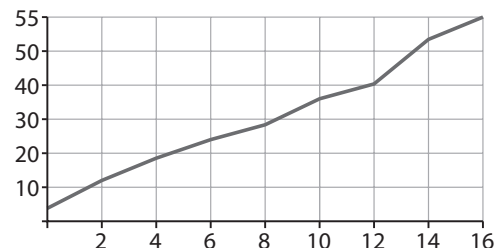
a) Peso de Alberto desde que nació hasta los 16 años:

Edad	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Peso (kg)	3,5	11	17	22	26	33	37	49	55

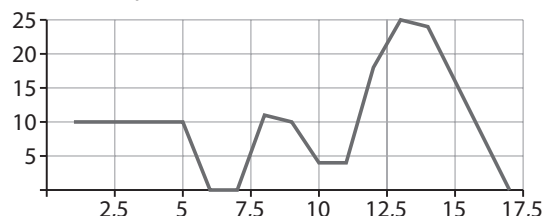
b) Velocidad de Julia en la bici durante un paseo:

Tiempo (min)	1	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	17
Velocidad (km/h)	10	10	0	0	11	10	4	4	18	25	24	0

a) Sí se unen los puntos.



b) Sí se unen los puntos.



8 FUNCIONES

<http://www.McGraw-Hill.es>

15 ¿Qué tabla le corresponde a la gráfica?

Tabla 1

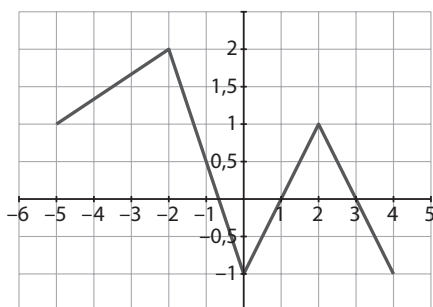
x	-5	2	1	1	4
y	1	-2	-1	2	-1

Tabla 2

x	1	2	-1	2	-1
y	-5	-2	0	1	4

Tabla 3

x	-5	-2	0	2	4
y	1	2	-1	1	-1



La tabla 3.

16 Asocia a cada tabla su gráfica.

Tabla 1

x	y
-5	-5
-4	-3
-3	-2
-2	-4
-1	-5

Tabla 2

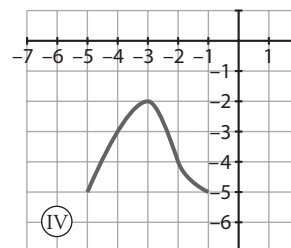
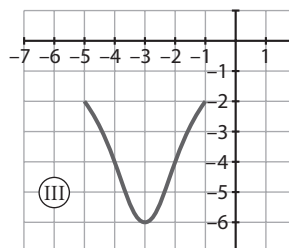
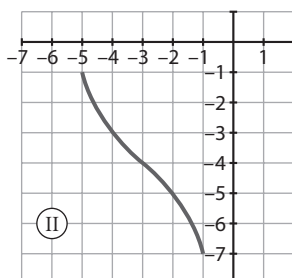
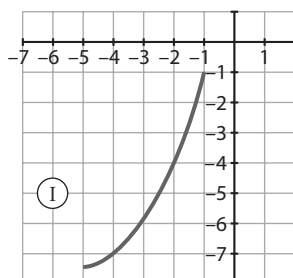
x	y
-5	-2
-4	-4
-3	-6
-2	-4
-1	-2

Tabla 3

x	y
-5	-7,5
-4	-7
-3	-6
-2	-4
-1	-1

Tabla 4

x	y
-5	-1
-4	-3
-3	-4
-2	-5
-1	-7



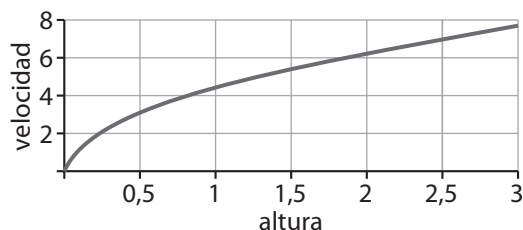
Gráfica 1, tabla 3; Gráfica 2, tabla 4; Gráfica 3, tabla 2; Gráfica 4, tabla 1.

17 La velocidad con que llega al suelo un cuerpo que cae libremente desde una altura determinada viene dada por la tabla:

Altura en metros (h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Velocidad en m/s (v)	0	3,1	4,2	5,4	6,3	7	7,7

Representa la gráfica correspondiente a los valores de la tabla. ¿Tiene sentido unir los puntos obtenidos?

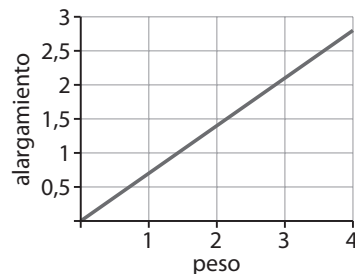
Sí tiene sentido unir los puntos.



18 De un muelle se cuelgan pesos que dan lugar a los alargamientos indicados en la tabla:

Peso en kilogramos	0,5	1	2	3	4
Alargamiento en cm	0,35	0,7	1,4	2,1	2,8

Representa en tu cuaderno la gráfica correspondiente a los valores de la tabla.



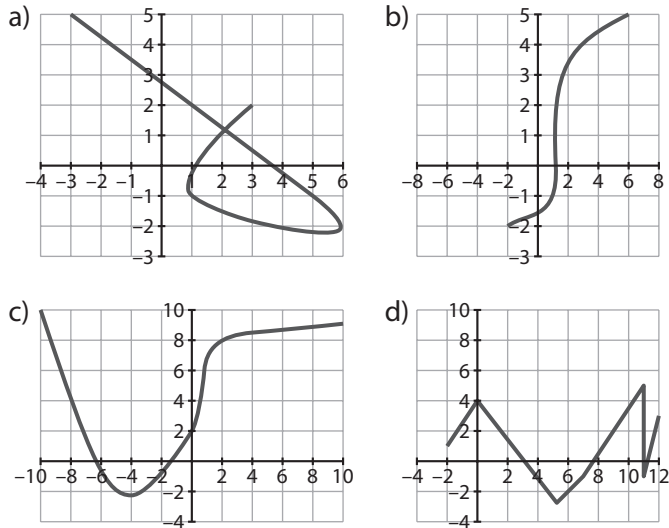
19 Utiliza la gráfica del ejercicio anterior para determinar el alargamiento que experimenta el muelle al colgar de él un peso de 1,75 kilogramos. ¿Se puede deducir el alargamiento que tendrá el muelle si se cuelga de él un peso de 5,5 kilogramos?

Alargamiento: 1,225 cm.

Se puede deducir el alargamiento; la función es $y = 0,7x$, luego será un alargamiento de 3,85 cm.

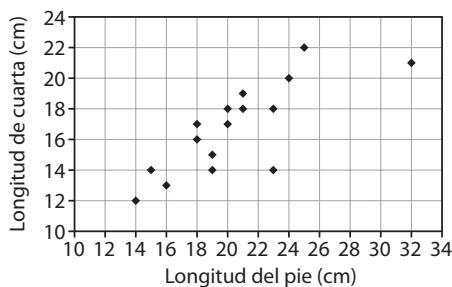
CONCEPTO DE FUNCIÓN. CARACTERÍSTICAS

20 ¿Qué gráficas representan una función y cuáles no? Explica por qué.



Representan una función la c) y la d). Las otras no representan una función, porque hay valores de x que tienen dos imágenes.

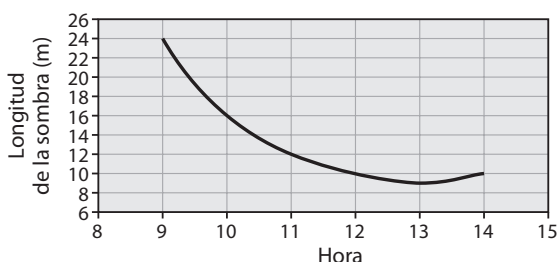
21 Construye la tabla que corresponde a la gráfica e indica si representa una función.



No representa una función porque hay puntos distintos con la misma abscisa.

x	14	15	16	18	18	19	19	20	20	21	21	23	23	24	25	32
y	12	14	13	16	17	14	15	17	18	18	19	14	18	20	22	21

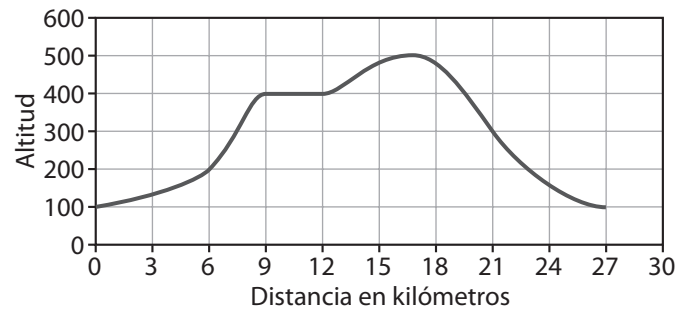
22 Construye la tabla que corresponde a la gráfica de la sombra de una farola e indica si representa una función.



Sí representa una función. Una tabla podría ser:

x	9	10	11	12	13	14
y	24	16	12	10	9	10

23 Estudia las características de la función cuya gráfica es:

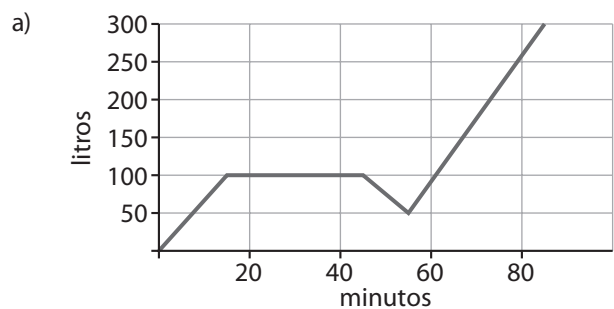


Función continua; dominio $[0, 27]$, recorrido $[100, 500]$; creciente en los intervalos $[0, 9]$, $[12, 16]$; decreciente en el intervalo $[16, 27]$; constante en $[9, 12]$; extremos en $(0, 100)$, $(16, 500)$ y $(27, 100)$.

24 Un depósito de agua de 300 litros de capacidad está vacío. Se abre un grifo durante 15 minutos y se llena hasta la tercera parte de su capacidad. Se cierra el grifo durante media hora. Durante 10 minutos se extraen del depósito 50 litros de agua para el riego, posteriormente se vuelve a abrir el grifo durante 30 minutos hasta llenar completamente el depósito.

a) Dibuja en tu cuaderno una gráfica para expresar la situación descrita.

b) Estudia las características de la gráfica de la función.



b) Función continua; dominio $[0, 85]$, recorrido $[0, 300]$; creciente en el intervalo de 0 a 15 minutos y en el intervalo de 55 a 85 minutos; constante en el intervalo de 15 a 45 minutos; decreciente en el intervalo de 45 a 55 minutos; extremos en los minutos 0, 55 y 85.

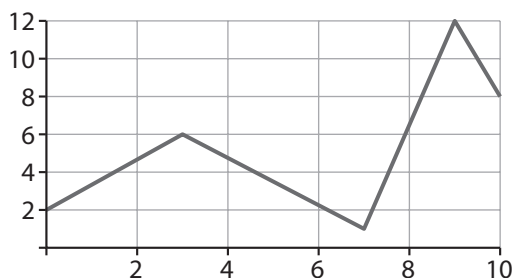
25 Dibuja la gráfica de una función con las siguientes características:

- El dominio es el intervalo de 0 a 10.
- El recorrido es el intervalo de 0 a 12.
- La función es creciente en los intervalos de 0 a 3 y de 7 a 9.

8 FUNCIONES

<http://www.McGraw-Hill.es>

- d) La función es decreciente en los intervalos de 3 a 7 y de 9 a 10.
 e) Los extremos de la función son los puntos de coordenadas (3, 6), (7, 1) y (9, 12).
 f) La imagen de 0 es 2 y la imagen de 10 es 8.

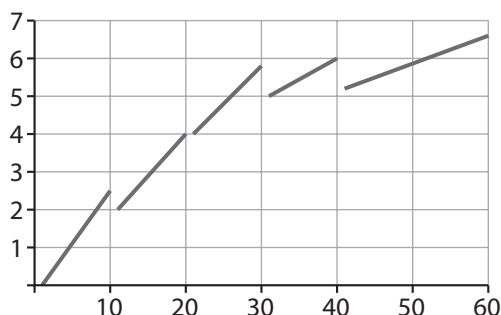


26 En un laboratorio fotográfico los precios de las reproducciones fotográficas están en función del número de reproducciones que se hagan con arreglo a la siguiente tarifa:

Número de reproducciones	Precio
De 1 a 10	0,25 €/unidad
De 11 a 20	0,20 €/unidad
De 21 a 30	0,19 €/unidad
De 31 a 40	0,15 €/unidad
Más de 40	0,12 €/unidad

Representa la gráfica de la función que corresponde a la tabla anterior y, a partir de ella, completa la siguiente tabla de valores en tu cuaderno:

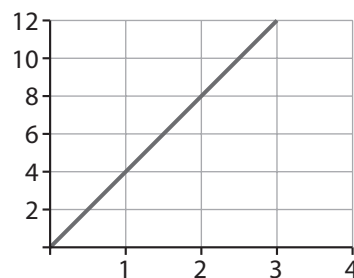
Número de reproducciones	12	24	32	45
Precio	2,4	4,56	4,8	5,4



FUNCIONES DADAS MEDIANTE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

27 Determina la función que relaciona el perímetro de un cuadrado con la longitud de su lado. Representa la gráfica de la función obtenida.

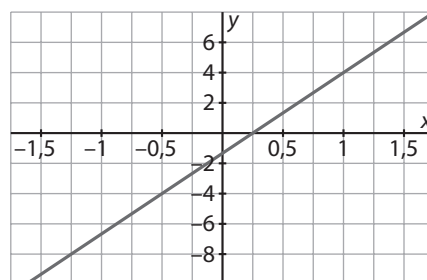
$y = 4x$, donde x es lo que mide el lado.



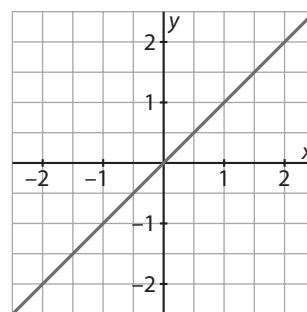
28 Expresa la función correspondiente a cada una de las siguientes situaciones:

- a) El doble de cada número.
 b) El siguiente de cada número natural.
 c) El doble de cada número más cuatro.
 a) $y = 2x$ b) $y = x + 1$ c) $y = 2x + 4$

29 Representa la gráfica de la función $y = 5x - 1$.



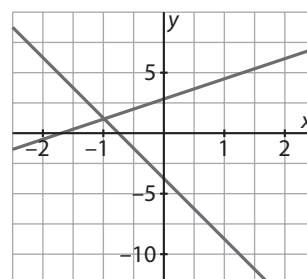
30 Representa la gráfica de la función $y = x$.



31 Dadas las funciones $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -5x - 4$:

- a) Representa sus gráficas.
 b) Indica cuál es la pendiente de cada una de ellas.

a)



b) Pendiente = 2; pendiente = -5.

32 ☐ Identifica cuáles de los puntos $A(5, 3)$, $B(4, 2)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$, $E(-1, 0)$ y $F(-2, \frac{1}{2})$ pertenecen a la gráfica de la función $y = \frac{x+1}{2}$.

A, C y E .

33 ☐ Encuentra la función asociada a cada tabla:

a)

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-3	0	3	6

b)

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	-0,5	0	0,5	1

c)

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	0	3	6	9

d)

x	-2	-1	0	1	2
y	1	1,5	2	2,5	3

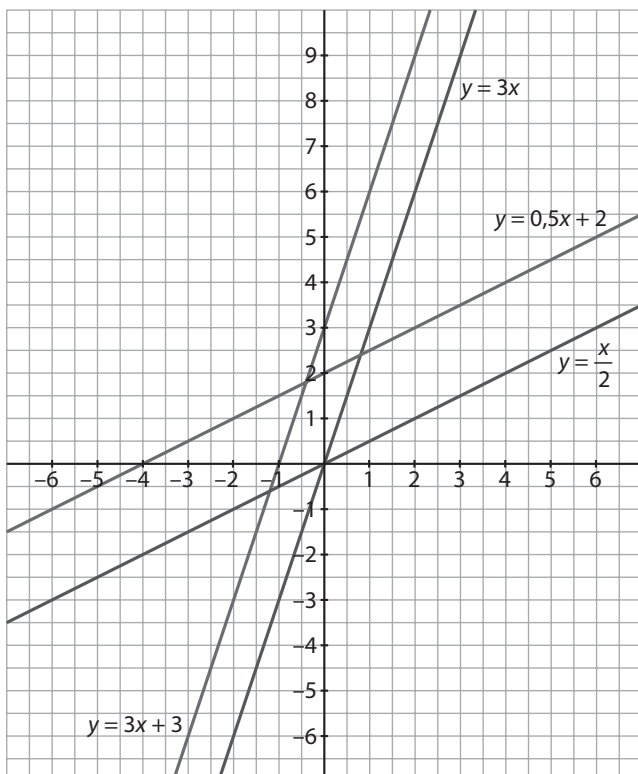
a) $y = 3x$

b) $y = \frac{x}{2}$

c) $y = 3x + 3$

d) $y = 0,5x + 2$

34 ☐ Representa en los mismos ejes las funciones de los apartados a) y c) del ejercicio anterior. Haz lo mismo con las funciones de los apartados b) y d). ¿Qué observas?

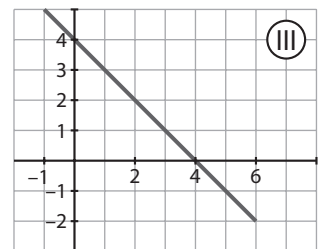
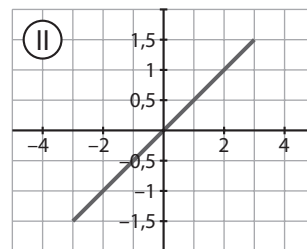
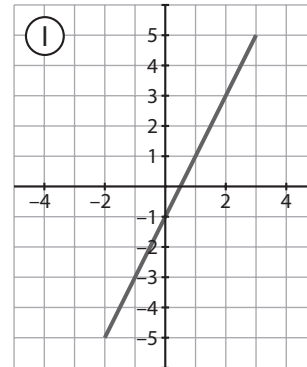


35 ☐ Relaciona cada función con su gráfica:

a) $y = 0,5x$

b) $y = -x + 4$

c) $y = 2x - 1$



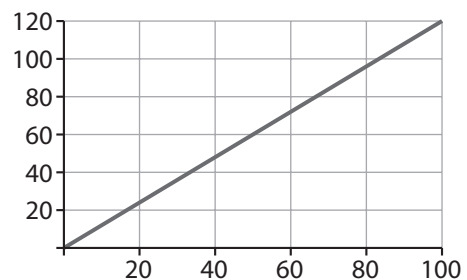
a) II

b) III

c) I

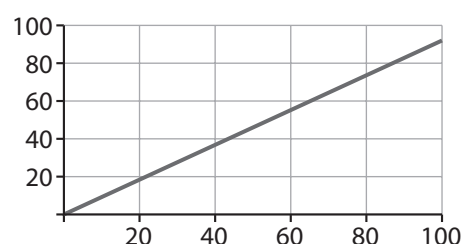
36 ☐ Si 1 € equivale a 1,20 dólares, ¿cuál es la función que permite la conversión de euros en dólares? Representa la gráfica de esa función.

$y = 1,2x$



37 ☐ Si en una tienda han rebajado un 10 % todos sus artículos, ¿qué función permite saber el precio final de cada artículo? Representa la gráfica de esa función.

$y = 0,9x$



EJERCICIOS

1 Un ciclista da un paseo. Si en el trayecto de ida tarda 1 hora 23 min 45 s y en el trayecto de vuelta tarda 1 h 45 min 28 s, ¿cuánto tiempo ha durado el paseo?

3 h 49 min 13 s

2 Multiplica 15 h 43 min 28 s:

a) Por 5. b) Por 3. c) Por 2.

- a) 78 h 37 min 20 s
b) 47 h 10 min 24 s
c) 31 h 26 min 56 s

3 La proyección de una película comenzó a las 20 h 50 min y terminó a las 22 h 47 min. ¿Qué tiempo duró la proyección de la película?

22 h 47 min - 20 h 50 min = 1 h 57 min

4 Divide 56 h 23 min 42 s:

a) Entre 2. b) Entre 5. c) Entre 12.

- a) 28 h 11 min 51 s
b) 11 h 16 min 44,4 s
c) 4 h 41 min 58,5 s

5 ¿Cuál es la medida del ángulo correspondiente a dos, tres y cuatro cuadrantes?

180°; 270°; 360°

6 Utiliza la forma decimal para expresar:

- a) 23° 5' 52" en grados.
b) 45' 36" en minutos.
c) 28° 15' en grados.
d) 145° 11' 35" en minutos.
e) 12° 12' 30" en segundos.

- a) 23,097...° b) 45,6' c) 28,25°
d) 8 711,583...' e) 43 950"

7 Utiliza la forma compleja para expresar:

- a) 45,36° b) 60,82° c) 102,65°
a) 45° 21' 36" b) 60° 49' 12" c) 102° 39'

8 Dados los ángulos: $A = 55^\circ 24' 36''$, $B = 123^\circ 45' 30''$ y $C = 80^\circ 10' 15''$, calcula:

- a) $A + B + C$ b) $B : 4$
c) $3A - B$ d) $3C : 5$
a) 259° 20' 21" b) 30° 56' 22,5"
c) 42° 28' 18" d) 48° 6' 9"

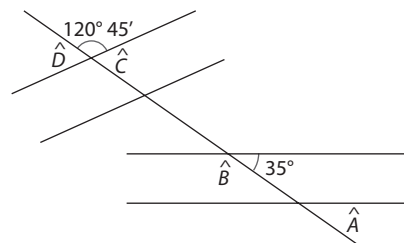
9 Encuentra el ángulo complementario de:

- a) 34° b) 60°
c) 45° 25' 56" d) 74° 59' 59"
a) 56° b) 30°
c) 44° 34' 4" d) 15° 0' 1"

10 Encuentra el ángulo suplementario de:

- a) 77° b) 160°
c) 95° 15' 50" d) 132° 45'
a) 103° b) 20°
c) 84° 44' 10" d) 47° 15'

11 Calcula los ángulos señalados en el dibujo:



$D = C = 59^\circ 15'$; $B = 145^\circ$; $A = 35^\circ$

12 En un polígono la medida de un ángulo interior es $38^\circ 12'$. ¿Cuánto mide el ángulo exterior correspondiente al mismo vértice?

$180^\circ - 38^\circ 12' = 141^\circ 48'$

13 Dos ángulos de un triángulo miden $52^\circ 15' 12''$ y $95^\circ 12' 48''$. Calcula la medida del tercer ángulo.

$180^\circ - (52^\circ 15' 12'' + 95^\circ 12' 48'') = 32^\circ 32'$

14 Obtén de forma razonada la suma de los ángulos interiores de un octógono.

$6 \cdot 180 = 1 080^\circ$

15 Si el ángulo central de un polígono regular mide 36° , ¿de qué polígono regular se trata? ¿Cuánto miden los ángulos interiores y exteriores?

$360 : 36 = 10$, de un decágono. Ángulo interior = 144° ; ángulo exterior = 36° .

EJERCICIOS PROPUESTOS

LA MEDIDA DEL TIEMPO

1 ¿Cuántos segundos son 0,67 horas?

$0,67 \cdot 3 600 = 2 412$ s.

2 ¿Cuántas horas, minutos y segundos son 4,55 horas?

Pasamos las 0,55 horas a minutos:

$$0,55 \cdot 60 = 33 \text{ min.}$$

$$4,55 \text{ h} = 4 \text{ h } 33 \text{ min.}$$

3 ¿Cuántas horas, minutos y segundos son 4 552 segundos?

$$\begin{array}{r|l} 4552 & 60 \\ \hline 352 & 75 & 60 \\ \hline 52'' & 15' & 1^\circ \end{array}$$

$$1 \text{ h } 15' 52''$$

4 Utilizando la forma decimal expresa:

a) En horas: 26 h 35 min 16 s.

b) En segundos: 1 h 11 min.

c) En minutos: 3 h 36 min 16 s.

d) En horas: 2 h 30 min 36 s.

a) $26 + 35 : 60 + 16 : 3600 = 26 + 0,58 + 0,0044 = 26,5844 \text{ h}$

b) $1 \cdot 3600 + 11 \cdot 60 = 4260''$

c) $3 \cdot 60 + 36 + 16 : 60 = 180 + 36 + 0,27 = 216,27'$

d) $2 + 30 : 60 + 26 : 3600 = 2 + 0,5 + 0,007 = 2,507 \text{ h}$

5 Calcula cuántos minutos de clase hay en una semana.

30 periodos lectivos a 50 minutos cada uno, son 1 500 minutos.

6 Si 1,26 horas es el tiempo empleado por un ciclista en una carrera, ¿en cuántos minutos y segundos ha realizado la carrera?

$$1,26 \cdot 60 = 75,6 \text{ minutos.}$$

$$75,6 \cdot 60 = 4536 \text{ segundos.}$$

7 Expresa en forma compleja:

a) 12,458 h b) 21,19 h

c) 2,85 h d) 3,56 h

a) $0,458 \cdot 60 = 27,48$; $0,48 \cdot 60 = 28,8$; 12 h 27' 28,8"

b) $0,19 \cdot 60 = 11,4$; $0,4 \cdot 60 = 24$; 21 h 11' 24"

c) $0,85 \cdot 60 = 51$; 2 h 51'

d) $0,56 \cdot 60 = 33,6$; $0,6 \cdot 60 = 36$; 3 h 33' 36"

8 El tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje es 23,93 horas. Expresa ese tiempo en forma compleja.

$$23 \text{ h } 55 \text{ min } 48 \text{ s}$$

9 ¿Cuántas horas hay desde el 1 de enero hasta el 12 de febrero?

$$31 + 12 = 42 \text{ días; } 1 \text{ día} = 24 \text{ h; } 42 \cdot 24 = 1008 \text{ h}$$

10 Calcula:

a) Cuántas horas hay en un año.

b) Cuántos minutos hay en una semana.

c) Los días que hay en un milenio.

d) Los lustros que hay en un siglo.

a) $365 \cdot 24 = 8760 \text{ h}$

b) $7 \cdot 24 \cdot 60 = 10080'$

c) $1000 \cdot 365 = 365000 \text{ días}$

d) $100 : 5 = 20 \text{ lustros}$

OPERACIONES CON MEDIDAS DE TIEMPO

11 Calcula:

a) 3 h 25 min 12 s + 4 h 46 min 17 s

b) 23 min 12 s + 4 h 15 min 46 s + 7 h 49 min

c) 12 h 15 min + 2,45 h

d) 3 h 42 min + 4,52 h

a) $7 \text{ h } 71 \text{ min } 29 \text{ s} = 8 \text{ h } 11 \text{ min } 29 \text{ s}$

b) $11 \text{ h } 87 \text{ min } 58 \text{ s} = 12 \text{ h } 27 \text{ min } 58 \text{ s}$

c) $14 \text{ h } 42 \text{ min}$

d) $7 \text{ h } 73 \text{ min } 12 \text{ s} = 8 \text{ h } 13 \text{ min } 12 \text{ s}$

12 Calcula:

a) 4 h 15 min 3 s – 3 h 23 min 46 s

b) 12 h 8 min 2 s – 6 h 14 min 16 s

c) 12 h 15 min – 3,75 h

d) 6,35 h – 2 h 15 min 21 s

a) $4 \text{ h } 15 \text{ min } 3 \text{ s} = 3 \text{ h } 74 \text{ min } 63 \text{ s}$

$$3 \text{ h } 74 \text{ min } 63 \text{ s} - 3 \text{ h } 23 \text{ min } 46 \text{ s} = 51 \text{ min } 17 \text{ s}$$

b) $12 \text{ h } 8 \text{ min } 2 \text{ s} = 11 \text{ h } 67 \text{ min } 62 \text{ s}$

$$11 \text{ h } 67 \text{ min } 62 \text{ s} - 6 \text{ h } 14 \text{ min } 16 \text{ s} = 5 \text{ h } 53 \text{ min } 46 \text{ s}$$

c) $3,75 \text{ h} = 3 \text{ h } 45 \text{ min}$; $12 \text{ h } 15 \text{ min} = 11 \text{ h } 75 \text{ min}$

$$11 \text{ h } 75 \text{ min} - 3 \text{ h } 45 \text{ min} = 8 \text{ h } 30 \text{ min}$$

d) $6,35 \text{ h} = 6 \text{ h } 21 \text{ min} = 6 \text{ h } 20 \text{ min } 60 \text{ s}$

$$6 \text{ h } 20 \text{ min } 60 \text{ s} - 2 \text{ h } 15 \text{ min } 21 \text{ s} = 4 \text{ h } 5 \text{ min } 39 \text{ s}$$

13 **Calcula:**

- a) $(4 \text{ h } 15 \text{ min } 2 \text{ s}) \times 6$
 b) $(18 \text{ h } 20 \text{ min } 22 \text{ s}) \times 3$
 c) $(22 \text{ h } 15 \text{ min } 16 \text{ s}) \times 4$
 d) $(22 \text{ min } 14 \text{ s}) \times 8$
- a) $24 \text{ h } 90 \text{ min } 12 \text{ s} = 25 \text{ h } 30 \text{ min } 12 \text{ s}$
 b) $54 \text{ h } 60 \text{ min } 66 \text{ s} = 55 \text{ h } 1 \text{ min } 6 \text{ s}$
 c) $88 \text{ h } 60 \text{ min } 64 \text{ s} = 89 \text{ h } 1 \text{ min } 4 \text{ s}$
 d) $176 \text{ min } 112 \text{ s} = 2 \text{ h } 57 \text{ min } 52 \text{ s}$

14 **Calcula:**

- a) $(14 \text{ h } 25 \text{ min } 12 \text{ s}) : 5$ b) $(18 \text{ h } 20 \text{ min } 16 \text{ s}) : 4$
 c) $(13 \text{ h } 20 \text{ min } 12 \text{ s}) : 7$ d) $(15 \text{ h } 10 \text{ min } 14 \text{ s}) : 6$

a) $14 \text{ h } \quad 25 \text{ min} \quad 12 \text{ s} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \hline 2 \text{ h } 53 \text{ min } 2,4 \text{ s} \end{array}$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 60 = 240 \text{ min} \\ 265 \text{ min} \\ 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 20 \\ 0 \end{array}$$

b) $18 \text{ h } \quad 20 \text{ min} \quad 16 \text{ s} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \hline 4 \text{ h } 35 \text{ min } 4 \text{ s} \end{array}$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 60 = 120 \text{ min} \\ 140 \text{ min} \\ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \end{array}$$

c) $13 \text{ h } \quad 20 \text{ min} \quad 12 \text{ s} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \hline 1 \text{ h } 54 \text{ min } 18,8 \text{ s} \end{array}$

$$\begin{array}{r} 6 \cdot 60 = 360 \text{ min} \\ 380 \text{ min} \\ 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 60 = 120 \text{ s} \\ 132 \text{ s} \\ 62 \\ 60 \\ 4 \end{array}$$

d) $15 \text{ h } \quad 10 \text{ min} \quad 14 \text{ s} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \hline 2 \text{ h } 31 \text{ min } 42,3 \text{ s} \end{array}$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 60 = 180 \text{ min} \\ 190 \text{ min} \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 60 = 240 \text{ s} \\ 254 \text{ s} \\ 14 \\ 20 \\ 2 \end{array}$$

15 **Calcula y expresa en forma compleja:**

- a) $7,52 \text{ h} + 2,56 \text{ h}$
 b) $17,25 \text{ h} - 4,66 \text{ h}$
 c) $13,26 \text{ h} \times 4$
 d) $53,04 \text{ h} : 5$
- a) $10,08 \text{ h} = 10 \text{ h } 4 \text{ min } 48 \text{ s}$
 b) $12,59 \text{ h} = 12 \text{ h } 35 \text{ min } 24 \text{ s}$
 c) $53,04 \text{ h} = 53 \text{ h } 2 \text{ min } 24 \text{ s}$
 d) $10,608 \text{ h} = 10 \text{ h } 36 \text{ min } 28,8 \text{ s}$

16 **Multiplica el tiempo de 5 h 35 min 12 s:**

- a) Por 3. b) Por 5.
 c) Por 6. d) Por 10.
- a) $15 \text{ h } 105 \text{ min } 36 \text{ s} = 16 \text{ h } 45 \text{ min } 36 \text{ s}$
 b) $25 \text{ h } 175 \text{ min } 60 \text{ s} = 27 \text{ h } 56 \text{ min}$
 c) $30 \text{ h } 210 \text{ min } 72 \text{ s} = 33 \text{ h } 31 \text{ min } 12 \text{ s}$
 d) $50 \text{ h } 350 \text{ min } 120 \text{ s} = 55 \text{ h } 52 \text{ min}$

17 **Divide el tiempo de 22 h 46 min 16 s:**

- a) Entre 2. b) Entre 4.
 c) Entre 5. d) Entre 10.
- a) $11 \text{ h } 23 \text{ min } 8 \text{ s}$
 b) $5 \text{ h } 41 \text{ min } 34 \text{ s}$
 c) $4 \text{ h } 33 \text{ min } 15,2 \text{ s}$
 d) $2 \text{ h } 16 \text{ min } 37,6 \text{ s}$

18 **Si empleas para estudiar 2 h 30 min cada día, ¿cuántas horas al mes dedicas al estudio?**

Si el mes tiene 30 días, $30 \cdot 2 \text{ h } 30 \text{ min} = 75 \text{ h}$

19 **Si duermes 8 horas diarias, ¿cuántos minutos dedicas al sueño en una semana?**

$8 \cdot 60 \cdot 7 = 3360 \text{ min}$

20 **Si practicas la natación cuatro días a la semana en sesiones de 45 minutos, ¿cuántas horas habrás dedicado a la natación en 15 semanas?**

$15 \cdot 4 \cdot (45 : 60) = 45 \text{ h}$

21 **Un caminante recorre la distancia entre dos ciudades en dos etapas. En la primera etapa emplea 3 h 45 min, y en la segunda etapa 2 h 35 min. ¿Cuánto tiempo ha tardado en recorrer la distancia entre las dos ciudades?**

$3 \text{ h } 45 \text{ min} + 2 \text{ h } 35 \text{ min} = 5 \text{ h } 80 \text{ min} = 6 \text{ h } 20 \text{ min}$

22 Un día en Marte tiene una duración de 24,62 horas y en la Tierra 23,93 horas exactamente. Expresa en forma compleja la diferencia que hay entre la duración de un día en Marte y un día en la Tierra.

$$24,62 \text{ h} - 23,93 \text{ h} = 0,69 \text{ h} = 41 \text{ min } 24 \text{ s}$$

23 Un grifo defectuoso pierde tres gotas de agua por minuto. Si cada gota de agua son 2 mL, ¿cuántos litros de agua pierde al cabo de un día?

$$3 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 0,002 = 8,64 \text{ L}$$

24 Si Ana se duerme cada día a las 22 h 30 min y se despierta a las 7 h 15 min, de lunes a viernes, ¿cuánto tiempo dormirá durante cuatro semanas de lunes a viernes?

$$8 \text{ h } 45 \text{ min} \cdot 5 \cdot 4 = 175 \text{ h}$$

25 La duración de un día en Júpiter es de 9,84 horas. Aitor duerme 8 horas diarias. Si viviese en Júpiter y durmiese la misma proporción de tiempo que en la Tierra, expresa en forma compleja el tiempo que dormiría.

$$\frac{9,84}{24} = \frac{x}{8}; x = 3,28 \text{ h} = 3 \text{ h } 16 \text{ min } 48 \text{ s}$$

26 Un tren de alta velocidad recorre 190 km en una hora. Calcula qué distancia recorre en 2 h 55 min.

$$\frac{190}{60} = \frac{x}{175}; x = 554,17 \text{ km}$$

27 Si Óscar tiene en reposo 18 pulsaciones en 15 segundos, ¿cuántas pulsaciones tendrá en 1,25 minutos?

$$\frac{18}{15} = \frac{x}{75}; x = 90 \text{ pulsaciones}$$

MEDIDAS DE ÁNGULOS

28 Utiliza la forma decimal para expresar:

a) $123^\circ 15' 50''$ en grados.

b) $5' 26''$ en minutos.

c) $158^\circ 55'$ en grados.

d) $10^\circ 20' 52''$ en minutos.

$123^\circ 15' 52''$			Transformación en grados	Grados
123°				123°
	$15'$		$15 : 60 = 0,25^\circ$	$0,25^\circ$
		$52''$	$52 : 3600 = 0,014$	$0,014^\circ$
				$123,264^\circ$

$5' 26''$			Transformación en minutos	Minutos
$5'$				$5'$
	$26''$		$26 : 60 = 0,43'$	$0,43'$
				$5,43'$

$158^\circ 55'$			Transformación en grados	Grados
158°				158°
	$55'$		$55 : 60 = 0,92^\circ$	$0,92^\circ$
				$158,92^\circ$

$10^\circ 20' 52''$			Transformación en minutos	Minutos
10°			$10 \cdot 60 = 600'$	$600'$
	$20'$		$20'$	$20'$
		$52''$	$52 : 60 = 0,87'$	$0,87'$
				$620,87'$

29 Utiliza la forma compleja para expresar:

a) $245,86^\circ$

b) $16,02^\circ$

c) $152,35^\circ$

d) $136,26^\circ$

$$\begin{aligned} \text{a) } 245,86^\circ &= 245^\circ + 0,86 \cdot 60 = 245^\circ + 51,60' = \\ &= 245^\circ 51' + 0,60 \cdot 60 = 245^\circ 51' 36'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 16,02^\circ &= 16^\circ + 0,02 \cdot 60 = 16^\circ + 1,2' = \\ &= 16^\circ 1' + 0,2 \cdot 60 = 16^\circ 1' 12'' \end{aligned}$$

$$\text{c) } 152,35^\circ = 152^\circ + 0,35 \cdot 60 = 152^\circ 21'$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 136,26^\circ &= 136^\circ + 0,26 \cdot 60 = 136^\circ 15,60' = \\ &= 136^\circ 15' + 0,6 \cdot 60 = 136^\circ 15' 36'' \end{aligned}$$

30 Dados los ángulos $A = 225^\circ 4' 30''$, $B = 30^\circ 15' 45''$ y $C = 75^\circ 15' 25''$, calcula:

a) $A - B + C$

b) $2A - 3B$

c) $B : 3$

d) $2C : 5$

a) $270^\circ 4' 10''$

b) $359^\circ 21' 45''$

c) $10^\circ 5' 15''$

d) $30^\circ 6' 10''$

31 Dados los ángulos $A = 25^\circ 12' 32''$, $B = 42^\circ 18' 54''$ y $C = 15^\circ 20' 57''$, calcula:

a) $A + B + C$

b) $A + B - C$

c) $4 \cdot A$

d) $B : 9$

a) $82^\circ 52' 23''$

b) $52^\circ 10' 29''$

c) $110^\circ 50' 8''$

d) $4^\circ 42' 6''$

32 ■■■ La órbita del planeta Mercurio alrededor del Sol dura 87,97 días. Calcula la medida del ángulo que recorre Mercurio cada día en su movimiento de traslación alrededor del Sol y expresa el resultado en forma compleja.

$$\frac{87,97}{360} = \frac{1}{x}; x = 4,09^\circ = 4^\circ + 0,09 \cdot 60 = 4^\circ 5,4' = 4^\circ 5' + 0,4 \cdot 60 = 4^\circ 5' 24''$$

ÁNGULOS EN EL PLANO. RELACIONES

33 ■ ■ ■ Calcula la medida del ángulo complementario de los ángulos:

a) $23^\circ 15'$ b) $75^\circ 15' 30''$

c) 75° d) $50^\circ 12' 35''$

a) $89^\circ 60' - 23^\circ 15' = 66^\circ 45'$

b) $89^\circ 59' 60'' - 75^\circ 15' 30'' = 14^\circ 44' 30''$

c) $90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$

d) $89^\circ 59' 60'' - 50^\circ 12' 35'' = 39^\circ 47' 25''$

34 ■ ■ ■ Calcula la medida del ángulo suplementario de los ángulos:

a) $125^\circ 35' 50''$ b) $90^\circ 45' 55''$

c) $150^\circ 30' 45''$ d) $20^\circ 30' 47''$

a) $179^\circ 59' 60'' - 125^\circ 35' 50'' = 54^\circ 24' 10''$

b) $179^\circ 59' 60'' - 90^\circ 45' 55'' = 89^\circ 14' 5''$

c) $179^\circ 59' 60'' - 150^\circ 30' 45'' = 29^\circ 29' 15''$

d) $179^\circ 59' 60'' - 20^\circ 30' 47'' = 159^\circ 29' 13''$

35 ■ ■ ■ La intersección de dos rectas determina ángulos opuestos. La suma de dos de los ángulos opuestos por el vértice es $76^\circ 30'$. Calcula la medida de los cuatro ángulos formados.

$$360^\circ - 76^\circ 30' = 283^\circ 30'$$

Hay dos ángulos de $38^\circ 15'$ y dos ángulos de $141^\circ 45'$.

36 ■ ■ ■ Completa en tu cuaderno la tabla:

Ángulo	$25^\circ 12' 6''$	$36^\circ 15' 24''$	$64^\circ 38' 12''$
Complementario	$89^\circ 59' 60'' - 25^\circ 12' 6'' = 64^\circ 47' 54''$	$89^\circ 59' 60'' - 36^\circ 15' 24'' = 53^\circ 44' 36''$	$89^\circ 59' 60'' - 64^\circ 38' 12'' = 25^\circ 21' 48''$
Suplementario	$179^\circ 59' 60'' - 25^\circ 12' 6'' = 154^\circ 47' 54''$	$179^\circ 59' 60'' - 36^\circ 15' 24'' = 143^\circ 44' 36''$	$179^\circ 59' 60'' - 64^\circ 38' 12'' = 115^\circ 21' 48''$

37 ■ ■ ■ Dado un ángulo de medida $48^\circ 12' 16''$, determina:

a) ¿Cuánto mide el ángulo formado por su bisectriz y la bisectriz de su ángulo complementario?

b) ¿Cuánto vale el ángulo formado por su bisectriz y la bisectriz de su ángulo suplementario?

a) Calculamos la bisectriz del ángulo.

$$48^\circ 12' 16'' : 2 = 24^\circ 6' 8''$$

Calculamos el ángulo complementario.

$$89^\circ 59' 60'' - 48^\circ 12' 16'' = 41^\circ 47' 44''$$

Calculamos la bisectriz del ángulo complementario.

$$41^\circ 47' 44'' : 2 = 20^\circ 53' 52''$$

El ángulo formado por las dos bisectrices es:

$$24^\circ 6' 8'' + 20^\circ 53' 52'' = 45^\circ$$

b) Calculamos el ángulo suplementario.

$$179^\circ 59' 60'' - 48^\circ 12' 16'' = 131^\circ 47' 44''$$

Calculamos la bisectriz del ángulo suplementario.

$$131^\circ 47' 44'' : 2 = 65^\circ 53' 52''$$

El ángulo formado por las dos bisectrices es:

$$24^\circ 6' 8'' + 65^\circ 53' 52'' = 90^\circ$$

ÁNGULOS DE UN POLÍGONO

38 ■ ■ ■ Elena va a construir una cometa con forma de romboide. Si quiere que uno de sus ángulos mida $45^\circ 15'$, ¿cuánto medirán los demás ángulos del romboide?

El otro mide lo mismo, es decir $45^\circ 15'$, y cada uno de los otros dos es:

$$\frac{360^\circ - 45^\circ 15' \cdot 2}{2} = 134^\circ 45'$$

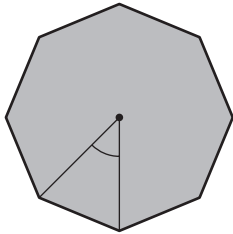
39 ■ ■ ■ En un polígono la medida de un ángulo interior es $35^\circ 30'$. ¿Cuánto mide el ángulo exterior correspondiente al mismo vértice?

$$179^\circ 59' 60'' - 35^\circ 30' = 144^\circ 30'$$

40 ■ ■ ■ Un triángulo tiene un ángulo de $112^\circ 15' 12''$ y otro ángulo de $15^\circ 12' 48''$. Calcula la medida del tercer ángulo.

$$179^\circ 59' 60'' - 112^\circ 15' 12'' - 15^\circ 12' 48'' = 52^\circ 32'$$

- 41** ■ En un octógono regular, ¿cuáles son las medidas del ángulo interior y del ángulo central?



El ángulo central es el cociente de 360° entre el número de lados de la figura:

$$360^\circ : 8 = 45^\circ$$

Para calcular el ángulo interior, tenemos en cuenta que la suma de los ángulos interiores de un polígono es:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = (8 - 2) \cdot 180^\circ = 135^\circ$$

- 42** ■ Obtén de forma razonada la suma de los ángulos interiores de un decágono.

La suma de los ángulos interiores de un polígono es:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = (10 - 2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$$

- 43** ■ Asocia cada polígono con la suma de sus ángulos interiores:

Pentágono	→	360°
Octógono	→	540°
Hexágono	→	1080°
Cuadrilátero	→	720°

- 44** ■ En una torre de planta heptagonal regular, ¿cuál es la medida del ángulo interior?, ¿y la del ángulo central?

Calculamos la suma de los ángulos interiores:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = (7 - 2) \cdot 180^\circ = 900^\circ$$

Por lo que el ángulo interior es:

$$900^\circ : 7 = 128,57^\circ$$

El ángulo central es el cociente de 360° entre el número de lados de la figura:

$$360^\circ : 7 = 51,43^\circ$$

- 45** ■ Si el ángulo central de un polígono regular mide 60° , ¿de qué polígono regular se trata? ¿Cuánto miden los ángulos interiores y exteriores?

El ángulo central es:

$$360^\circ : 60^\circ = 6 \text{ lados, es decir, un hexágono.}$$

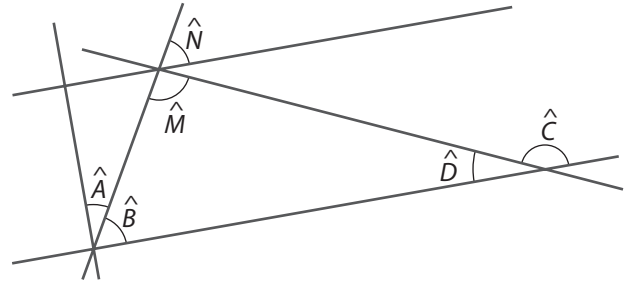
Calculamos la suma de los ángulos interiores:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = (6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

El ángulo interior es: $720^\circ : 6 = 120^\circ$

El ángulo exterior es: $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

- 46** ■ Calcula los ángulos indicados en la figura sabiendo que $\hat{M} = 84^\circ 36'$ y $\hat{N} = 60^\circ 20'$.



$$\hat{B} = \hat{N} = 60^\circ 20'; \hat{A} = 90^\circ - 60^\circ 20' = 29^\circ 40'$$

$$\hat{M} = 90^\circ; \hat{D} = \hat{A} = 29^\circ 40'$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{D} = 180^\circ - 29^\circ 40' = 140^\circ 20'$$

- 47** ■ Un romboide tiene un ángulo de $35^\circ 20'$. Calcula la medida de todos sus ángulos.

Un romboide tiene ángulos iguales dos a dos, por lo que el otro ángulo es de $35^\circ 20'$. La medida de los otros dos ángulos es:

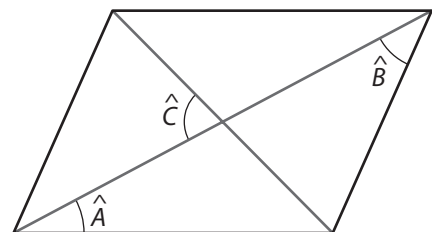
$$\frac{360^\circ - 2 \cdot (35^\circ 20')}{2} = 144^\circ 40'$$

- 48** ■ En un cuadrilátero se conocen tres ángulos: $\hat{A} = 28^\circ 15'$, $\hat{B} = 85^\circ 19'$ y $\hat{C} = 140^\circ$. ¿Cuál es la medida del cuarto ángulo?

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360° . Para calcular el ángulo que falta:

$$360^\circ - 28^\circ 15' - 85^\circ 19' - 140^\circ = 106^\circ 26'$$

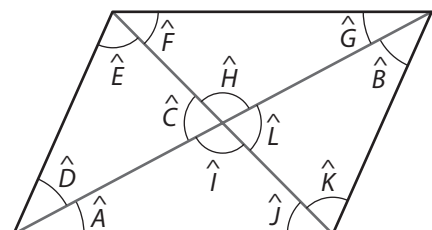
- 49** ■ Calcula la medida de todos los ángulos del paralelogramo si $\hat{A} = 28^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ y $\hat{C} = 68^\circ$.



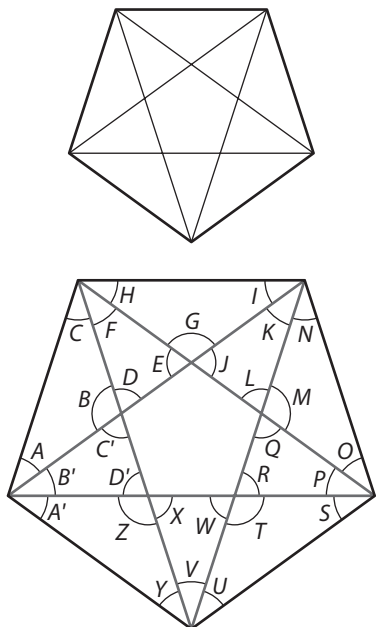
$$\hat{D} = \hat{B} = 35^\circ; \hat{G} = \hat{A} = 28^\circ; \hat{L} = \hat{C} = 68^\circ$$

$$\hat{E} = 180^\circ - \hat{D} - \hat{C} = 77^\circ; \hat{K} = \hat{E} = 77^\circ; \hat{H} = 180^\circ - \hat{C} = 112^\circ;$$

$$\hat{I} = \hat{H} = 112^\circ; \hat{J} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{I} = 40^\circ; \hat{F} = \hat{J} = 40^\circ$$



50 ■■■ En un pentágono regular se trazan todas las diagonales y se obtiene un pentágono estrellado.



Sabiendo que el ángulo interior del pentágono regular mide 108° , calcula la medida de todos los ángulos del pentágono estrellado.

En el pentágono que se forma en el interior, todos los ángulos miden lo mismo: 108° .

$$\hat{B} = \hat{G} = \hat{M} = \hat{T} = \hat{Z} = 108^\circ$$

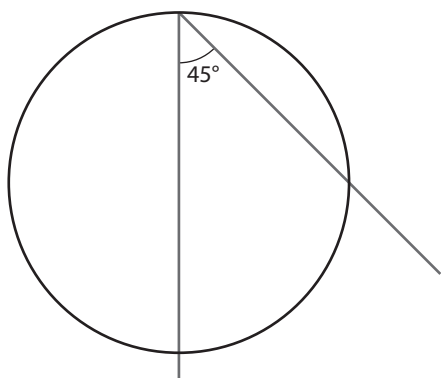
$$D = E = J = L = Q = R = W = X = D' = C' = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

$$F = K = P = V = B' = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$$

$$A = C = H = I = N = O = S = U = Y = A' = \frac{108^\circ - 36^\circ}{2} = 36^\circ$$

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

51 ■■ Dibuja en una circunferencia ángulos inscritos cuyos lados abarquen un arco de 90° . Deduce la medida de los ángulos inscritos y comprueba los resultados con un transportador.



El ángulo inscrito es 45° .

52 ■■ Un hexágono regular está inscrito en una circunferencia.

a) Calcula la medida del ángulo central.

b) Si desde un vértice se trazan todas las diagonales, ¿cuánto miden los ángulos inscritos que se obtienen?

c) Calcula la medida del ángulo exterior del hexágono regular.

a) El ángulo central de un hexágono regular es:

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

b) El ángulo inscrito es la mitad del arco que abarcan sus lados:

$$\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

c) El ángulo exterior es la mitad de la diferencia de los arcos que abarcan sus lados:

$$\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

53 ■■ Dibuja en una circunferencia un decágono regular y numera los vértices de 1 a 10. Traza rectas que pasen por los vértices indicados, nombra qué tipo de ángulo se obtiene y calcula su medida:

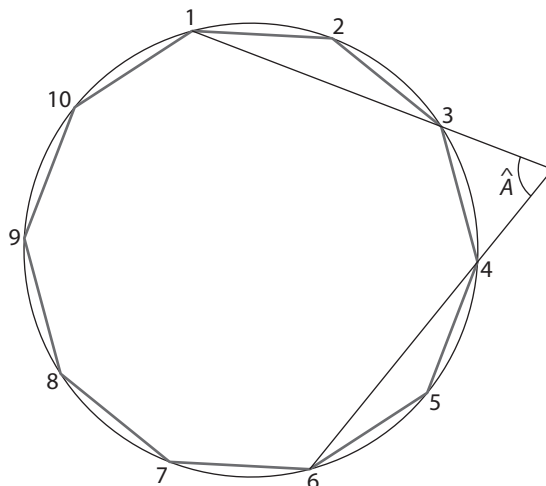
a) Rectas por los vértices 1 y 3, 4 y 6.

b) Rectas por los vértices 10 y 3, 10 y 5.

c) Rectas por los vértices 10 y 6, 7 y 1.

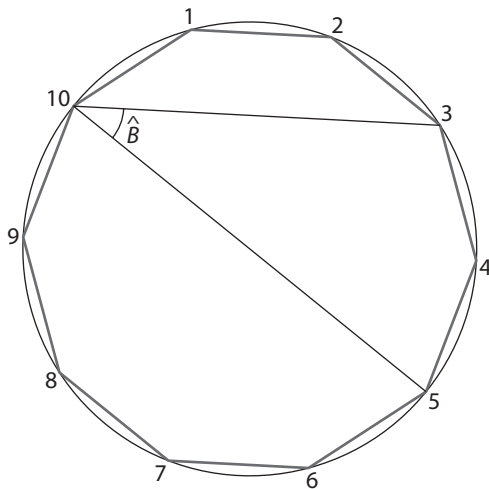
d) Rectas por los vértices 3 y 6 y por el centro del polígono.

a) El ángulo central de un decágono regular es $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.



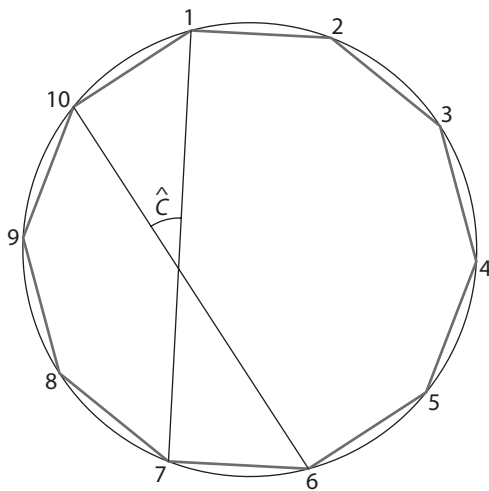
$$\hat{A} = \frac{36^\circ \cdot 5 - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

b)



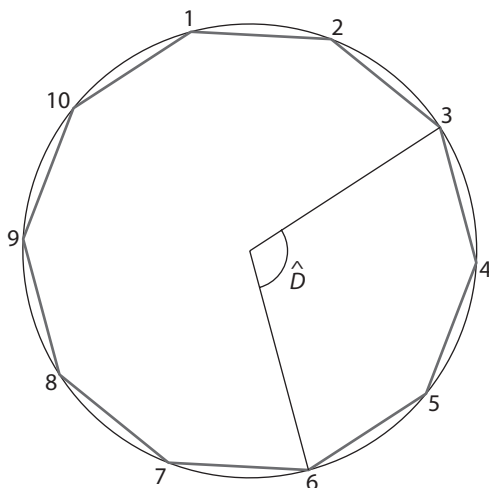
$$\hat{B} = \frac{36^\circ \cdot 2}{2} = 36^\circ$$

c)



$$\hat{C} = \frac{36^\circ + 36^\circ}{2} = 36^\circ$$

d)



$$\hat{D} = 36^\circ \cdot 3 = 108^\circ$$

54 El reloj del ayuntamiento tiene forma circular y están marcadas 12 horas. Utiliza una regla y un compás para dibujar los siguientes ángulos e indica en cada caso qué tipo de ángulo es y cuál es su medida. Comprueba los resultados con un transportador.

- El ángulo que se forma uniendo el centro O con la marca que corresponde a las 12 h y a las 4 h.
- El ángulo que se forma uniendo la marca de las 12 h con la de las 8 h y la marca de las 8 h con la de las 5 h.
- El ángulo formado por la cuerda que pasa por 12 y 4 y por la cuerda que pasa por 1 y 8.
- El ángulo formado por la cuerda que pasa por 1 y 9 y por la cuerda que pasa por 8 y 5.
- El ángulo formado por la cuerda que pasa por 2 y 9 y por la tangente a la circunferencia en la marca que corresponde a las 2 h.
- El ángulo formado por las tangentes a la circunferencia en la marca 12 y en la marca 2.

- | | | |
|---------|---------|---------|
| a) 120° | b) 75° | c) 75° |
| d) 45° | e) 120° | f) 150° |

EJERCICIOS

■ 1 Indica qué rectángulos son semejantes:

- a) Base 25 cm, altura 12 cm y base 30 cm, altura 14 cm.
 b) Base 30 m, altura 24 m y base 10 m, altura 8 m.
 c) Base 0,75 dm, altura 0,25 dm y base 1,50 m, altura 50 cm.

a) $\frac{30}{25} \neq \frac{14}{12}$ b) $\frac{30}{10} = \frac{24}{8}$ c) $\frac{0,75}{15} = \frac{0,25}{5}$

Son semejantes b) y c).

■ 2 La razón de semejanza de dos cuadrados es 1,5. El cuadrado de menor tamaño tiene un perímetro de 20 cm. Calcula:

- a) El perímetro del cuadrado mayor.
 b) El área de cada uno de ellos.

a) $\frac{P}{20} = 1,5$; $P = 30$ cm

b) El lado de cada cuadrado es:

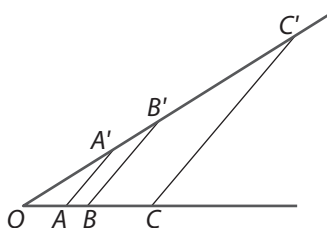
$\frac{30}{4} = 7,5$ cm y $\frac{20}{4} = 5$ cm respectivamente.

El área del cuadrado es $A = l^2$, por lo que:

$A = 7,5^2 = 56,25$ cm²; $A = 5^2 = 25$ cm²

■ 3 Calcula las medidas de los segmentos $A'B'$, OB' y $B'C'$, si:

$OA = 2$ cm, $OA' = 5$ cm, $AB = 1$ cm, $BC = 3$ cm



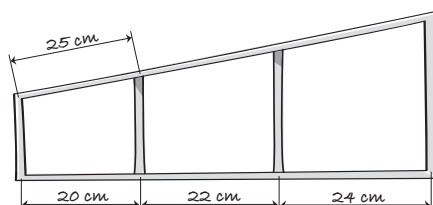
Aplicamos el teorema de Tales:

$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{1}{A'B'} \Leftrightarrow A'B' = 2,5$ cm

$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{OB'} \Leftrightarrow OB' = 7,5$ cm

$\frac{OA}{OA'} = \frac{BC}{B'C'} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{B'C'} \Leftrightarrow B'C' = 7,5$ cm

■ 4 Observa la valla del dibujo. Si en el lado inclinado la medida correspondiente a 20 cm es 25 cm, calcula las medidas de las distancias de los restantes barrotes.



Llamamos x e y a las longitudes de los dos barrotes del lado inclinado y aplicamos el teorema de Tales:

$\frac{25}{20} = \frac{x}{22} \Leftrightarrow x = 27,5$ cm

$\frac{25}{20} = \frac{y}{24} \Leftrightarrow y = 30$ cm

■ 5 Aplicando los criterios de semejanza, justifica si los triángulos ABC y MNP son semejantes:

a) $A = 60^\circ$ $B = 45^\circ$
 $M = 75^\circ$ $N = 60^\circ$

b) $AB = 10$ cm $AC = 12$ cm $A = 35^\circ$
 $MN = 20$ cm $MP = 16$ cm $M = 35^\circ$

c) $AB = 10$ cm $AC = 12$ cm $BC = 15$ cm
 $MN = 15$ cm $MP = 18$ cm $NP = 22,5$ cm

d) $AB = 10$ cm $AC = 12$ cm $BC = 15$ cm
 $MN = 20$ cm $MP = 24$ cm $NP = 18$ cm

a) $C = 75^\circ$. Son semejantes por tener dos ángulos iguales.

b) $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} \Leftrightarrow \frac{10}{20} \neq \frac{12}{16}$. No son semejantes.

c) $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} \Leftrightarrow \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{15}{22,5}$. Son semejantes.

d) $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} \Leftrightarrow \frac{10}{20} = \frac{12}{24} \neq \frac{15}{18}$. No son semejantes.

■ 6 Construye en una cartulina dos triángulos, uno de lados 6 cm, 8 cm y 10 cm, y otro de lados 9 cm, 12 cm y 15 cm.

Comprueba que estos triángulos son semejantes situándolos en posición de Tales y calcula la razón de semejanza.

$\frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = 0,67$

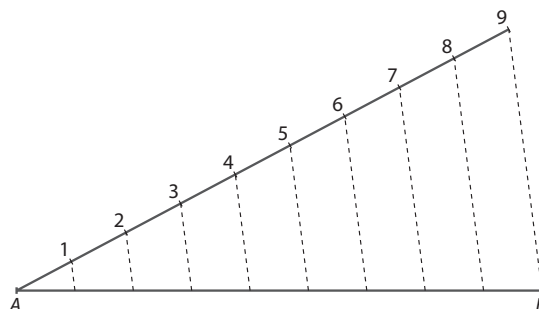
■ 7 Los triángulos ABC y MNP son semejantes con razón de semejanza 3. Si:

$AB = 5$ cm, $AC = 10$ cm y $A = M = 40^\circ$

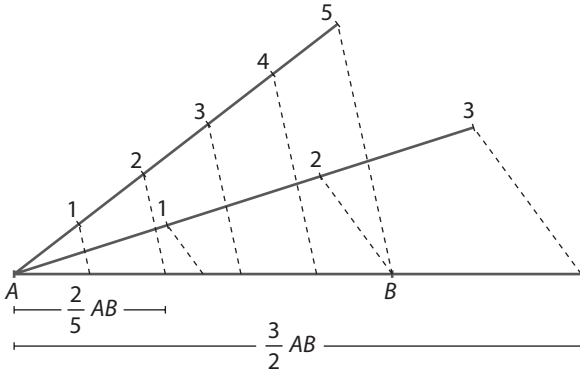
calcula la medida de los lados MN y MP .

$\frac{AB}{MN} = 3 \Leftrightarrow MN = \frac{5}{3}$ cm; $\frac{AC}{MP} = 3 \Leftrightarrow MP = \frac{10}{3}$ cm.

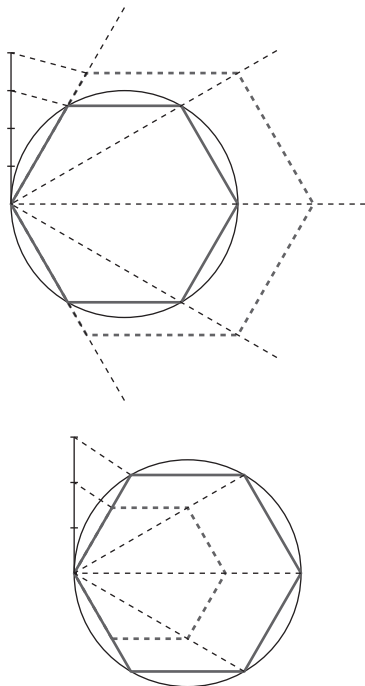
■ 8 Utilizando el teorema de Tales, divide el segmento AB de 8 cm de longitud en nueve partes iguales.



- 9** Empleando el teorema de Tales, construye los $\frac{3}{2}$ y los $\frac{2}{5}$ del segmento AB de longitud 10 cm.



- 10** Dibuja un hexágono inscrito en una circunferencia de 6 cm de radio. Construye uno semejante a él con razón de semejanza $\frac{4}{3}$ y otro de razón $\frac{2}{3}$.



- 11** Si un aula rectangular mide 10 metros de ancho y 14 metros de largo, ¿cuáles son las medidas del dibujo a escala 1:125?

$$\frac{1}{125} = \frac{x}{1000} \Leftrightarrow x = 8 \text{ cm de ancho.}$$

$$\frac{1}{125} = \frac{y}{1400} \Leftrightarrow y = 11,20 \text{ cm de largo.}$$

- 12** Dibuja un triángulo de lados 5, 6 y 7 cm. ¿Es un triángulo rectángulo? ¿Cumple el teorema de Pitágoras? Razona tus respuestas.

$$h = \sqrt{5^2 + 6^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{61} \Leftrightarrow h = 7,8 \text{ cm. No cumple el teorema de Pitágoras.}$$

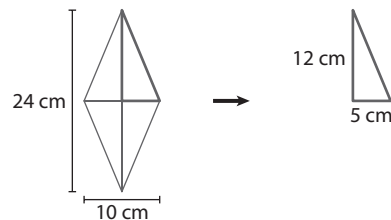
- 13** En un triángulo rectángulo se conoce la medida de la hipotenusa, 17 cm, y de uno de los catetos, 15 cm, ¿cuál es la longitud del otro cateto?

$$c = \sqrt{h^2 - c^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{17^2 - 15^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{64} \Leftrightarrow c = 8 \text{ cm}$$

- 14** Completa la tabla:

Hipotenusa a	Cateto b	Cateto c
20	$b = \sqrt{20^2 - 16^2}$ $b = 12$	16
$h = \sqrt{5^2 + 12^2}$ $h = 13$	5	12
2	1	$c = \sqrt{2^2 - 1^2}$ $c = \sqrt{3}$
26	24	$c = \sqrt{26^2 - 24^2}$ $c = 10$

- 15** Si las diagonales de un rombo miden 24 cm y 10 cm, calcula la longitud del lado.



El triángulo rectángulo que se forma tiene como longitud de los lados 12 cm y 5 cm. La longitud del lado del rombo es la hipotenusa:

$$h = \sqrt{12^2 + 5^2} \Leftrightarrow h = 13 \text{ cm}$$

- 16** La diagonal de un cuadrado es 5,66 dm. ¿Cuál es la longitud del lado?

La diagonal del cuadrado es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma con los lados.

$$h = \sqrt{2l^2} \Leftrightarrow h = l\sqrt{2} \Leftrightarrow l = \frac{h}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow l = \frac{5,66}{1,41} \Leftrightarrow l = 4 \text{ dm}$$

- 17** Calcula la apotema de un hexágono regular de lado 3 dm.

$$a = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ dm}$$

- 18** Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

$$h = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{64 - 16} \Leftrightarrow h = \sqrt{48} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

FIGURAS SEMEJANTES

1 Una fotografía de tamaño 10 cm × 15 cm se amplía a un formato de 15 cm × 20 cm. ¿Son semejantes las fotografías?

$$\frac{10}{15} = 0,67; \frac{15}{20} = 0,75$$

La razón de semejanza no es igual. No son semejantes.

2 Si una fotografía de 10 cm × 15 cm se amplía un 25 %, ¿cuáles son las medidas de la fotografía ampliada?

$$10 \cdot 1,25 = 12,5 \text{ cm}; 15 \cdot 1,25 = 18,75 \text{ cm}$$

3 ¿Cuál es la razón de semejanza entre una DIN A4 y una DIN A3?

El tamaño DIN A4 es 210 mm × 297 mm. El tamaño DIN A3 es 297 mm × 420 mm.

$$\frac{210}{297} = 0,71; \frac{297}{420} = 0,71. \text{ La razón de semejanza es } 0,71.$$

4 Razona si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

- a) Todos los cuadrados son semejantes.
- b) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.
- c) Todos los hexágonos regulares son semejantes.
- d) Dos polígonos son semejantes si tienen todos sus ángulos iguales dos a dos.
- e) Dos polígonos son semejantes si sus lados homólogos son proporcionales.

- a) Verdadero. b) Falso. c) Verdadero.
- d) Verdadero. e) Verdadero.

5 Indica qué rectángulos son semejantes:

- a) Base 75 cm, altura 36 cm y base 90 cm, altura 42 cm.
- b) Base 15 m, altura 12 m y base 5 m, altura 4 m.
- c) Base 1,50 dm, altura 0,50 dm y base 3 m, altura 100 cm.
- d) Base 10 cm, altura 12 cm y base 6 cm, altura 8 cm.

a) $\frac{75}{36} \neq \frac{90}{42}$ no son semejantes.

b) $\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ sí son semejantes.

c) $\frac{1,50}{0,5} = \frac{30}{10}$ sí son semejantes.

d) $\frac{10}{12} \neq \frac{6}{8}$ no son semejantes.

6 Las medidas de los lados de un triángulo son 3 cm, 4 cm y 5 cm. Si la razón de semejanza es 1,5, ¿cuáles son las medidas de los lados de los triángulos semejantes?

Llamamos x , y y z a los lados del triángulo semejante.

$$\frac{x}{3} = 1,5 \Leftrightarrow x = 4,5 \text{ cm} \quad \frac{y}{4} = 1,5 \Leftrightarrow y = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{z}{5} = 1,5 \Leftrightarrow z = 7,5 \text{ cm}$$

7 Los lados de un hexágono miden 4, 6, 10, 12, 16 y 20 cm. Si en un hexágono semejante el lado menor mide 10 cm, calcula la medida de los otros lados.

Calculamos la razón de semejanza:

$$\frac{10}{4} = 2,5. \text{ La razón de semejanza es } 2,5.$$

La medida de los otros lados de menor a mayor es:

$$6 \cdot 2,5 = 15 \text{ cm}; 10 \cdot 2,5 = 25 \text{ cm}; 12 \cdot 2,5 = 30 \text{ cm};$$

$$16 \cdot 2,5 = 40 \text{ cm}; 20 \cdot 2,5 = 50 \text{ cm}.$$

8 Utiliza papel cuadriculado para dibujar dos octógonos semejantes de razón 2.

Un octógono es el doble de grande que el otro.

9 La razón de semejanza de dos triángulos es 0,75. El triángulo de menor tamaño tiene un perímetro de 36 cm. Calcula el perímetro del triángulo mayor.

$$\frac{36}{P} = 0,75 \Leftrightarrow P = \frac{36}{0,75} \Leftrightarrow P = 48 \text{ cm}$$

10 Los lados de un triángulo miden 12, 8 y 6 cm. Calcula la medida de los lados del triángulo semejante cuyo perímetro es 18 cm.

El perímetro del triángulo es: $12 + 8 + 6 = 26 \text{ cm}$.

$$\frac{26}{18} = \frac{12}{x} \Leftrightarrow x = \frac{108}{13} \text{ cm} \quad \frac{26}{18} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = \frac{72}{13} \text{ cm}$$

$$\frac{26}{18} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x = \frac{54}{13} \text{ cm}$$

11 El perímetro del rectángulo A es 24 cm y el perímetro del rectángulo B es 12 cm. Si ambos rectángulos son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza de los lados homólogos?

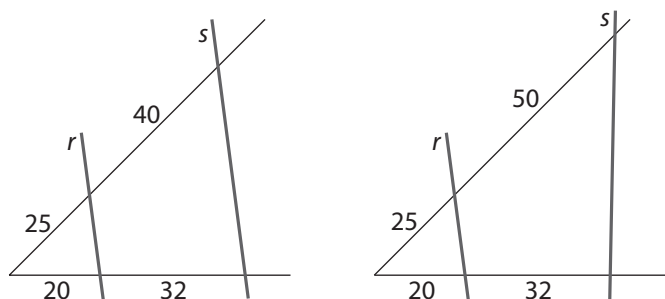
$$\frac{P}{P'} = k \Leftrightarrow \frac{24}{12} = k \Leftrightarrow k = 2$$

12 El área de un rectángulo A es 32 cm² y el área de un rectángulo B es 288 cm². Si los dos rectángulos son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza de los lados homólogos?

$$\frac{A}{A'} = k^2 \Leftrightarrow \frac{32}{288} = k^2 \Leftrightarrow 9 = k^2 \Leftrightarrow k = 3$$

TEOREMA DE TALES

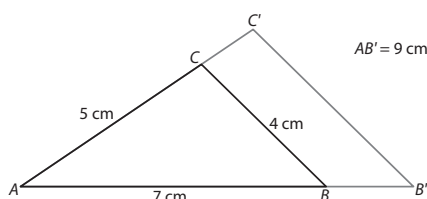
13 ¿En qué casos las rectas r y s son paralelas?



En el primer caso: $\frac{25}{20} = \frac{40}{32} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$. Son paralelas.

En el segundo caso: $\frac{25}{20} \neq \frac{50}{32} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \neq \frac{25}{16}$. No son paralelas.

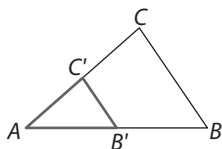
14 Observa la figura y calcula la medida de los lados del triángulo $AB'C'$.



$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{4}{B'C'} \Leftrightarrow B'C' = \frac{36}{7} \text{ cm}$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{5}{AC'} \Leftrightarrow AC' = \frac{45}{7} \text{ cm}$$

15 Construye un triángulo de lados $AB = 12$ cm, $AC = 10$ cm y $BC = 8$ cm. Une los puntos medios de los lados AB y AC y comprueba que el triángulo que se obtiene es semejante al triángulo ABC .



El lado AB' mide 6 cm, y el lado AC' mide 5 cm.

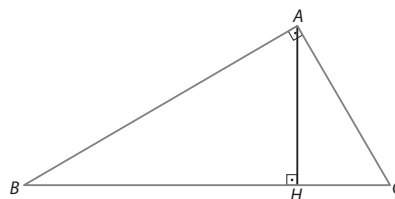
$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \Leftrightarrow \frac{12}{6} = \frac{10}{5} \Leftrightarrow 2$$

La razón de semejanza es 2. Son semejantes.

16 Construye en una cartulina un triángulo cuyos lados midan 4 cm y 7 cm y el ángulo comprendido sea 50° . Construye otro semejante con razón de semejanza 1,5. Comprueba la semejanza de los dos triángulos situándolos en posición de Tales.

Aplicando el teorema de Tales, en el triángulo semejante los lados homólogos miden 6 cm y 10,5 cm respectivamente.

17 ¿Son semejantes los triángulos ABC y AHC de la figura? Razona la respuesta.



Sí son semejantes.

18 Traza diez líneas rectas paralelas y separadas entre sí 1 cm. Recorta una tira de papel en forma de rectángulo de longitud 8 cm y sobre ella marca dos puntos A y B como se indica en el dibujo.



Utiliza el teorema de Tales para determinar cómo se debe situar la tira del papel sobre las rectas paralelas para que puedas dividir el correspondiente segmento AB en 5, 6, 8 y 10 partes iguales.

Se comprueba haciendo la experiencia.

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

19 Aplicando los criterios de semejanza, justifica si los triángulos ABC y DEF son semejantes:

a) ABC y DEF son triángulos rectángulos con $\hat{A} = 55^\circ$ y $\hat{F} = 35^\circ$.

b) $AB = 6$ cm $AC = 8$ cm $\hat{A} = 60^\circ$
 $DE = 4$ cm $DF = 5$ cm $\hat{D} = 60^\circ$

c) $AB = 6$ cm $AC = 9$ cm $BC = 12$ cm
 $DE = 8,4$ cm $DF = 12,6$ cm $EF = 16,8$ cm

d) $BC = 5$ cm $BA = 10$ cm $\hat{B} = 22^\circ$
 $EF = 2,5$ cm $ED = 5$ cm $\hat{E} = 22^\circ$

a) El triángulo ABC tiene los ángulos de 90° , 55° y 35° . Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos iguales.

b) $\frac{8}{5} \neq \frac{6}{4} \Leftrightarrow 1,6 \neq 1,25$. No son semejantes.

c) Calculamos la razón de semejanza:

$$\frac{8,4}{6} = k \Leftrightarrow k = 1,4; \quad \frac{12,6}{9} = k \Leftrightarrow k = 1,4;$$

$$\frac{16,8}{12} = k \Leftrightarrow k = 1,4. \text{ Son semejantes.}$$

d) El ángulo comprendido entre los lados es el mismo, y la razón de semejanza entre los lados es:

$$\frac{10}{5} = \frac{5}{2,5}. \text{ Son semejantes.}$$

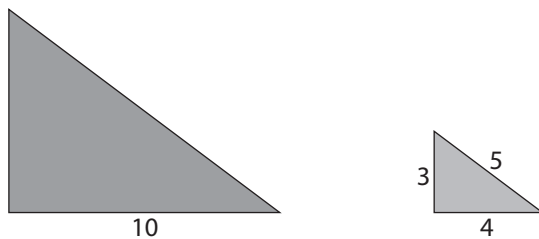
20  Las medidas de los lados de un triángulo son 6 cm, 8 cm y 10 cm. Determina los lados de los triángulos semejantes a él si la razón de semejanza es 0,5.

Llamamos x , y y z a los lados del triángulo semejante. Entonces se cumple que:

$$\frac{6}{x} = 0,5 \Leftrightarrow x = 12 \text{ cm}; \quad \frac{8}{y} = 0,5 \Leftrightarrow y = 16 \text{ cm};$$

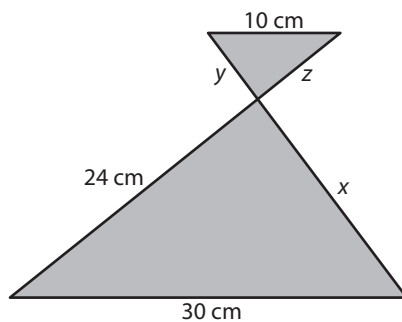
$$\frac{10}{z} = 0,5 \Leftrightarrow z = 20 \text{ cm}$$

21  Si los triángulos de la figura son semejantes, calcula la medida de los lados desconocidos.



$$\frac{10}{4} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = 7,5; \quad \frac{10}{4} = \frac{y}{5} \Leftrightarrow y = 12,5$$

22  Calcula el valor de los segmentos indicados:



$$\frac{30}{10} = \frac{24}{z} \Leftrightarrow z = \frac{24 \cdot 10}{30} \Leftrightarrow z = 8 \text{ cm}$$

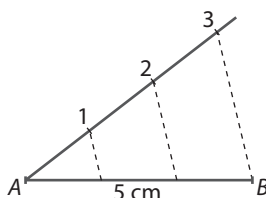
El lado x lo calculamos por el teorema de Pitágoras, ya que es un triángulo rectángulo:

$$x = \sqrt{30^2 - 24^2} \Leftrightarrow x = 18 \text{ cm}$$

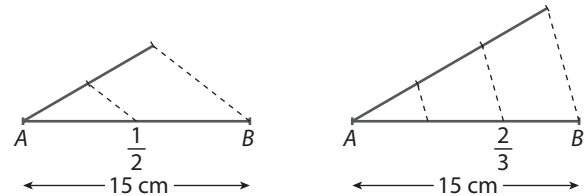
$$\frac{30}{10} = \frac{18}{y} \Leftrightarrow y = \frac{18 \cdot 10}{30} \Leftrightarrow y = 6 \text{ cm}$$

APLICACIONES DE LA SEMEJANZA

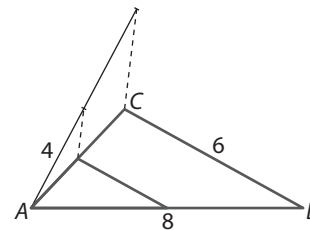
23  Utilizando el teorema de Tales, divide un segmento AB de 5 cm de longitud en 3 partes iguales.



24  Empleando el teorema de Tales, señala $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ del segmento AB de longitud 15 cm.

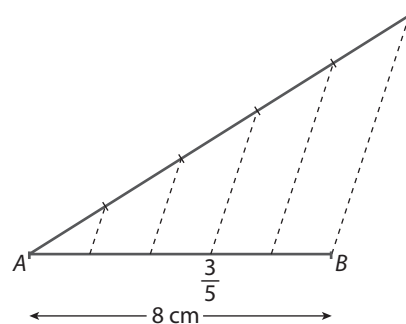


25  Dibuja con regla y compás un triángulo de lados 8 cm, 6 cm y 4 cm. Obtén otro triángulo semejante al anterior con razón de semejanza $\frac{1}{2}$. Calcula la razón entre los perímetros de los dos triángulos.

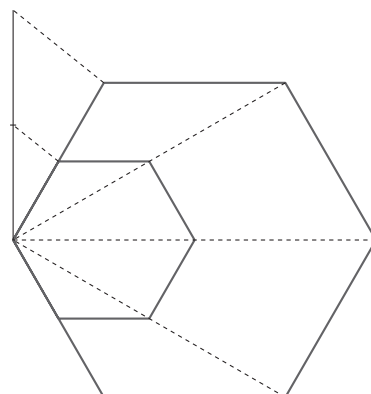


$$\frac{P'}{P} = \frac{4 + 3 + 2}{8 + 6 + 4} \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{9}{18} \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{1}{2}$$

26  Utiliza el teorema de Tales para calcular gráficamente los $\frac{3}{5}$ de un segmento de 8 cm de longitud.



27  Utiliza papel cuadriculado para dibujar dos hexágonos semejantes de razón 1,5.



28  Si se unen los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero se obtiene un triángulo semejante. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuál es la razón entre las áreas de los dos triángulos?

Un triángulo equilátero tiene todos los lados iguales. Llamamos x al lado del triángulo mayor.

El lado del triángulo menor es $\frac{x}{2}$. La razón de semejanza es:

$$\frac{x}{\frac{x}{2}} = k \Leftrightarrow 2 = k. \text{ La razón de semejanza de las áreas es } k^2 = 4.$$

29  Calcula la altura de una casa que proyecta una sombra de 5 metros sabiendo que un árbol de 3 m de alto proyecta una sombra de 1 metro.

$$\frac{x}{5} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow x = 15 \text{ m}$$

30  Dibuja un pentágono inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio. Construye uno semejante a él con razón de semejanza $\frac{1}{3}$ y otro de razón $\frac{3}{4}$.

Para construir un pentágono semejante al inscrito en la circunferencia con razón de semejanza $\frac{1}{3}$, se elige un vértice del pentágono y desde él se trazan semirrectas que pasan por los restantes vértices.

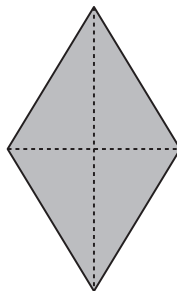
La relación entre los lados del pentágono es:

$$\frac{AE'}{AE} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow AE' = AE \cdot \frac{1}{3}$$

Se calculan $\frac{1}{3}$ del segmento AE , y se obtiene E' . Desde el vértice E' se traza una paralela al lado ED para obtener el vértice D' y así con todos los vértices del nuevo pentágono.

Se procede igual para calcular el pentágono semejante a $\frac{3}{4}$.

31  Obtén un rombo semejante al dado con razón de semejanza $\frac{1}{4}$.



El nuevo rombo obtenido es semejante al dado, pero la longitud de los lados es $\frac{1}{4}$ más pequeña.

32  Dibuja una circunferencia y construye en ella un hexágono regular. Si trazas todas las diagonales obtienes una estrella:

a) Explica qué proceso puedes seguir para obtener una estrella semejante a la anterior con razón de semejanza 2.

b) Comprueba que tu razonamiento es correcto.

a) Construir otro hexágono semejante al inicial de razón 2, es decir, los lados miden el doble que el inicial. Al obtener el nuevo hexágono, se trazan las diagonales y obtenemos la estrella semejante a la inicial pero el doble de grande.

b) Hacer el dibujo para comprobarlo.

33  La escala de la maqueta de una casa es 1:50. Si la puerta de la casa en la maqueta mide 4,5 cm de alto y 3,6 cm de ancho, ¿cuáles son sus medidas reales?

$$\frac{1}{50} = \frac{4,5}{x} \Leftrightarrow x = 50 \cdot 4,5 \Leftrightarrow x = 225 \text{ cm de alto.}$$

$$\frac{1}{50} = \frac{3,6}{y} \Leftrightarrow y = 50 \cdot 3,6 \Leftrightarrow y = 180 \text{ cm de ancho.}$$

34  En un mapa de España, mide la distancia entre la capital de tu provincia y la población más importante y más próxima a ella. Utiliza la escala del mapa para averiguar la distancia real entre esas dos poblaciones.

Respuesta abierta.

35  El plano del instituto está realizado con una escala de 1:100. Si el gimnasio tiene forma rectangular y sus dimensiones son 60 m de largo por 40 m de ancho, ¿cuáles son las dimensiones del gimnasio en el plano?

$$\frac{1}{100} = \frac{x}{6000} \Leftrightarrow x = 60 \text{ cm de largo.}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{x}{4000} \Leftrightarrow x = 40 \text{ cm de ancho.}$$

36  La maqueta de un coche mide 4,2 cm de largo. ¿Cuál es la medida real del coche si la escala de la maqueta es 1:90?

$$\frac{1}{90} = \frac{4,2}{x} \Leftrightarrow x = 4,2 \cdot 90 \Leftrightarrow x = 378 \text{ cm}$$

37  Si la distancia entre dos ciudades es 250 km, ¿a qué distancia en centímetros están sobre un plano a escala 1:25 000?

$$\frac{1}{25000} = \frac{x}{25000000} \Leftrightarrow x = 1000 \text{ cm}$$

38  Si la distancia entre dos ciudades sobre un plano a escala 1:150 000 es 4,5 cm, ¿a qué distancia estarán en un plano a escala 1:25 000?

$$\frac{1}{150000} = \frac{4,5}{x} \Leftrightarrow x = 4,5 \cdot 150000 \Leftrightarrow x = 675000 \text{ cm en la realidad.}$$

$$\frac{1}{25000} = \frac{y}{675000} \Leftrightarrow y = 27 \text{ cm en el segundo plano}$$

TEOREMA DE PITÁGORAS. APLICACIONES

39 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 9 cm y 12 cm. Calcula:

a) La hipotenusa.

b) La hipotenusa de un triángulo semejante con razón de semejanza 3,5.

a) $H = \sqrt{9^2 + 12^2} \Leftrightarrow H = 15 \text{ cm}$

b) $\frac{H'}{H} = k \Leftrightarrow H' = k \cdot H \Leftrightarrow H' = 3,5 \cdot 15 \Leftrightarrow H' = 52,50 \text{ cm}$

40 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 9 y 12 cm. Calcula:

a) El área del triángulo.

b) La hipotenusa.

a) $A = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = \frac{9 \cdot 12}{2} \Leftrightarrow A = 54 \text{ cm}^2$

b) $H = \sqrt{9^2 + 12^2} \Leftrightarrow H = 15 \text{ cm}$

41 La apotema de un hexágono regular mide 3,46 cm. ¿Cuál es la medida del lado del hexágono?

El hexágono regular tiene todos los lados iguales. Está formado por 6 triángulos equiláteros cuyos 3 lados miden igual. Al trazar la apotema se obtiene un triángulo rectángulo cuya hipotenusa vale x y el cateto vale $\frac{x}{2}$.

$$ap = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Leftrightarrow 3,46 = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3,46^2 \cdot 4}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

42 Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 12 cm y el lado desigual 10 cm.

Calculamos la altura por el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{12^2 - 5^2} \Leftrightarrow h = 10,9 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = \frac{5 \cdot 10,9}{2} \Leftrightarrow A = 27,25 \text{ cm}^2$$

43 Las diagonales de un rombo miden 24 cm y 32 cm. Calcula las medidas de los lados, el área y el perímetro.

El lado es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma al trazar las diagonales del rombo.

$$H = \sqrt{12^2 + 16^2} \Leftrightarrow H = 20 \text{ cm}$$

El área del rombo es:

$$A = \frac{D \cdot d}{2} \Leftrightarrow A = \frac{32 \cdot 24}{2} \Leftrightarrow A = 384 \text{ cm}^2$$

El perímetro es $20 \cdot 4 = 80 \text{ cm}$.

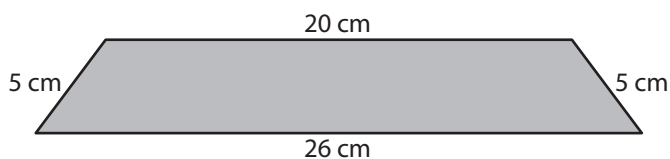
44 Calcula el radio de una circunferencia circunscrita a un cuadrado de lado 10 cm.

El radio de la circunferencia es la mitad de la diagonal del cuadrado:

$$H = \sqrt{l^2 + l^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{2l^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{2 \cdot 10^2} \Leftrightarrow H = 14,14 \text{ cm}$$

El radio de la circunferencia es la mitad, $\frac{14,14}{2} = 7,07 \text{ cm}$.

45 Calcula la altura del siguiente trapecio:



Trazamos la altura desde un vértice de la base menor hasta la base mayor y se obtiene un triángulo rectángulo.

$$\text{La base del triángulo es } \frac{26 - 20}{2} = 3 \text{ cm.}$$

La altura se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras:

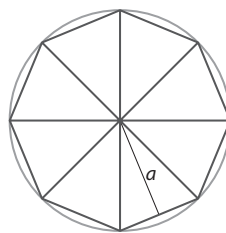
$$H^2 = c^2 - b^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{H^2 - b^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{5^2 - 3^2} \Leftrightarrow c = 4 \text{ cm.}$$

46 Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 1 dm.

Al trazar la altura en el triángulo equilátero se obtiene un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 1 dm y la base mide 0,5 dm. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$H^2 = b^2 - h^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{H^2 - b^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{1^2 - 0,5^2} \Leftrightarrow c = 0,86 \text{ dm}$$

47 Calcula la apotema de un octógono de lado 4 cm y radio de la circunferencia circunscrita 8 cm.



$$ap = \sqrt{8^2 - 2^2} \Leftrightarrow ap = 7,75 \text{ cm}$$

48 Calcula el perímetro de un rombo si las diagonales miden 4 dm y 12 dm.

Calculamos el lado del rombo, que es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se obtiene al trazar las diagonales en el rombo.

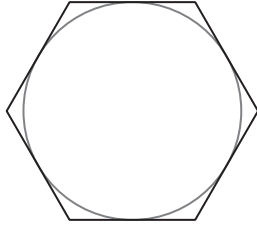
$$H = \sqrt{6^2 + 2^2} \Leftrightarrow H = 6,32 \text{ cm}$$

El perímetro es $4 \cdot 6,32 = 25,28 \text{ cm}$.

49 Si la diagonal de un cuadrado es 5,66 dm, ¿cuál es la longitud del lado?

$$D^2 = 2l^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{D^2}{2}} \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{5,66^2}{2}} \Leftrightarrow l = 4 \text{ dm}$$

50  En una caja con forma de hexágono regular de lado 10 cm se quiere guardar una tarta de forma circular, ¿cuál es el radio de la mayor tarta que puede contener la caja?



La apotema es el radio de la mayor tarta que puede contener la caja.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$ap = \sqrt{H^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} \Leftrightarrow ap = \sqrt{10^2 - 5^2} \Leftrightarrow ap = 8,66 \text{ cm}$$

51  La diagonal de un campo en forma de cuadrado mide $\sqrt{288}$ m. Calcula la medida del lado del campo.

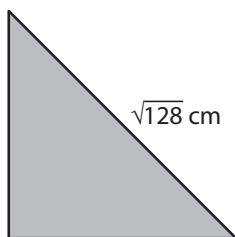
$$D^2 = 2l^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{D^2}{2}} \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{(\sqrt{288})^2}{2}} \Leftrightarrow l = 12 \text{ m}$$

52  Un carpintero construye una puerta de 2 metros de alto por 3 metros de ancho. Si se desea que la puerta tenga forma rectangular, ¿cuál debe ser la medida de la diagonal?

Al trazar la diagonal en el rectángulo se forma el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es dicha diagonal.

$$H = \sqrt{3^2 + 2^2} \Leftrightarrow H = 3,6 \text{ m}$$

53  Halla la medida de los lados de un triángulo rectángulo isósceles si el lado desigual mide $\sqrt{128}$ cm.



El triángulo rectángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno desigual. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$H^2 = c^2 + c^2 \Leftrightarrow H^2 = 2c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{H^2}{2}} \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{(\sqrt{128})^2}{2}} \Leftrightarrow c = 8 \text{ cm}$$

54  Una escalera tiene 10 m de largo y se quiere apoyar en una pared vertical de forma que el extremo superior esté a una altura de 8 metros. ¿A qué distancia de la pared se debe poner el extremo inferior de la escalera?

Hay que calcular la base del triángulo rectángulo que se forma:

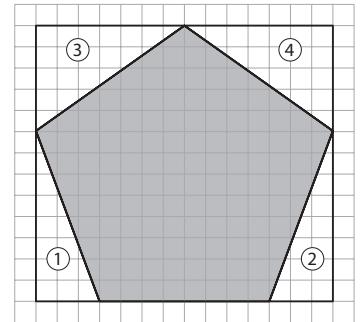
$$b = \sqrt{H^2 - h^2} \Leftrightarrow b = \sqrt{10^2 - 8^2} \Leftrightarrow b = 6 \text{ m}$$

55  Calcula la distancia entre la base del poste derecho y la escuadra izquierda de la portería de fútbol 11.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$H = \sqrt{c^2 + c^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{7,32^2 + 2,44^2} \Leftrightarrow H = 7,72 \text{ m}$$

56  Calcula el perímetro del pentágono de la figura. Utiliza la calculadora para aproximar el resultado hasta las centésimas.



Calculamos la hipotenusa del triángulo 1, que es igual al triángulo 2:

$$H = \sqrt{8^2 + 3^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{73}$$

Calculamos la hipotenusa del triángulo 3, que es igual al triángulo 4:

$$H = \sqrt{7^2 + 5^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{74}$$

El perímetro es la suma de todas las hipotenusas:

$$P = 2\sqrt{73} + 2\sqrt{74} \Leftrightarrow P = 2 \cdot 8,54 + 2 \cdot 8,6 \Leftrightarrow P = 34,28$$

57  Se considera un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 6 cm y su altura 4 cm:

- Calcula la medida de los lados iguales del triángulo.
- Construye un triángulo semejante a él con razón de semejanza 3.
- Comprueba que la razón de semejanza de los perímetros de ambos triángulos es igual a la razón de semejanza de los lados homólogos.
- Comprueba que la razón de las áreas de los dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza de los lados homólogos.

a) Los lados iguales del triángulo es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se obtiene al trazar la altura:

$$H = \sqrt{b^2 + h^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow H = 5 \text{ cm}$$

b) El triángulo semejante tiene triple longitud en todos sus lados.

$$c) \frac{P'}{P} = \frac{15 + 15 + 18}{5 + 5 + 6} \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{48}{16} \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = 3$$

d) Calculamos el área de cada triángulo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = \frac{6 \cdot 4}{2} \Leftrightarrow A = 12 \text{ cm}^2$$

$$A' = \frac{b' \cdot h'}{2} \Leftrightarrow A' = \frac{18 \cdot 12}{2} \Leftrightarrow A' = 108 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{108}{12} \Leftrightarrow \frac{A'}{A} = 9 \Leftrightarrow \frac{A'}{A} = k^2 \Leftrightarrow k = \sqrt{9} \Leftrightarrow k = 3$$

11 POLIEDROS

EJERCICIOS

1 Dibuja una línea recta en tu cuaderno. Describe algún segmento real en el techo de la clase que se cruce con la línea que has dibujado.

Respuesta libre.

2 Determina cuáles de los siguientes objetos están contenidos en un plano: cristal de una ventana, plato, triángulo y libro.

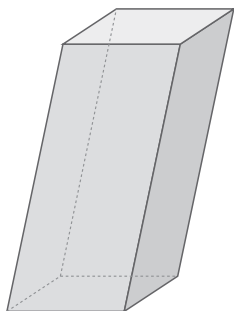
Cristal de una ventana, triángulo.

3 Describe una recta paralela a cada una de las que te proponemos:

- a) La recta que une por el suelo dos esquinas de tu clase.
b) La recta que divide en un tramo recto una carretera en dos carriles.

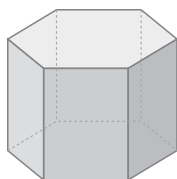
- a) Si la recta es la que une dos esquinas contiguas, la recta paralela pasaría por las dos paredes que son paralelas.
b) La recta paralela sería por ejemplo la recta que marca la línea continua del arcén.

4 En el siguiente poliedro, ¿cuántos ángulos diedros hay? ¿Cuántos de ellos son diferentes? Busca alguno recto.



Hay 12 ángulos diedros. Hay tres tipos de ángulos diferentes. El ángulo que forma la cara lateral que se ve con la base es recto.

5 Imagina que, en el poliedro de la figura, prolongas todas las caras y así obtienes 8 planos.

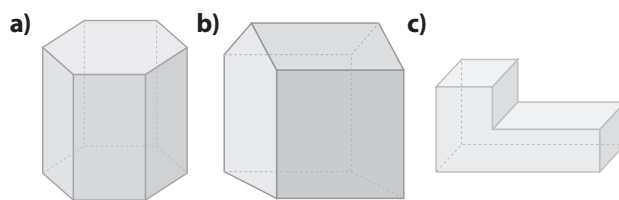


- a) ¿Cuántas parejas de planos paralelos puedes encontrar?
b) ¿Cuántos planos perpendiculares a las bases hay?
c) ¿Cuántos ángulos diedros se forman?

- a) 4 b) 6 c) 18

<http://www.McGraw-Hill.es>

6 ¿Cuántas caras, vértices y aristas hay en los siguientes poliedros?



a) $C = 8, V = 12, A = 18$

b) $C = 9, V = 9, A = 16$

c) $C = 8, V = 12, A = 18$

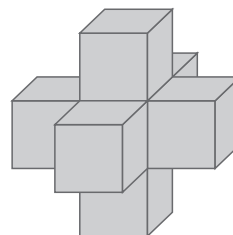
7 Clasifica los poliedros del ejercicio anterior en cóncavos o convexos.

Convexos: a y b; cóncavo: c.

8 ¿Cuántas diagonales tiene el poliedro del ejercicio 6 a)?

18.

9 El poliedro del siguiente dibujo no es regular. ¿Cuál de las tres condiciones para ser regular no se cumple?



En todos los vértices no concurren el mismo número de aristas.

10 Copia en tu cuaderno y completa la tabla:

Poliedro	N.º de aristas que se unen en cada vértice	Ángulos diedros (agudos, obtusos o rectos)
Cubo	3	12 rectos
Tetraedro	3	6 agudos
Octaedro	4	12 obtusos
Dodecaedro	3	30 obtusos
Icosaedro	5	30 obtusos

11 Determina cuáles de los siguientes desarrollos planos corresponden a un tetraedro.

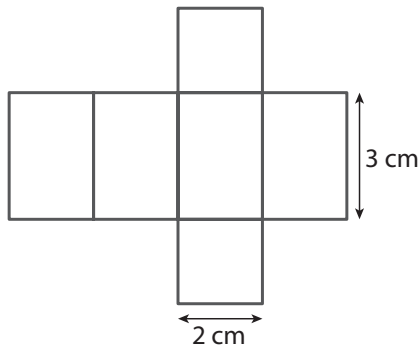


Los tres.

12 Si unes dos tetraedros por una de sus caras, ¿se obtiene un octaedro? Razona tu respuesta.

No. Porque hay dos vértices en los que sólo concurren tres aristas.

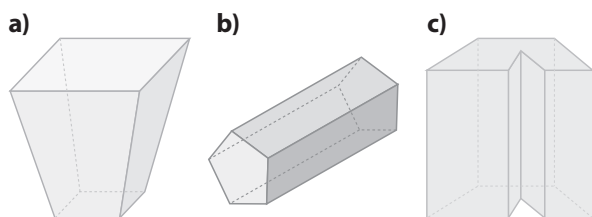
13 Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano de un prisma recto cuadrangular de 3 cm de altura y cuya base tenga 2 cm de lado.



14 Escribe tres objetos cotidianos que tengan forma de prisma. Para cada uno de ellos describe cuál es el polígono que está en la base y da un valor aproximado de su altura.

Una goma de base cuadrada (altura de 1,5 cm). Una caja de zapatos de base rectangular (altura de 15 cm). Un posavasos de madera de base octogonal (altura de 0,5 cm).

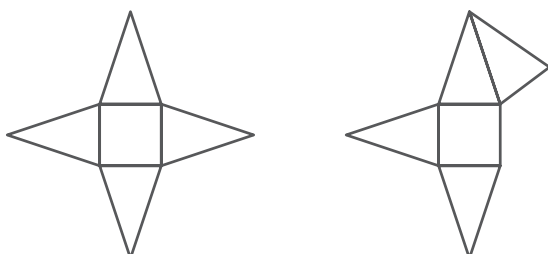
15 ¿Cuáles de los siguientes cuerpos son prismas?



- a) No lo es.
- b) Sí lo es, basta apoyarlo sobre otra cara, la del pentágono.
- c) Sí lo es.

16 ¿Cuántos desarrollos planos diferentes tiene una pirámide cuadrada? Dibuja en tu cuaderno dos de ellos. (Inventa tú las medidas.)

Hay 9 desarrollos.



17 Dibuja en tu cuaderno una tienda india en forma de pirámide cuadrangular. ¿Qué medidas tendrían que tener las aristas para que pueda estar dentro una persona tanto de pie como tumbada?

Supongamos que la persona mide menos de x cm.

Si la circunferencia circunscrita del polígono de la base tiene de diámetro x , ya se puede tumbar. De modo que las aristas de la base pueden ser de $\frac{x}{2}$ centímetros. Además, se puede tumbar poniendo la cabeza, al menos, en 12 puntos distintos, ya que el doble de la apotema es menor que la diagonal del polígono base.

$$a = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}x}{2} \text{ cm.}$$

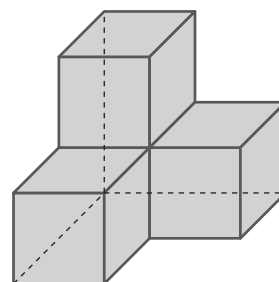
18 Di qué tipo de polígonos son las caras laterales de los troncos de pirámides rectas y también de las oblicuas. (Puedes consultar el comienzo de esta Unidad, en la sección ¿Recuerdas qué es...?)

Trapecios isósceles.

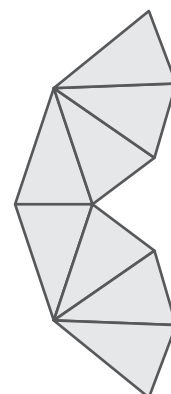
19 Escribe el nombre de los poliedros que se obtienen si un tronco de pirámide de base cuadrada se corta por un plano paralelo a la base.

Dos troncos de pirámide de base cuadrada.

20 Copia en tu cuaderno y dibuja en el poliedro azul de esta página las aristas escondidas con líneas discontinuas.



21 Dibuja un desarrollo plano del poliedro rosa dibujado en esta página.



22 Si se unen un cubo y una pirámide cuadrada por la base de ésta, ¿cuántas caras tendrá el nuevo poliedro?

9 caras.

23 Cuenta las caras, vértices y aristas del poliedro del ejercicio anterior.

9 caras, 9 vértices y 16 aristas.

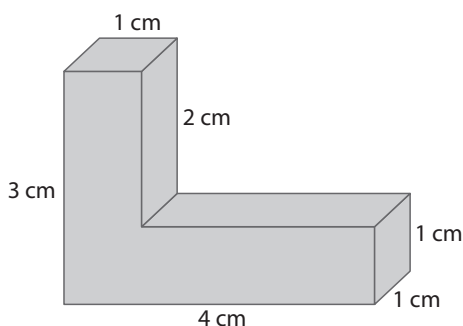
24 Halla el área de un prisma cuadrado de altura 5 cm cuyas bases tienen un lado de 3 cm.

$$A = 2 \cdot A_{\text{base}} + n \cdot l \cdot h \Leftrightarrow A = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 78 \text{ cm}^2$$

25 Halla el área de un cubo cuya arista mide 6 cm.

$$A = 6l^2 \Leftrightarrow A = 6 \cdot 6^2 \Leftrightarrow A = 216 \text{ cm}^2$$

26 Halla el área del siguiente poliedro.



$$\text{Área} = 7 \cdot (3 \cdot 1) + 3 \cdot (1 \cdot 1) + 2 \cdot 1 = 26 \text{ u}^2$$

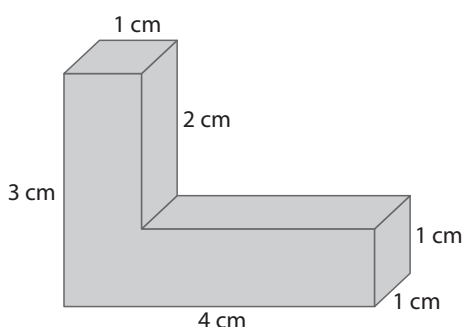
27 Halla el volumen de un prisma cuadrado de altura 5 cm cuyas bases tienen un lado de 3 cm.

$$\text{Volumen} = 3^2 \cdot 5 = 45 \text{ cm}^3$$

28 Halla el volumen de una pirámide cuadrada de altura 8 cm y cuya base tiene de lado 4 cm.

$$\text{Volumen} = 4^2 \cdot 8 : 3 = 42,67 \text{ cm}^3$$

29 Halla el volumen del siguiente poliedro.



$$\text{Volumen} = 4 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ u}^3$$

<http://www.McGraw-Hill.es>

EJERCICIOS PROPUESTOS

RECTAS, PLANOS Y ÁNGULOS EN EL ESPACIO

1 Fíjate en una arista cualquiera de un cubo:

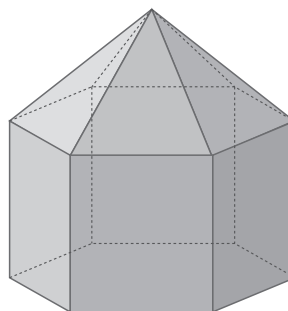
a) ¿Cuántas aristas hay paralelas a ella?

b) ¿Cuántas se cruzan con ella?

a) Tres.

b) Cuatro.

2 La siguiente figura es el esquema de una ermita. Imagina que entras en ella y observas sus diferentes elementos. Sabiendo que el suelo tiene forma de hexágono regular, contesta a las preguntas:



a) ¿Hay algún ángulo diedro recto? ¿Cuál?

b) ¿Cuántos ángulos diedros diferentes tiene?

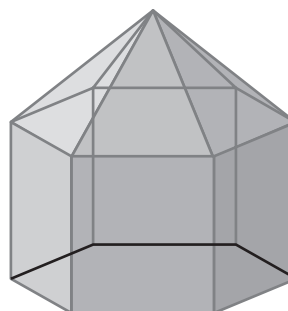
c) ¿Cuántos ángulos poliedros diferentes tiene?

a) Los diedros que forman las caras rectangulares con la base son todos rectos.

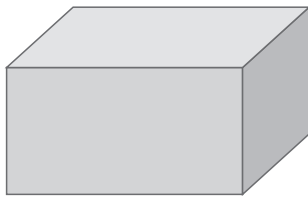
b) 4

c) 3

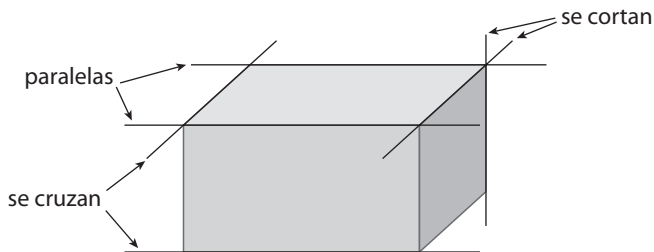
3 Dibuja el poliedro del ejercicio 2 en tu cuaderno. Marca con un color las aristas donde se forma un ángulo diedro agudo y con otro color diferente las aristas donde se forma un ángulo diedro obtuso.



4 Dibuja un prisma como el de la figura en tu cuaderno, traza en línea discontinua las aristas escondidas y marca, utilizando tres colores diferentes:



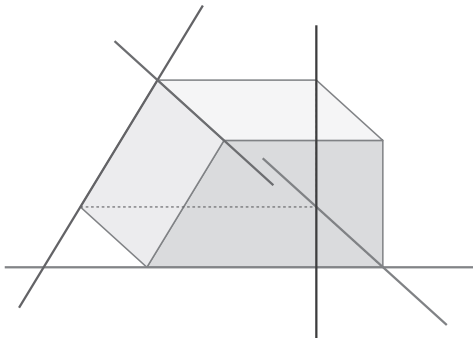
- a) Dos aristas que sean paralelas.
b) Dos aristas que se corten.
c) Dos aristas que se crucen.



5 Cuenta cuántos ángulos poliedros hay en un cubo, en un tetraedro, en un octaedro y en un dodecaedro.

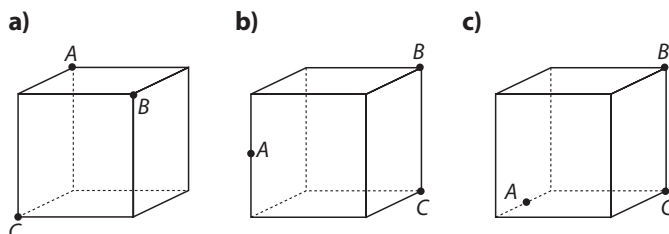
8, 4, 6 y 20.

6 Observa las rectas que se han dibujado en diferentes colores y escribe cómo son entre sí las posiciones de cada par de rectas:



- a) Marrón y azul. b) Naranja y verde.
c) Azul y rosa. d) Naranja y rosa.
a) Marrón y azul: se cortan. b) Naranja y verde: paralelas.
c) Azul y rosa: se cruzan. d) Naranja y rosa: se cruzan.

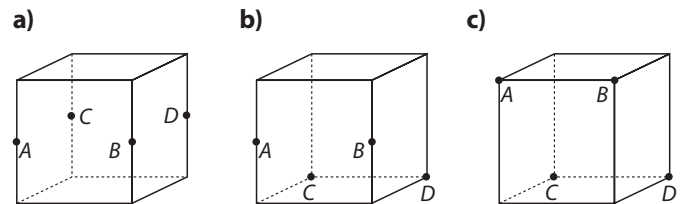
7 Clasifica el triángulo ABC en cada uno de los casos siguientes:



(Aclaración: Debes fijarte en las medidas de cada uno de los tres lados del triángulo, ¿cuáles son iguales?)

- a) Equilátero b) Isósceles c) Escaleno

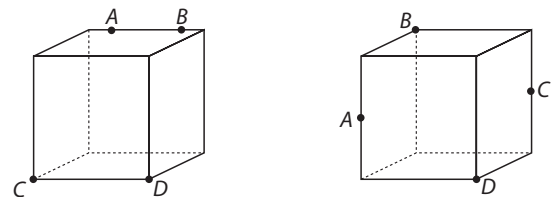
8 Escribe qué polígono es ABCD cuyos vértices se han marcado en un cubo:



- a) Cuadrado.
b) Rectángulo.
c) Trapecio isósceles.

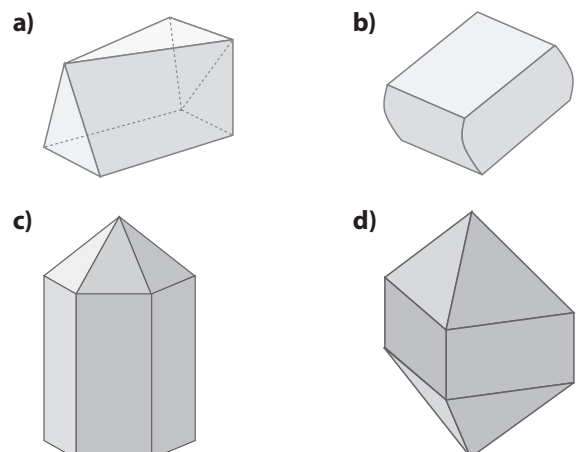
9 De forma similar a como se ha hecho en los dos ejercicios anteriores, dibuja un cubo y marca en sus vértices o aristas los puntos necesarios para obtener:

- a) Un trapecio. b) Un rombo.



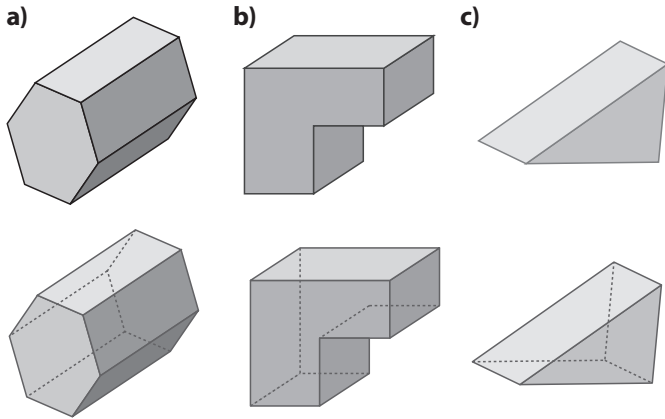
POLIEDROS: DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y CLASIFICACIÓN

10 Determina cuáles de las siguientes figuras son poliedros y razona tu respuesta:



Son poliedros a, c y d, porque todas sus caras son polígonos.

11 Copia en tu cuaderno y dibuja las aristas escondidas de los siguientes poliedros:

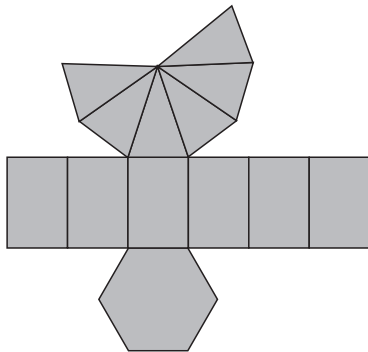


12 Cuenta caras, vértices y aristas de cada uno de los poliedros del ejercicio anterior. ¿Alguno de ellos es cóncavo?

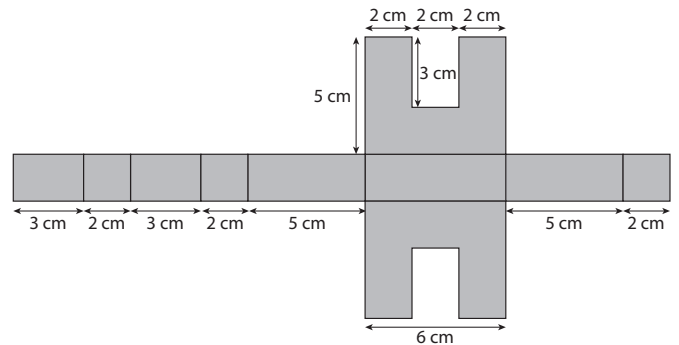
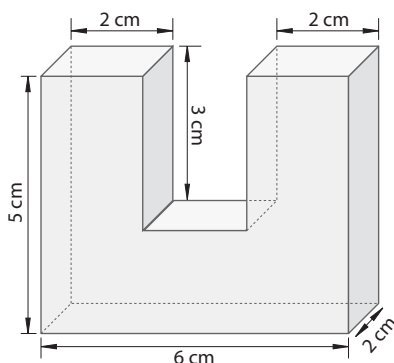
El b es cóncavo.

	C	V	A
a)	8	12	18
b)	8	12	18
c)	5	16	9

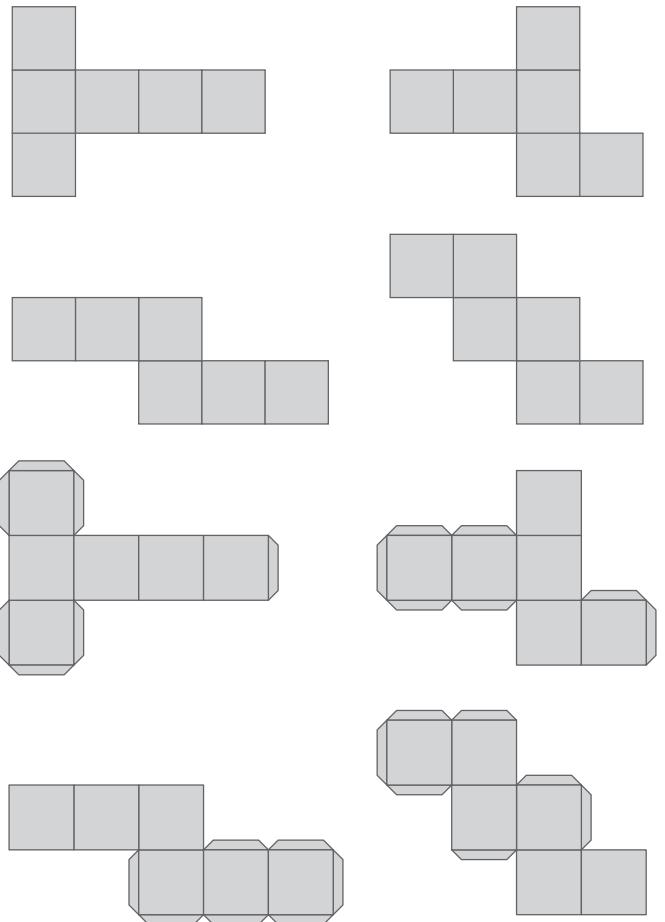
13 Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano del poliedro del ejercicio 2.



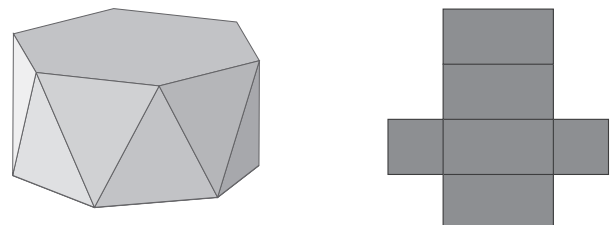
14 Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano del siguiente poliedro:

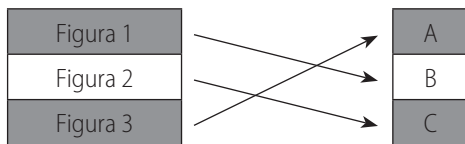
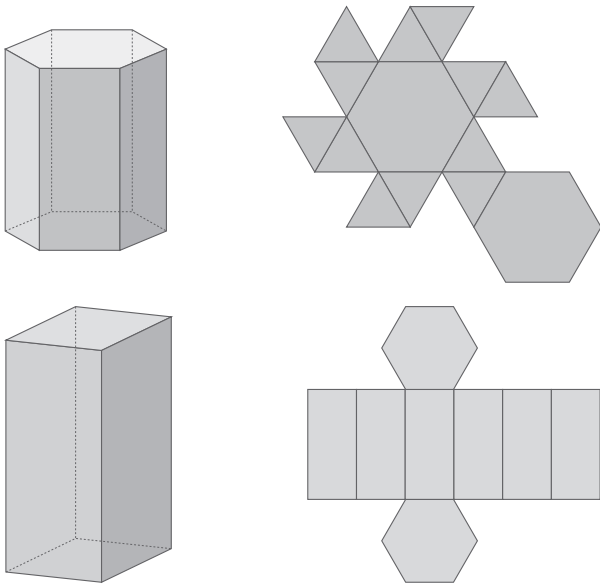


15 Comprueba cuáles de las siguientes figuras son desarrollos planos del cubo. Dibuja en tu cuaderno las que efectivamente lo son, y añade las pestañas donde se pone el pegamento para construirlos. Asegúrate de que en ninguna arista haya dos pestañas.

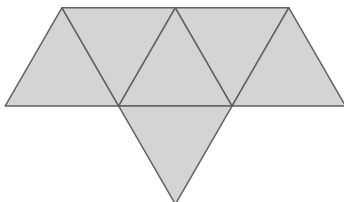


16 Relaciona cada uno de los siguientes desarrollos planos con el poliedro correspondiente:





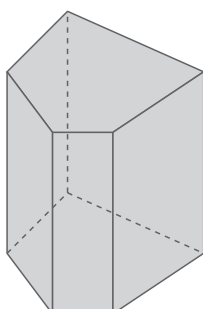
17  Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano del poliedro que se forma al unir por una cara dos tetraedros. (Atención: la cara interior por la que se unen no se cuenta, pues no es cara del nuevo poliedro.)



18  Marca en un cubo el punto que es el centro de cada cara. Imagina que estos puntos son los vértices de un nuevo poliedro, ¿qué puedes decir de él? Intenta dibujarlo en tu cuaderno.

Es un octaedro.

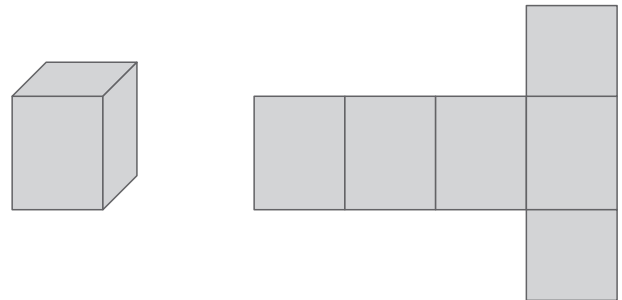
19  Dibuja en tu cuaderno un prisma recto cuyas bases sean pentágonos irregulares.



20  ¿Es posible que una de las caras de un prisma sea un rombo?

Sí, si hay otra cara que también es un rombo.

21  Dibuja en tu cuaderno un prisma cuadrangular de altura 5 cm y construye su desarrollo plano.



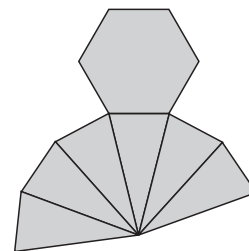
22  Si un prisma tiene 15 aristas, ¿qué polígono tiene en la base?

Un pentágono.

23  Un prisma tiene de altura 30 cm y bases cuadradas de lado 7 cm. Describe dos prismas que quepan juntos dentro de éste de forma que no sobre nada de espacio.

Los dos prismas pueden ser las dos mitades del prisma dado.

24  Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano de una pirámide hexagonal regular cuya base tenga de lado 2 cm y las aristas de las caras laterales midan 4 cm.



25  Si una pirámide tiene 8 vértices, ¿qué polígono forma la base?

Un heptágono.

26  ¿Es posible que una de las caras de una pirámide sea un rombo?

Sí, si es la base.

27  Una pirámide tiene de altura 15 cm y base cuadrada de lado 6 cm. Describe cómo se puede dividir en dos pirámides. ¿Son regulares las dos nuevas pirámides?

Al cortar la pirámide dada con un plano que pasa por el vértice de la misma y contiene a una de las diagonales de la base, se obtienen dos pirámides triangulares con la misma

11 POLIEDROS

altura que la inicial y por base un triángulo rectángulo de lados 6, 6 y $\sqrt{72}$ cm, respectivamente.

28 ☐ Decide si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa:

- a) Las pirámides no tienen diagonales.
- b) Las pirámides oblicuas tienen todas sus caras laterales iguales.
- c) Un tetraedro es una pirámide.
- d) Las pirámides oblicuas pueden ser regulares.

- a) Verdadera. b) Falsa.
- c) Verdadera. d) Falsa.

29 ☐ Indica si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa:

- a) Las pirámides oblicuas tienen siempre algún ángulo diedro obtuso.
- b) Si una pirámide tiene algún ángulo diedro obtuso, entonces es oblicua.

- a) Verdadera. b) Falsa.

30 ☐ Decide si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa:

- a) Las caras de un tronco de pirámide triangular son todas triángulos.
- b) Las caras de un tronco de pirámide regular cuadrada son todas cuadriláteros.
- c) Los troncos de pirámide son siempre poliedros convexos.

- a) Falsa. b) Verdadera. c) Verdadera.

31 ☐ Un tronco de pirámide octogonal regular, ¿cuántas caras tiene? Describe cómo son. Cuenta también sus vértices, aristas y diagonales.

Tiene 8 caras laterales que son trapecios isósceles y 2 bases que son octógonos.

Vértices = 16; aristas = 24; diagonales = 48.

ÁREAS Y VOLÚMENES

32 ☐ Halla el volumen de un prisma de altura 10 m cuya base es un rectángulo de lados 6 y 2 cm.

$$V = 0,06 \cdot 0,02 \cdot 10 = 0,012 \text{ m}^3$$

33 ☐ Halla el área y el volumen de un cubo cuya arista mide 2 m.

$$A = 6 \cdot 2^2 = 24 \text{ m}^2; V = 2^3 = 8 \text{ m}^3$$

<http://www.McGraw-Hill.es>

34 ☐ Calcula el volumen de un prisma oblicuo de altura 11 cm y cuyas bases son hexágonos de área 25 cm².

$$V = 25 \cdot 11 = 275 \text{ cm}^3$$

35 ☐ Halla el volumen de un prisma oblicuo cuya base es un romboide y su altura mide 16 cm. Las dimensiones de los romboides son base 5 cm y altura 6 cm.

$$V = 5 \cdot 6 \cdot 16 = 480 \text{ cm}^3$$

36 ☐ Calcula el volumen de un prisma recto de altura 15 cm y cuya base es un triángulo rectángulo con catetos de 9 y 10 cm de longitud.

$$V = (9 \cdot 10)/2 \cdot 15 = 45 \cdot 15 = 675 \text{ cm}^3$$

37 ☐ Halla el área de los siguientes poliedros sabiendo que las caras que los forman son triángulos de área 8 cm²:

- a) Un tetraedro. b) Un octaedro. c) Un icosaedro.
- a) 32 cm² b) 64 cm² c) 160 cm²

38 ☐ Halla el área de: un tetraedro, un octaedro y un icosaedro, sabiendo que sus caras son triángulos de 8 cm de lado.

Primeramente calculamos el área de un triángulo equilátero de lado 8. Usando el teorema de Pitágoras se llega a que dicha área es $16 \cdot \sqrt{3}$, que aproximadamente es 27,1 cm². En consecuencia, las soluciones son:

- a) 110,84 cm² b) 221,68 cm² c) 554,2 cm²

39 ☐ Halla el área de un dodecaedro sabiendo que la medida de cada arista es 5 cm y el apotema de cada pentágono mide 3,4 cm.

$$A = 12 \cdot 25 \cdot 3,4 : 2 = 510 \text{ cm}^2$$

40 ☐ Halla el área y el volumen de un prisma de base cuadrada de altura 12 cm y cuyo lado de la base mide 9 cm.

$$V = 9 \cdot 9 \cdot 12 = 972 \text{ cm}^3; A = 2 \cdot 9 \cdot 9 + 4 \cdot 9 \cdot 12 = 594 \text{ cm}^2$$

41 ☐ Calcula el área y el volumen del prisma que resulta al apilar tres cubos de arista 10 cm.

$$V = 10^3 = 1\,000 \text{ cm}^3; A = 14 \cdot 10^2 = 1\,400 \text{ cm}^2$$

42 ☐ Halla el área y el volumen de un prisma regular pentagonal de altura 15 cm, base con 3 cm de lado y apotema de 2,06 cm.

$$V = (15 \cdot 2,06 : 2) \cdot 15 = 231,75 \text{ cm}^3$$

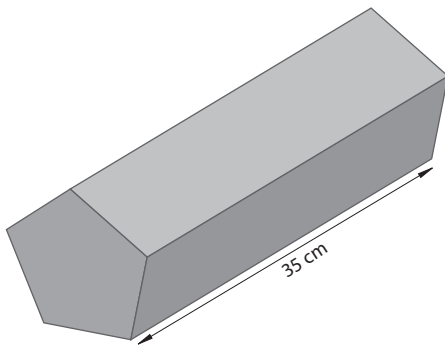
$$A = 15 \cdot 2,06 + 5 \cdot 3 \cdot 15 = 255,9 \text{ cm}^2$$

43 Halla el área y el volumen de un prisma regular hexagonal de altura 8 cm, cuya base tiene 30 cm de perímetro y 6,04 cm de apotema.

$$V = (30 \cdot 6,04 : 2) \cdot 8 = 724,8 \text{ cm}^3$$

$$A = 30 \cdot 6,04 : 2 = 90,6 \text{ cm}^2$$

44 Calcula el volumen de la siguiente barra de chocolate, sabiendo que el perímetro del pentágono es 35 cm y su apotema 5,5 cm.



$$V = (35 \cdot 5,5 : 2) \cdot 35 = 3368,75 \text{ cm}^3$$

45 Halla el área y el volumen de una pirámide regular pentagonal de altura 3 m, sabiendo que la arista y la apotema de la base miden 4 y 2,75 m respectivamente. También se sabe que la altura de las caras triangulares es 4,1 m.

$$V = (20 \cdot 2,75 : 2) \cdot 3 = 27,5 \text{ m}^3$$

$$A = (20 \cdot 2,75 : 2) + 5 \cdot 2 \cdot 4,1 = 68,5 \text{ m}^2$$

46 Halla el volumen de una pirámide octogonal regular de altura 4 cm. La arista de la base mide 3 cm y su apotema 3,6 cm.

$$V = (24 \cdot 3,6 : 2) \cdot 4 = 57,6 \text{ cm}^3$$

47 Una industria juguetera fabrica «tiendas indias» de base hexagonal. Se sabe que la altura de la tienda es de 1,20 m, la altura de las caras laterales es de 1,30 m y el hexágono de la base tiene 60 cm de lado y 52 cm de apotema. Si el material que utilizan es una tela distinta para la base que para las caras laterales, ¿cuántos metros cuadrados de cada tipo de tela se necesitan para fabricar 20 tiendas?

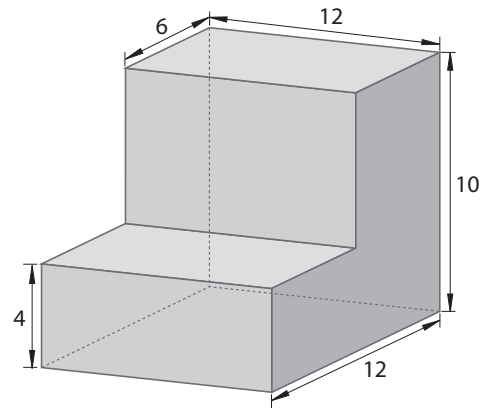
Para la base se necesitan $= 6 \cdot 0,6 \cdot 0,52 : 2 = 0,936 \text{ m}^2$; para las caras laterales se necesitan $= 6 \cdot (0,6 \cdot 1,3 : 2) = 2,34 \text{ m}^2$

48 Calcula el área y el volumen de una pirámide octogonal que tiene de altura 5 m, la arista de la base mide 2 m y su apotema 2,4 m. También se sabe que la altura de cada cara lateral es 5,6 m.

$$A = 8 \cdot 2 \cdot 2,4 : 2 + 8 \cdot 2 \cdot 5,6 : 2 = 64 \text{ m}^2$$

$$V = (8 \cdot 2 \cdot 2,4 : 2) \cdot 5 = 32 \text{ m}^3$$

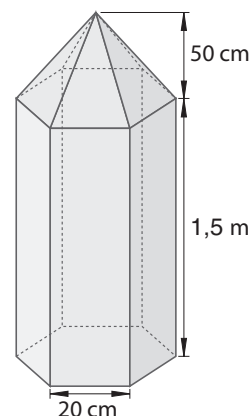
49 Halla el área y el volumen del poliedro. Las unidades están expresadas en centímetros:



$$A = 2 \cdot (18 \cdot 12 + 10 \cdot 12 + 10 \cdot 6 + 12 \cdot 4) = 888 \text{ cm}^2$$

$$V = 4 \cdot 18 \cdot 12 + 10 \cdot 6 \cdot 12 = 1584 \text{ cm}^3$$

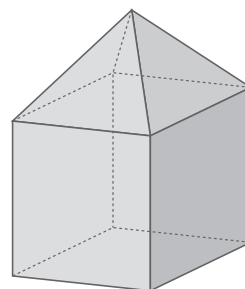
50 En un colegio quieren poner, como decoración en el vestíbulo, un lápiz hexagonal de madera. Las medidas están en la figura. Calcula la cantidad de madera necesaria para construirlo macizo.



El apotema de la base hexagonal es 17,3 cm.

$$V = (6 \cdot 0,2 \cdot 17,3 : 2) \cdot 1,5 + (6 \cdot 0,2 \cdot 17,3 : 2) \cdot 0,5 : 3 = 17,3 \text{ m}^3 \text{ de madera.}$$

51 Halla el volumen del siguiente poliedro, sabiendo que la arista del cubo mide 1 m y la altura de la pirámide es 60 cm.



$$V = 1 + 1 \cdot 0,6 : 3 = 1,2 \text{ m}^3$$

EJERCICIOS

1 ¿Cuáles de los siguientes objetos tienen forma de cilindro?

- a) Tubo de escape. b) CD.
c) Plátano. d) Queso.
e) Tiza. f) Barril.
a), d) y e).

2 Un cilindro tiene 5 cm de altura y 2 cm de radio de la base. Calcula el perímetro del rectángulo que, junto con las dos bases, forma su desarrollo plano. Dibuja en un folio este desarrollo plano y recórtalo para comprobar que tus cálculos son correctos y que, por ello, encaja perfectamente al construirlo.

Perímetro del rectángulo:

$$2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) + 2 \cdot h = 2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 2) + 2 \cdot 5 = 8\pi + 10 = 35,12 \text{ cm}$$

Perímetro de las dos bases:

$$2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) = 2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 2) = 8\pi \text{ cm}$$

3 Dibuja un cono de altura 6 cm y radio 3 cm.

Dibujo.

4 Entre todos los cucuruchos con forma de cono que se pueden construir utilizando un folio, encuentra el que tiene la base más grande y determina cuánto mide la generatriz.

El que se dobla por una esquina.

5 Un cono tiene una generatriz de 5 cm y su diámetro de la base mide 3 cm. Calcula el perímetro del sector circular que, junto con la base, forma su desarrollo plano. Dibuja en un folio este desarrollo plano y recórtalo para comprobar que se puede construir.

$$P_t = P_{\text{base}} + P_{\text{sector circular}}$$

$$P_t = 2 \cdot \pi \cdot r + 2 \cdot \pi \cdot r + 2g \Leftrightarrow P_t = 2 \cdot \pi \cdot 1,5 + 2 \cdot \pi \cdot 1,5 + 2 \cdot 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_t = 28,84 \text{ cm}$$

6 Dibuja en tu cuaderno un tronco de cono de altura 4 cm y cuyas bases tengan radios de 2 y 3 cm.

Dibujo.

7 ¿Crees que un volcán podría ser considerado un tronco de cono?

Sí, porque la base del volcán es la base más grande del tronco de cono y la parte por donde sale la lava es la base más pequeña del volcán.

8 Calcula aproximadamente unas medidas que tengan sentido para la altura y los radios de las bases de:

- a) Una ensaladera para seis personas con forma de tronco de cono.
b) Una montaña con forma de tronco de cono.

Respuesta abierta.

9 Dibuja en tu cuaderno una esfera de radio 4 cm y dentro de ella, con el mismo centro, otra de radio 2 cm.

Dibujo.

10 Si en un cilindro cuya base tiene un radio de 8 cm queremos guardar pelotas esféricas de radio 8 cm, ¿qué altura debe tener el cilindro para que quepan exactamente cinco pelotas?

Como el diámetro es de 16 cm, la altura total es:

$$16 \cdot 5 = 80 \text{ cm}$$

11 Averigua la longitud y la latitud del lugar donde vives.

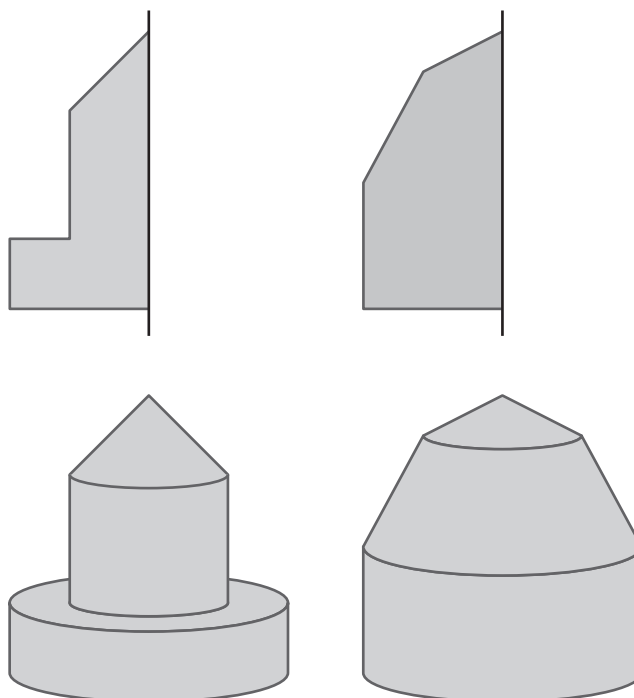
Respuesta abierta.

12 Busca en un globo terrestre el meridiano de Greenwich y comprueba si pasa por alguna localidad importante de España.

Escribe en tu cuaderno el resultado de tu búsqueda.

Pasa por Zaragoza.

13 Dibuja en tu cuaderno el cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar cada una de las siguientes figuras planas alrededor del eje que se indica:



14 Determina la figura plana y el eje que generan cada uno de los siguientes cuerpos de revolución:



15 Dibuja en tu cuaderno tres objetos de casa que sean cuerpos de revolución. Dibuja también la figura plana que genera cada uno de ellos al girar.

Barra de pegamento, vaso, aceitera, etcétera.

16 Determina si es necesario medir el área o el volumen de un cuerpo de revolución, en cada caso, para encontrar:

- El líquido que cabe dentro.
- La madera para construirlo como escultura maciza.
- La cantidad de vidrio para fabricarlo hueco.
- La cantidad de pintura para pintarlo.

- Volumen.
- Volumen.
- Volumen.
- Área.

17 Halla la generatriz de un cono de altura 4 cm y radio de la base 3 cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

18 Sabiendo que la generatriz de un cono mide 10 cm y el radio de la base 2 cm, halla la altura.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96} = 9,8 \text{ cm}$$

19 Calcula cuánto debe medir la generatriz de una caja en forma de cilindro para guardar tres pelotas de tenis, si el radio de cada pelota es 6,5 cm.

En el cilindro la generatriz mide lo mismo que la altura. El diámetro de cada pelota es de 13 cm, por lo que la altura de la caja tiene que ser de: $13 \cdot 3 = 39 \text{ cm}$.

20 Halla el área lateral, el área total y el volumen de un cilindro cuyo radio de la base es 10 cm y su altura 20 cm.

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 20 = 1\,256 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot 3,14 \cdot 10^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{total}} = 1\,884 \text{ cm}^2$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V = 3,14 \cdot 10^2 \cdot 20 \Leftrightarrow V = 6\,280 \text{ cm}^3$$

21 Un joyero tiene que construir dos cilindros de plata maciza: uno de altura 2 cm y radio de la base 1 cm, y otro de altura 1 cm y radio de la base 2 cm.

- ¿Cuál de ellos necesita más cantidad de plata?
- En cada caso, ¿cuáles son esas cantidades?

a) Necesita más cantidad de plata el que tiene mayor radio.

$$\text{b) Para el } C_1 \quad V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V = 3,14 \cdot 1^2 \cdot 2 = 6,28 \text{ cm}^3$$

$$\text{Para el } C_2 \quad V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V = 3,14 \cdot 2^2 \cdot 1 = 12,56 \text{ cm}^3$$

22 Halla el área y el volumen de una esfera de radio 0,4 m.

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot 0,4^2 = 2 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Leftrightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0,4^3 = 0,27 \text{ m}^3$$

23 Calcula el volumen del cilindro y el cono que se describen en el experimento del margen.

Tomamos como altura del cilindro y del cono 10 cm.

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 785 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow V_{\text{cono}} = \frac{3,14 \cdot 5^2 \cdot 10}{3} = 261,6 \text{ cm}^3$$

24 Un cono de helado tiene 10 cm de altura y 2 cm de radio de la base. Halla el volumen de la bola de helado más grande que se puede poner en él. ¿Qué volumen dentro del cono queda sin helado?

El volumen de la bola es el volumen de la esfera de radio 2 cm.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Leftrightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = 33,49 \text{ cm}^3$$

Si la cantidad de helado que entra en el cono es la mitad, el volumen que queda vacío es la diferencia entre el volumen del cono y la mitad del volumen de la esfera.

$$V_{\text{vacío}} = V_{\text{cono}} - V_{\frac{1}{2} \text{ esfera}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{vacío}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{vacío}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{vacío}} = 41,87 - 16,75 \Leftrightarrow V_{\text{vacío}} = 25,12 \text{ cm}^3$$

25 Dado un cono de altura 8 cm, radio de la base 4 cm, halla su generatriz. Imagina que se secciona ese cono por un plano paralelo a la base de forma que el cono que resulta tiene de altura 3 cm. Halla la generatriz de este nuevo cono, así como el área lateral, el área total y el volumen del tronco de cono que se ha obtenido al seccionarlo.

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{8^2 + 4^2} = 8,9 \text{ cm}$$

Para calcular la generatriz del cono pequeño aplicamos el teorema de Tales:

$$\frac{8}{8,9} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3 \cdot 8,9}{8} = 3,33 \text{ cm}$$

Para calcular el radio del cono pequeño aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{g^2 - h^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{3,33^2 - 3^2} = 1,45 \text{ cm}$$

$$A_{\text{lateral tronco}} = \pi \cdot R \cdot G - \pi \cdot r \cdot g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_l = 3,14 \cdot 4 \cdot 8,9 - 3,14 \cdot 1,45 \cdot 3,33 \Leftrightarrow A_l = 96,62 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total tronco}} = \pi \cdot R \cdot G - \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow$$

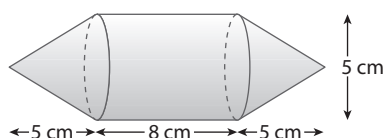
$$A_t = 3,14 \cdot 4 \cdot 8,9 - 3,14 \cdot 1,45 \cdot 3,33 + 3,14 \cdot 4^2 + 3,14 \cdot 1,45^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_t = 96,62 + 56,84 = 153,46 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow V = \frac{3,14 \cdot 4^2 \cdot 8}{3} - \frac{3,14 \cdot 1,45^2 \cdot 3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = 133,97 - 6,6 = 127,37 \text{ cm}^3$$

26 Halla el área y el volumen del siguiente cuerpo de revolución:



La figura se descompone en otras más sencillas, como un cilindro de radio 2,5 cm y de altura 8 cm, y en dos conos de 2,5 cm de radio y 5 cm de altura. La generatriz del cono es:

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{5^2 + 2,5^2} = 5,6 \text{ cm}$$

Área lateral del cilindro:

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,5 \cdot 8 = 125,6 \text{ cm}^2$$

Área lateral de los dos conos:

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot g \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,5 \cdot 5,6 = 87,92 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área}_{\text{total}} = 125,6 + 87,92 = 213,52 \text{ cm}^2$$

Volumen del cilindro:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V = 3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 8 \Leftrightarrow V = 157 \text{ cm}^3$$

Volumen de los dos conos:

$$V_{\text{conos}} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow V_{\text{conos}} = 2 \cdot \frac{3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 5}{3} = 65,42 \text{ cm}^3$$

Volumen total:

$$V_{\text{total}} = 157 + 65,42 = 222,42 \text{ cm}^3$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

CILINDROS

1 Determina cuáles de los siguientes objetos no pueden tener nunca forma de cilindro:

- a) La pata de una mesa.
- b) Un gorro.
- c) Un embudo.
- d) Una tubería.
- e) Un botón de un electrodoméstico.
- f) Un palillo de dientes.

b), c), f).

2 Un bote de espárragos tiene forma de cilindro de altura 14 cm y diámetro de la base 5 cm. Describe la figura plana que genera este cuerpo de revolución al girar.

Es un rectángulo de 14 cm de altura y de base 5π cm.

3 Dibuja dos cilindros con la misma altura, uno cuya base tenga un radio de 2 cm, y otro cuya base tenga un radio de 4 cm.

Dibujo.

4 Dibuja el desarrollo plano de un cilindro de altura 4 cm y radio de la base 2 cm. ¿Qué podrías hacer para comprobar que lo has hecho bien?

La longitud de la base del cilindro debe medir lo mismo que la longitud de la circunferencia: 4π .

5 Describe las instrucciones para construir un cilindro hueco de altura 15 cm y cuya base tenga un radio de 5 cm. Las instrucciones deben ser lo más detalladas posible.

Se dibujan dos circunferencias de 5 cm de radio. Luego un rectángulo de 15 cm de altura y de base 10π cm.

6 Una hoja de papel de formato DIN-A4 mide 29,7 cm x 21 cm. Utilizando toda la hoja se puede formar un cilindro, sin bases, de dos formas distintas: uno delgado y alto y otro grueso y bajo. Averigua la altura de cada uno de los cilindros.

La altura del cilindro delgado y alto es de 29,7 cm, y la altura del cilindro grueso y bajo es de 21 cm.

CONOS

7 Determina cuáles de los siguientes objetos no pueden tener nunca forma de cono:

- a) La pata de una mesa.
- b) Un gorro.
- c) Un embudo.
- d) Una tubería.
- e) Un vaso.
- f) Un árbol.

a), d), e).

8 Un helado tiene forma de cono de altura 12 cm y radio de la base 3 cm. Describe la figura plana que genera este cuerpo de revolución al girar. Indica sus dimensiones.

La figura plana que genera es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 3 cm.

9 Dibuja un cono de altura 3 cm y radio de la base 2 cm.

Dibujo.

10 Dibuja un cono cuya base tenga un radio de 2 cm y su generatriz sea 5 cm.

Dibujo.

11 En el cono del ejercicio anterior, marca en un color la altura y en otro la generatriz. ¿Cuál de los dos segmentos es más largo?

La generatriz.

12 Un cono tiene radio de la base 5 cm y generatriz 10 cm. Un cilindro tiene radio de la base 5 cm y altura 10 cm. ¿Cuál de los dos cuerpos es más alto?

El cilindro, porque la altura del cono es inferior a su generatriz.

TRONCOS DE CONO

13 Determina cuáles de los siguientes objetos no pueden tener nunca forma de tronco de cono:

- a) La pata de una mesa.
- b) Un gorro.
- c) Un embudo.
- d) Una tubería.
- e) Un clavo.
- f) Un taburete.

a), b), c), d), e).

14 Dibuja un tronco de cono de altura 4 cm y radios de las bases 2 y 5 cm.

Dibujo.

15 Dibuja un tronco de cono cuyas bases tengan radios de 1 cm y 3 cm y su generatriz mida 4 cm.

Dibujo.

16 En el tronco de cono del ejercicio anterior, marca en un color la altura y en otro la generatriz. ¿Cuál de los dos segmentos es más largo?

La generatriz.

17 La generatriz de un tronco de cono mide 20 cm. Un cono tiene la generatriz también de 20 cm. ¿Cuál de los dos cuerpos es más alto?

Los dos tienen la misma altura.

18 La altura de un cono mide 8 cm, si cortamos ese cono por un plano paralelo a la base a 2 cm del vértice, ¿cuánto mide la altura del tronco de cono que se obtiene?

$$8 - 2 = 6 \text{ cm}$$

ESFERAS

19 Dibuja una esfera de radio 3 cm.

Dibujo.

20 Queremos dibujar tres esferas con el mismo centro, de forma que la superficie de cada una esté a 10 cm de la siguiente. Si la primera tiene un diámetro de 1 m, calcula los radios de las otras dos.

La primera tiene un radio de 50 cm, la segunda tiene un radio de 60 cm y la tercera tiene un radio de 70 cm.

21 Busca en un atlas y escribe por qué continentes pasa el ecuador.

Continente africano y continente americano.

22 A, B y C son tres puntos sobre la superficie de la Tierra. Averigua, en cada uno de los siguientes casos, cuáles son los dos puntos más próximos.

- | | | |
|--------------------|-----------------|-----------------|
| a) A: 20° N, 12° E | B: 14° N, 12° E | C: 25° N, 12° E |
| b) A: 2° N, 5° E | B: 2° N, 5° O | C: 2° N, 13° E |
| c) A: 1° N, 5° E | B: 2° N, 4° E | C: 1° N, 3° O |

Los puntos más próximos son:

- a) A y C b) A y C c) A y B

23 Encuentra la longitud y la latitud de un punto que esté:

- a) En el mar Mediterráneo.
- b) En el océano Atlántico.

Hay muchísimos, por ejemplo:

- a) 35° N, 20° E b) 45° N, 16° O

24  Cita el nombre de tres países por los que pase el paralelo 10° N.

Entre otros, son válidos: Costa Rica, Venezuela, Nigeria, Guinea, Chad, Sudán, Etiopía, Somalia, India.

25  Encuentra la longitud y latitud de Madrid y escribe la longitud y latitud del punto que está en las antípodas. ¿Está en el agua? Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué mar u océano se encuentra? ¿Cuál es el continente más próximo? Si la respuesta es negativa, ¿en qué continente está ese punto?

Aproximadamente: 40° N, 4° Oeste,

El punto en las antípodas es 40° S, 176° E (pues hay 180° al este y 180° al oeste), está en el Océano Pacífico, muy cerca de Nueva Zelanda, por tanto el continente más próximo es Oceanía.

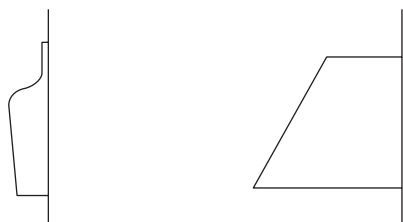
OTROS CUERPOS DE REVOLUCIÓN

26  ¿Cuáles de las siguientes figuras son cuerpos de revolución?

El embudo.

27  Dibuja una botella y un flan y, al lado, la figura plana y el eje que genera cada uno de ellos.

Por ejemplo:

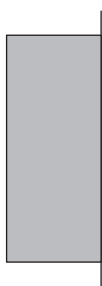


28  Investiga qué figuras de ajedrez son cuerpos de revolución.

El peón, la torre, el alfil y la reina.

29  Dibuja la figura plana y el eje que genera cada uno de los siguientes cuerpos de revolución:

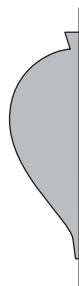
a)



b)



c)



d)



30  ¿Qué cuerpo geométrico se genera al hacer girar un triángulo isósceles alrededor del lado desigual? Dibújalo.

Un cono con la misma altura que su radio.

31  ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al hacer girar un trapecio isósceles alrededor de su base mayor? Dibújalo.

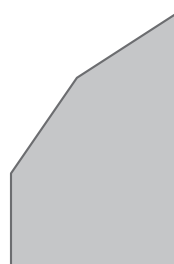
Un cilindro y dos conos en cada una de sus bases.

32  ¿Qué cuerpo geométrico se genera al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de su hipotenusa? Dibújalo.

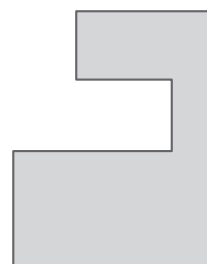
Dos conos.

33  Dibuja el cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar cada una de las siguientes figuras planas alrededor del eje indicado:

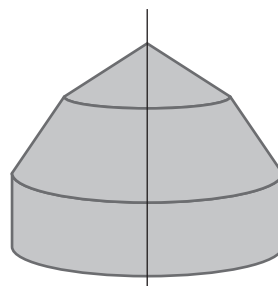
a)



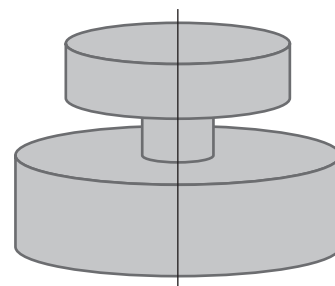
b)



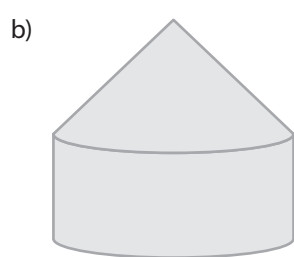
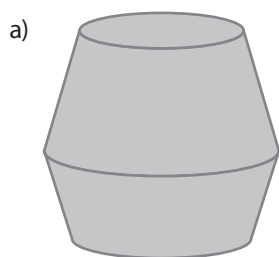
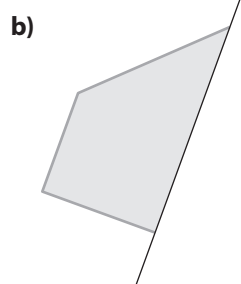
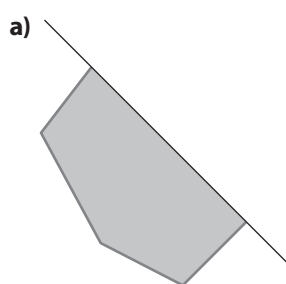
a)



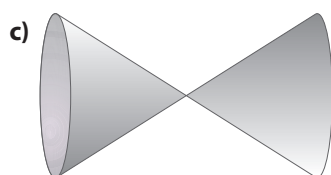
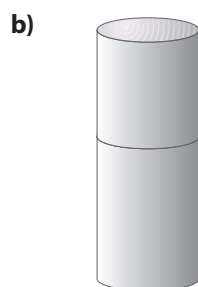
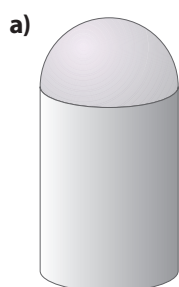
b)



34  Dibuja el cuerpo de revolución que se genera al hacer girar cada una de las siguientes figuras planas alrededor del eje indicado:



35  ¿Cuáles de los siguientes cuerpos de revolución tienen desarrollo plano?



- a) No tiene, puesto que la semiesfera no tiene desarrollo plano.
- b) Aunque cada cilindro tiene desarrollo plano, el cuerpo compuesto por los dos no tiene pues es imposible abrir el cuerpo y extenderlo sobre una superficie plana sin que se superponga una superficie sobre otra.
- c) Sí tiene desarrollo plano, que consiste en los desarrollos de ambos conos unidos por el vértice común.

36  Un cuerpo de revolución cualquiera puede tener desarrollo plano o no. Describe de qué cuerpos de revolución de los que has estudiado en esta Unidad tiene que estar compuesto para que tenga desarrollo plano.

Puede estar compuesto de cilindros y conos, pero de forma que las bases coincidan. En ningún caso puede incluir una esfera o semiesfera, ya que éstas no tienen desarrollo plano.

MEDIDAS

37  Halla la altura de un cono cuya generatriz mida 5 cm y el radio de la base sea 3 cm.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{5^2 - 3^2} \Leftrightarrow h = 4 \text{ cm}$$

38  Halla la generatriz de un cilindro sabiendo que la altura es 12 cm y el radio de la base 4 cm.

La generatriz tiene la misma medida que la altura: 12 cm.

39  Sabiendo que la generatriz de un cono mide 10 cm y el radio de la base 6 cm, halla su altura.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{10^2 - 6^2} \Leftrightarrow h = 8 \text{ cm}$$

40  Compara el radio de la base de los dos conos que se describen en cada apartado:

a) Cono 1: $h = 10 \text{ cm}$ $g = 14 \text{ cm}$

Cono 2: $h = 8 \text{ cm}$ $g = 9,8 \text{ cm}$

b) Cono 1: $h = 60 \text{ cm}$ $g = 1 \text{ m}$

Cono 2: $h = 80 \text{ cm}$ $g = 90 \text{ cm}$

a) Aplicamos el teorema de Pitágoras:

Para el cono 1:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{g^2 - h^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{14^2 - 10^2} \Leftrightarrow r = 9,79 \text{ cm}$$

Para el cono 2:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{g^2 - h^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{9,8^2 - 8^2} \Leftrightarrow r = 5,66 \text{ cm}$$

b) Aplicamos el teorema de Pitágoras:

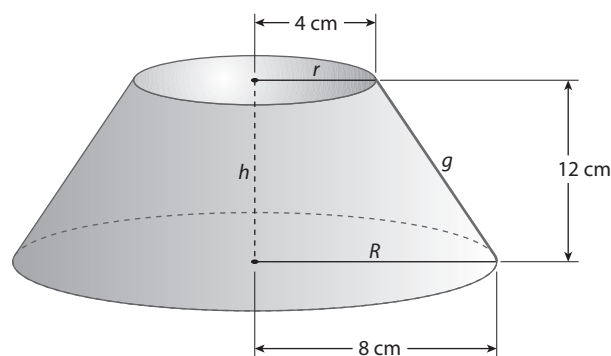
Para el cono 1:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{g^2 - h^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{1^2 - 0,6^2} \Leftrightarrow r = 0,8 \text{ m}$$

Para el cono 2:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{g^2 - h^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{90^2 - 80^2} \Leftrightarrow r = 41,23 \text{ m}$$

41  Halla la generatriz de un tronco de cono cuya altura mide 12 cm y los radios de ambas bases miden 8 cm y 4 cm.



$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow g = \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{12^2 + 4^2} \Leftrightarrow g = 12,65 \text{ cm}$$

42 ¿Cuál es la altura de un tronco de cono si su generatriz mide 20 cm y los radios de las bases son 12 cm y 9 cm?

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{20^2 - 3^2} \Leftrightarrow h = 19,77 \text{ cm}$$

43 Halla el área lateral y el área total de un cilindro de 2 m de altura y 30 cm de radio de la base.

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,3 \cdot 2 = 3,77 \text{ m}$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,3 \cdot 2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 0,3^2 \Leftrightarrow A_{\text{total}} = 4,34 \text{ m}^2$$

44 Halla el área total de un cilindro de altura 55 cm y diámetro de la base 20 cm.

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 55 + 2 \cdot 3,14 \cdot 10^2 = 4082 \text{ cm}^2$$

45 Calcula el área total de un cono que tiene 15 cm de radio de la base y generatriz de 20 cm.

$$A_{\text{total}} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

$$A_{\text{total}} = 3,14 \cdot 15 \cdot 20 + 3,14 \cdot 15^2 \Leftrightarrow A_{\text{total}} = 1648,5 \text{ cm}^2$$

46 Halla el área lateral y el área total de un cono cuya generatriz mide 60 cm y el diámetro de la base es 30 cm.

$$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot r \cdot g \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 3,14 \cdot 15 \cdot 60 = 2826 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

$$A_{\text{total}} = 2826 + 3,14 \cdot 15^2 \Leftrightarrow A_{\text{total}} = 3532,5 \text{ cm}^2$$

47 ¿Cuál es el área de una esfera de radio 40 cm?

$$A_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$A_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot 40^2 \Leftrightarrow A_{\text{esfera}} = 20096 \text{ cm}^2$$

48 Halla el área y el volumen de una esfera de diámetro 1,5 m.

$$A_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow A_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot 0,75^2 \Leftrightarrow A_{\text{esfera}} = 7,04 \text{ m}^2$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \Leftrightarrow V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 0,75^3}{3} = 1,76 \text{ m}^3$$

49 Halla el volumen de un cilindro cuya altura sea de 5 m y su radio de la base de 2 m.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 62,80 \text{ m}^3$$

50 Un colador en forma de cono tiene una base de radio 5 cm y una altura de 14 cm. ¿Cuánta cantidad de líquido puedo colar de una vez?

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 14}{3} = 366,33 \text{ cm}^3$$

51 El volumen de un cono es 30 cm³. Sabiendo que el área de la base es 18 cm², calcula su altura.

$$V = A_{\text{base}} \cdot \frac{h}{3} \Leftrightarrow h = \frac{V \cdot 3}{A_{\text{base}}} \Leftrightarrow h = \frac{30 \cdot 3}{18} = 5 \text{ cm}$$

52 Un cilindro tiene de altura 15 cm y de radio de la base 3 cm. Un cono tiene también de altura 15 cm y de radio de la base 3 cm. Halla el volumen de los dos cuerpos. ¿Qué relación tienen los dos números entre sí?

(Orientación: observa y compara las dos expresiones para calcular los volúmenes.)

$$V_{\text{cono}} = \frac{V_{\text{cilindro}}}{3}$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = 423,90 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{V_{\text{cilindro}}}{3} \Leftrightarrow V_{\text{cono}} = \frac{423,90}{3} = 141,30 \text{ cm}^3$$

53 En una caja con forma de cilindro de altura 30 cm y radio de la base 5 cm se guardan tres pelotas de diámetro 10 cm. Calcula el volumen de la parte de la caja que queda desocupada.

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 30 \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = 2355 \text{ cm}^3$$

$$V_{3 \text{ pelotas}} = 3 \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \Leftrightarrow V_{3 \text{ pelotas}} = 4 \cdot \pi \cdot 5^3 = 1570 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{desocupado}} = V_{\text{cilindro}} - V_{3 \text{ pelotas}} = 2355 - 1570 = 785 \text{ cm}^3$$

54 En una caja con forma de cilindro de 1 m de alto y 30 cm de diámetro se guarda un cono de 1 m de alto y 30 cm de diámetro de la base. Calcula el volumen de la parte de la caja que queda desocupada.

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 15^2 \cdot 100 = 70650 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{V_{\text{cilindro}}}{3} \Leftrightarrow V_{\text{cono}} = \frac{70650}{3} = 23550 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{desocupado}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}} = 70650 - 23550 = 47100 \text{ m}^3$$

55 Calcula y compara la cantidad máxima de agua que pueden contener cada uno de los siguientes vasos:

a) Uno de ellos tiene forma de cilindro de altura 15 cm y radio de la base 3 cm.

b) El otro tiene forma de tronco de cono obtenido al seccionar un cono imaginario de altura 20 cm por un plano paralelo a la base a 5 cm de distancia del vértice. Los radios de las bases del tronco son 2 y 4 cm.

$$a) V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = 423,9 \text{ cm}^3$$

$$b) V_{\text{tronco cono}} = V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 20}{3} - \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 5}{3} = 314 \text{ cm}^3$$

56  Un cono de altura 20 cm y cuyo radio de la base es 4 cm, se corta paralelamente a la base suprimiendo así un cono de altura 5 cm. Sabiendo que el radio de la base del cono suprimido es 1 cm, calcula la generatriz de ambos conos. Halla también el área lateral y total del tronco de cono obtenido al cortar.

Para calcular la generatriz aplicamos el teorema de Pitágoras.

Para el cono grande:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow g = \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{20^2 + 4^2} \Leftrightarrow g = 20,39 \text{ cm}$$

Para el cono pequeño:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow g = \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{5^2 + 1^2} \Leftrightarrow g = 5,1 \text{ cm}$$

$$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot R \cdot G - \pi \cdot r \cdot g$$

$$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot 4 \cdot 20,39 - \pi \cdot 1 \cdot 5,1 \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 240,08 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = \pi \cdot R \cdot G - \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

$$A_{\text{total}} = \pi \cdot 4 \cdot 20,39 - \pi \cdot 1 \cdot 5,1 + \pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{total}} = 293,46 \text{ cm}^2$$

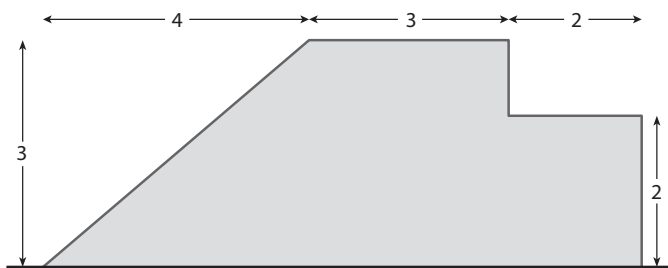
57  Halla el volumen del tronco de cono del ejercicio anterior.

$$V_{\text{tronco cono}} = V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}}$$

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 20}{3} - \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 5}{3} = 329,70 \text{ cm}^3$$

58  Halla el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar la figura plana alrededor del eje (las unidades se expresan en metros):



Para calcular el volumen del cuerpo compuesto, lo dividimos en dos cilindros y un cono.

$$\text{Volumen del cilindro pequeño} = 2^2 \cdot \pi \cdot 2 = 25,1 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen del cilindro grande} = 3^2 \cdot \pi \cdot 3 = 84,8 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen del cono} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 12 \cdot \pi = 37,7 \text{ m}^3$$

El volumen del cuerpo total es la suma de los tres volúmenes calculados:

$$\text{Volumen del cuerpo} = 25,1 + 84,8 + 37,7 = 147,6 \text{ m}^3$$

59  Halla el área del cuerpo de revolución del ejercicio anterior.

Para calcular el área lo dividimos en tres cuerpos: un cilindro pequeño, un cilindro grande y un cono, teniendo en cuenta que la base del cono y una de las bases del cilindro grande quedan en el interior del cuerpo, luego no hay que sumarlas para calcular el total. También una de las bases del cilindro pequeño queda en el interior, así que tampoco debe sumarse. Por último, hay que considerar que la base del cilindro grande por la que se une al cilindro pequeño sólo queda en el exterior parcialmente; para ser exactos, una corona circular de radios 3 y 2 m.

La generatriz del cono puede calcularse utilizando el teorema de Pitágoras, sabiendo que la altura es 4 y el radio 3:

$$g = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

Área del cuerpo = Área lateral del cono + Área lateral del cilindro grande + Área lateral del cilindro pequeño + Área de una base del cilindro pequeño + Área de la corona circular =

$$\begin{aligned} & \pi \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 2 + \pi \cdot 2^2 + 5 \cdot \pi = \\ & = 47,1 + 56,5 + 25,1 + 12,6 + 15,7 = 157 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

60  Una torre está formada por un cilindro de altura 4 m y radio de la base 1,2 m, sobre la que se apoya un cono con el mismo radio de la base y altura 1,5 m. Halla el área y el volumen de la torre, teniendo en cuenta que, las ventanas y la puerta ocupan en total una superficie de 5 m².

a) Área de la torre = Área lateral del cilindro + Área lateral del cono - 5.

En primer lugar calculamos la generatriz del cono utilizando el teorema de Pitágoras, sabiendo que la altura es 1,5 y el radio 1,2:

$$g = \sqrt{1,5^2 + 1,2^2} = \sqrt{3,69} = 1,9 \text{ m}$$

Área de la torre:

$$2 \cdot \pi \cdot 1,2 \cdot 4 + \pi \cdot 1,2 \cdot 1,9 - 5 = 30,1 + 7,2 - 5 = 32,3 \text{ m}^2$$

b) Volumen de la torre = Volumen del cilindro + Volumen del cono.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow V = \pi \cdot 1,2^2 \cdot 4 + \frac{\pi \cdot 1,2^2 \cdot 1,5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = 20,35 \text{ m}^3$$

EJERCICIOS

1 Decide cuáles de las siguientes son variables estadísticas:

- a) ¿Cómo son de interesantes los programas de televisión?
 - b) ¿Qué tipo de sangre tienen un grupo de personas?
 - c) ¿Cuántos habitantes tienen los pueblos de una comarca?
 - d) ¿Cuánto se aburren los alumnos de 2.º A en clase de Matemáticas?
- b) y c)

2 Para cada una de las variables estadísticas siguientes, identifica si las respuestas correspondientes a cada una se obtendrían mediante encuesta, aparato de medición u observación (el individuo correspondiente se indica entre paréntesis):

- a) Edad (vecinos de una casa).
 - b) Sexo (alumnos de una clase).
 - c) Nivel de colesterol (empleados de una empresa).
 - d) Marca (coches de un aparcamiento).
 - e) Contaminación (barrios de una ciudad).
- a) Encuesta. b) Observación.
c) Aparato de medición. d) Observación.
e) Aparato de medición.

3 Clasifica cada una de las siguientes variables estadísticas:

- a) Número de libros que lleva hoy en la mochila cada alumno de 2.º A.
- b) Talla de calzado que utiliza cada miembro de un club de tenis.
- c) Primera bebida que toma cada uno de los asistentes a una fiesta de cumpleaños.

Cuantitativas: a), b). Cualitativa: c).

4 Escribe, para cada una de las variables estadísticas del ejercicio anterior, la población y los individuos.

- a) Población: número de libros; individuos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
- b) Población: talla de calzado; individuos: ..., 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43...
- c) Población: primera bebida que toma cada uno de los asistentes a una fiesta de cumpleaños; Individuos: Coca Cola, fanta...

<http://www.McGraw-Hill.es>

5 Inventa 10 datos para cada variable estadística del ejercicio 3.

Respuesta abierta, basada en el enunciado.

6 En el ejemplo anterior, identifica la variable estadística, el individuo y la población.

Ver el ejemplo.

7 Se desea estudiar en qué clases de un colegio hace más falta poner aire acondicionado, pues no hay presupuesto suficiente para instalarlo en todas las clases. Diseña un estudio estadístico explicando cuál es la variable estadística e indicando quiénes son los individuos y la población.

Diseño de un estudio estadístico.

8 El fabricante de una marca de refrescos quiere saber a qué precios se está vendiendo la lata de su marca en los bares de un pueblo. Diseña un estudio estadístico explicando cuál es la variable estadística, detallando quiénes son los individuos y describiendo la población.

¿Cuál te parece que sería la forma adecuada de recoger los datos?

Diseño de un estudio estadístico.

9 El número de surtidores de gasolina en las gasolineras de la carretera N-149 es:

4, 3, 5, 8, 2, 4, 6, 4, 7, 8, 6, 3, 5, 4, 8

Construye la tabla de frecuencias correspondiente.

¿Cuántos datos y cuántos valores hay en este estudio estadístico?

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
2	1	0,07	7
3	2	0,13	13
4	4	0,27	27
5	2	0,13	13
6	2	0,13	13
7	1	0,07	7
8	3	0,20	20
Total	15	1	100

10 En los colegios de una ciudad pequeña se estudia cuántas variedades de bocadillos venden en la cafetería durante el recreo. Para ello, se visitan todos los colegios de la ciudad y preguntando en su cafetería se obtienen los siguientes datos:

2, 4, 1, 5, 3, 2, 2, 3, 5, 4

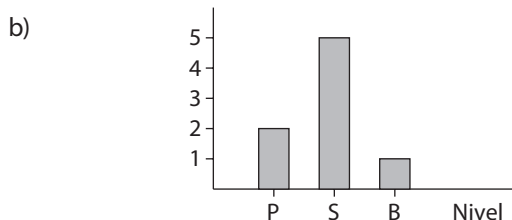
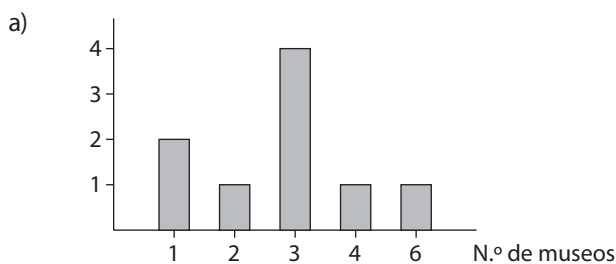
Construye la tabla de frecuencias.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
1	1	0,1	10
2	3	0,3	30
3	2	0,2	20
4	2	0,2	20
5	2	0,2	20
Total	10	1	100

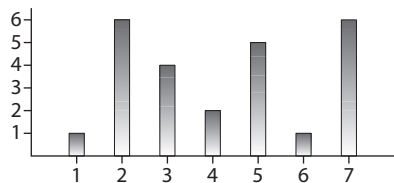
11 Construye el diagrama de barras que corresponde a la variable estadística:

a) Número de museos que hay en cada una de las ciudades de una provincia: 3, 1, 6, 3, 2, 3, 4, 1, 3.

b) Nivel en el que están cada uno de los miembros del grupo de teatro de un colegio: P (primaria), S (secundaria), B (bachillerato): P, P, S, S, S, S, S, B.



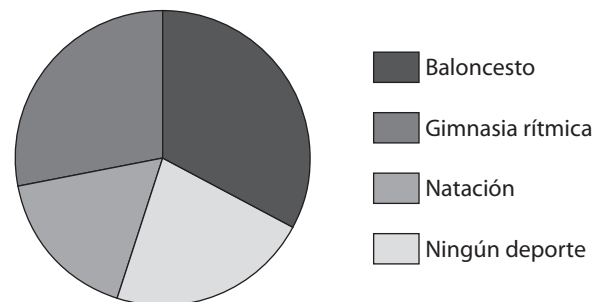
12 Construye la tabla de frecuencias correspondiente a este diagrama de barras:



Valor	Frecuencia absoluta
1	1
2	6
3	4
4	2
5	5
6	1
7	6
Total	25

13 En la clase de Ana hay 6 chicas que practican baloncesto, 4 que hacen gimnasia rítmica, 3 que van a natación y 5 que no practican ningún deporte fuera del colegio. Representa esta variable estadística en un diagrama de sectores.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
Baloncesto	6	0,33	118,8
Gimnasia rítmica	4	0,22	79,2
Natación	3	0,17	61,2
Ningún deporte	5	0,28	100,8
Total	18	1	360

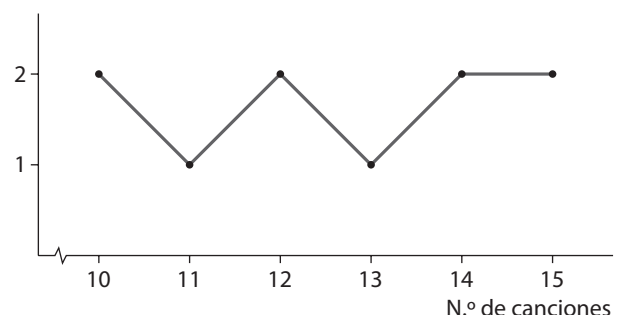


14 Lucas ha reunido todos sus CD y ha anotado el número de canciones que tiene cada uno:

14, 12, 15, 11, 10, 14, 13, 12, 15, 10

Dibuja el polígono de frecuencias correspondiente.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
10 canciones	2	0,2
11 canciones	1	0,1
12 canciones	2	0,2
13 canciones	1	0,1
14 canciones	2	0,2
15 canciones	2	0,2
Total	10	1



EJERCICIOS PROPUESTOS

ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

15 A las 11 de la mañana las temperaturas de los últimos días en el termómetro que hay en la Plaza Mayor han sido: 18, 22, 24, 20, 22, 20, 25, 20, 19. Halla la media aritmética y la moda. Ordena los datos y averigua también cuál es la mediana.

$$\bar{x} = \frac{18 + 22 + 24 + 20 + 22 + 20 + 25 + 20 + 19}{9} = \frac{190}{9} = 21,11$$

$$Mo = 20$$

Ordenamos los datos: 18, 19, 20, 20, 20, 22, 22, 24, 25.

$$Me = 20$$

16 Halla la mediana en cada uno de los siguientes conjuntos de datos:

a) 30, 35, 41, 46, 50

b) 2, 3, 5, 5, 6, 8, 10, 11

c) 8, 10, 4, 7, 5

d) 15, 20, 19, 17

a) Me = 41

b) Me = 5,5

c) Me = 7

d) Me = 18

17 El tiempo que tardan, expresado en minutos, en llegar al colegio un grupo de alumnos es:

10, 15, 12, 20, 8

Halla la media aritmética, el rango y la desviación media.

$$\bar{x} = \frac{10 + 15 + 12 + 20 + 8}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

$$\text{Rango} = 20 - 8 = 12$$

$$DM = \frac{|13 - 10| + |13 - 15| + |13 - 12| + |13 - 20| + |13 - 8|}{5} = \frac{3 + 2 + 1 + 7 + 5}{5} = \frac{18}{5} = 3,6$$

18 Halla el rango y la desviación media de la variable estadística «número de veces que han llamado a Paula por teléfono cada día de la semana pasada»:

3, 1, 0, 4, 1, 5, 3

$$\bar{x} = \frac{3 + 1 + 0 + 4 + 1 + 5 + 3}{7} = \frac{17}{7} = 2,43$$

$$\text{Rango} = 5 - 0 = 5$$

$$DM = \frac{|3,6 - 3| + |3,6 - 1| + |3,6 - 0| + |3,6 - 4| + |3,6 - 1| + |3,6 - 5| + |3,6 - 3|}{7} = \frac{0,6 + 2,6 + 3,6 + 0,4 + 2,6 + 1,4 + 0,6}{7} = \frac{11,8}{7} = 1,69$$

1 Clasifica cada una de las siguientes variables estadísticas:

a) Canción favorita.

b) Peso.

c) Número de hermanos.

d) Profesión que te gustaría tener en el futuro.

e) Suspensos en la pasada evaluación.

f) Edad.

a) Cualitativa

b) Cuantitativa

c) Cuantitativa

d) Cualitativa

e) Cuantitativa

f) Cuantitativa

2 En cada uno de los siguientes estudios estadísticos identifica el individuo. Se pretende estudiar:

a) Las temperaturas mínimas en un pueblo de la sierra en el mes de enero.

b) Las ventas en los bares de una ciudad de un nuevo refresco en un día.

c) Los gastos de teléfono fijo de un grupo de familias en un mes.

a) Los días del mes de enero.

b) Propietario del bar.

c) Las familias.

3 Queremos estudiar la afición a la música de los jóvenes de 2.º de ESO en un colegio con 25 alumnos de ese nivel. Diseña un estudio estadístico detallando la variable estadística, el individuo y la población. Escribe también de qué tipo es la variable.

Diseño de un estudio estadístico.

4 El responsable de la Casa de la Juventud quiere saber si los ordenadores que tienen para los jóvenes se están utilizando y con qué regularidad, de modo que decide estudiar el tema a lo largo de una semana. Ayúdale diseñando un estudio estadístico: debes decirle cuál es la variable estadística, el individuo y la población.

Diseño de un estudio estadístico.

5 El dueño de la tienda de chucherías que hay al lado del colegio quiere saber cuál es la preferida de los niños, así que decide hacer una encuesta a lo largo de un día. Ayúdale diseñando un estudio estadístico: debes decirle cuál es la variable estadística, el individuo y la población. ¿Le aconsejarías elegir una muestra?

Diseño de un estudio estadístico.

TABLAS DE FRECUENCIAS

6 En una clase de gimnasia rítmica las edades son:

12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 16

Organiza los datos en una tabla de frecuencias.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
12	3	0,19	19
13	5	0,31	31
14	4	0,25	25
15	3	0,19	19
16	1	0,06	6
Total	16	1	100

7 El lunes, en la clase de Petra, el profesor ha preguntado cuántas horas había dedicado cada uno el día anterior a ver la televisión. Las respuestas fueron:

0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5

Resume los datos en una tabla de frecuencias.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
0	2	0,13	13
1	3	0,19	19
2	5	0,31	31
3	3	0,19	19
4	2	0,13	13
5	1	0,06	6
Total	16	1,01	101

8 Construye una tabla de frecuencias, absolutas y relativas, para el siguiente conjunto de datos:

4, 5, 7, 4, 6, 3, 5, 5, 7, 3, 4, 5, 4, 3, 6

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
3	3	0,20	20
4	4	0,27	27
5	4	0,27	27
6	2	0,13	13
7	2	0,13	13
Total	15	1	100

9 En un parque se quiere dedicar un espacio a una instalación deportiva, y para ello se pregunta a una muestra de vecinos por su preferencia: tenis (T), baloncesto (B) o voleibol (V). Las respuestas fueron:

T, B, V, B, B, V, T, B, T, V, B, V, T, B, B, T, V, T, V, B

Haz la tabla de frecuencias, incluyendo absolutas, relativas y porcentajes.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
Tenis	6	0,30	30
Baloncesto	8	0,40	40
Voleibol	6	0,30	30
Total	20	1	100

10 La madre de Alberto ha trabajado las siguientes horas cada uno de los días de las dos últimas semanas:

3, 8, 4, 8, 5, 5, 4, 8, 6, 8

Resume los datos en una tabla de frecuencias.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
3	1	0,10	10
4	2	0,20	20
5	2	0,20	20
6	1	0,10	10
8	4	0,40	40
Total	10	1	100

11 Ayer, en un restaurante, anotaron el número de comensales en cada mesa. Los resultados fueron:

4, 3, 2, 2, 2, 1, 3, 2, 2, 1, 5, 3, 4, 2, 2, 4, 1

Construye la tabla de frecuencias. ¿Qué porcentaje de mesas han tenido tres comensales o más?

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
1	3	0,18	18
2	7	0,41	41
3	3	0,18	18
4	3	0,18	18
5	1	0,06	6
Total	17	1,01	101

42 %

12 A Pablo le gusta correr un poco por las tardes después de trabajar. Da vueltas en una pista de atletismo al lado de su casa. Los últimos días ha corrido las siguientes vueltas:

2, 4, 3, 5, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 5, 6

Construye la tabla de frecuencias.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
2	2	0,17	17
3	4	0,33	33
4	3	0,25	2
5	2	0,17	17
6	1	0,08	8
Total	12	1	100

13 La tabla de frecuencias de la variable estadística «número de pisos vendidos en una inmobiliaria en los últimos días» es la siguiente:

Pisos	Frecuencias
0	2
1	2
2	6
3	12
4	7
5	3

Contesta a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuántos días han anotado el número de ventas?
 b) ¿Cuántos días han vendido 3 pisos o más?
 c) ¿Cuántos días han vendido 2 pisos o menos?

- a) Los días que han anotado el número de ventas es el total de la frecuencia, es decir, 32 días.
 b) 22 días.
 c) 10 días.

14 La siguiente tabla muestra los datos de un estudio cuyo objetivo es analizar cuánta agua se bebe al día. ¿Cuál es la variable?

N.º litros de agua/día	N.º de personas
0,5	5
1	15
2	7
3	3

¿Cuántos litros de agua bebe al día?

15 En los primeros años de la década de 2000 los alumnos que terminaron la carrera de Bellas Artes en Madrid fueron:

Año	2000	2001	2002	2003	2004
Alumnos	1 740	1 614	1 611	1 683	1 753

Identifica cuál es la variable estadística y cuál es la frecuencia.

La variable estadística es primeros años de la década de 2000.
 La frecuencia es el número de alumnos.

16 Copia en tu cuaderno y completa la tabla:

Valor	Frecuencia absoluta
1	6
2	10
3	4
Total	20

La frecuencia absoluta de 2 se calcula:

$$20 - (6 + 4) = 10$$

17 Copia en tu cuaderno y completa la tabla:

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
5	6	0,38
7	4	0,25
8	1	0,06
10	5	0,31
Total	16	1

— La frecuencia relativa del valor 7 es 0,25. Su porcentaje es 25%. La frecuencia absoluta es:

$$25\% \text{ de } 16 = 4$$

— La frecuencia absoluta del valor 10 se calcula restando:

$$16 - (6 + 4 + 1) = 5$$

— Conociendo la frecuencia absoluta, se obtiene la frecuencia relativa.

18 Copia en tu cuaderno y completa la tabla:

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
21	12	0,3	30
22	24	0,6	60
26	0	0	0
29	2	0,05	5
30	2	0,05	5
Total	40	1	100

— La frecuencia relativa del valor 21 es 0,3. Su porcentaje es 30%. La frecuencia absoluta es:

$$30\% \text{ de } 40 = 12$$

— El porcentaje del valor 22 y 29 es 60 y 5 respectivamente. Su frecuencia relativa es:

$$\frac{60}{100} = 0,6; \frac{5}{100} = 0,05$$

— La frecuencia absoluta del valor 22 es:

$$60\% \text{ de } 40 = 24$$

— La frecuencia absoluta del valor 29 es:

$$5\% \text{ de } 40 = 2$$

— La frecuencia absoluta del valor 26 es:

$$40 - (12 + 24 + 2 + 2) = 0$$

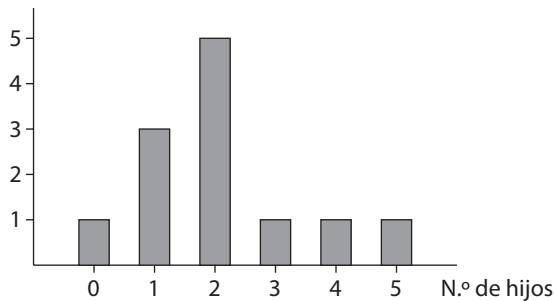
— La frecuencia relativa de 2 es: $\frac{2}{40} = 0,05$

GRÁFICOS

19 ■ A las 12 familias que viven en una urbanización se les ha preguntado el número de hijos, obteniendo los siguientes datos:

2, 1, 4, 2, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 5, 2

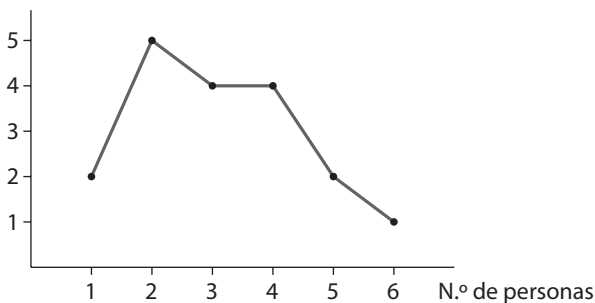
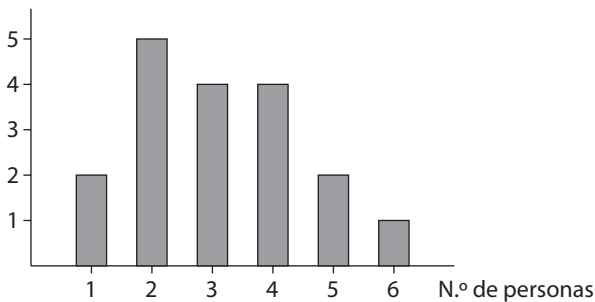
Representa los datos en un diagrama de barras.



20 ■ En un pueblo se pregunta en todas las casas de una calle el número de personas que viven en cada casa y se obtiene:

5, 4, 3, 1, 2, 3, 2, 4, 6, 3, 5, 2, 4, 2, 3, 1, 4, 2

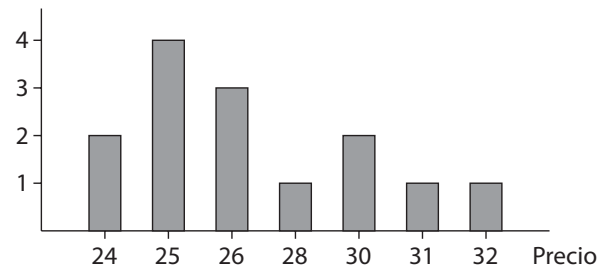
Representa los datos en un diagrama de barras y en un polígono de frecuencias (en dos gráficos diferentes).



21 ■ Un fabricante ha registrado el precio de las nuevas zapatillas deportivas Halcón en todas las tiendas de deporte de una comarca y ha obtenido:

24, 30, 31, 26, 25, 32, 25, 26, 28, 25, 24, 30, 25, 26

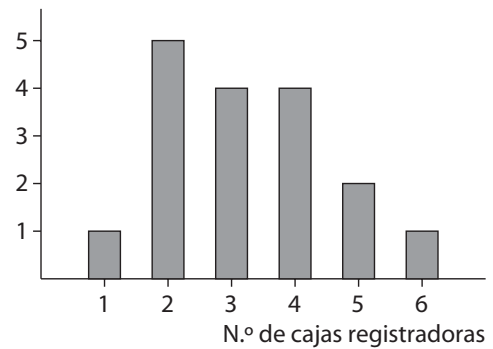
Resume los datos en un diagrama de barras.



22 ■ Se ha anotado el número de cajas registradoras de todos los supermercados de una ciudad, obteniendo estos datos:

4, 3, 3, 5, 4, 2, 4, 2, 3, 2, 6, 1, 2, 4, 3, 2

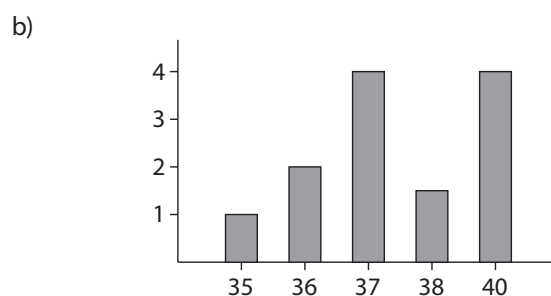
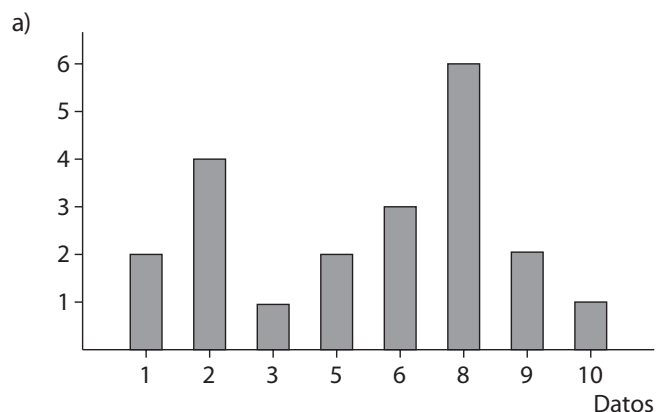
Dibuja el diagrama de barras correspondiente.



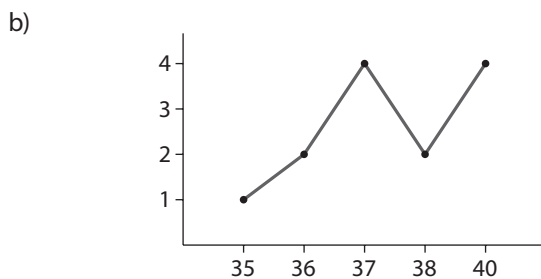
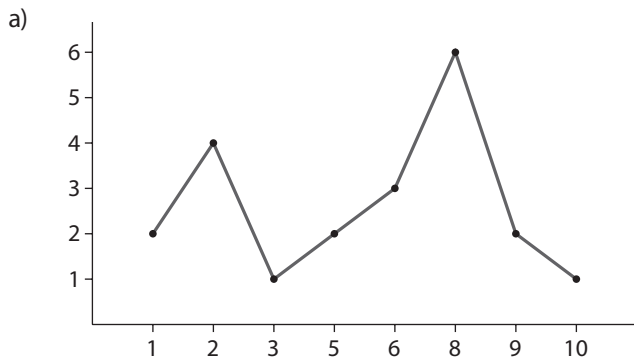
23 ■ Representa los siguientes datos en un diagrama de barras:

a) 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10

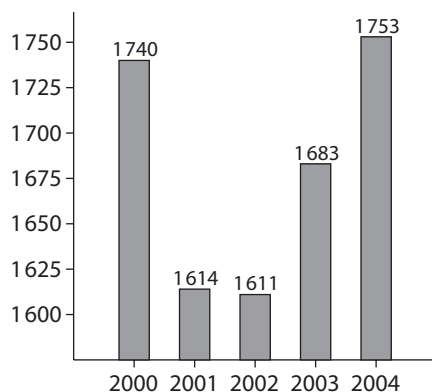
b) 35, 36, 36, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 40, 40, 40, 40



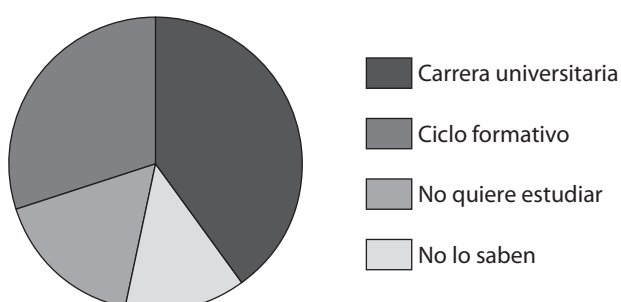
24 Dibuja el polígono de frecuencias para cada uno de los apartados del ejercicio anterior.



25 Representa las frecuencias del ejercicio 15 en un diagrama de barras.



26 Hoy, en la clase de Mónica, la tutora ha preguntado qué quieren estudiar en el futuro y las repuestas han sido: una carrera universitaria es la opción elegida por 12 alumnos, un ciclo formativo 9, no quieren estudiar 5 y aún no lo saben 4. Expresa estos datos en un diagrama de sectores.

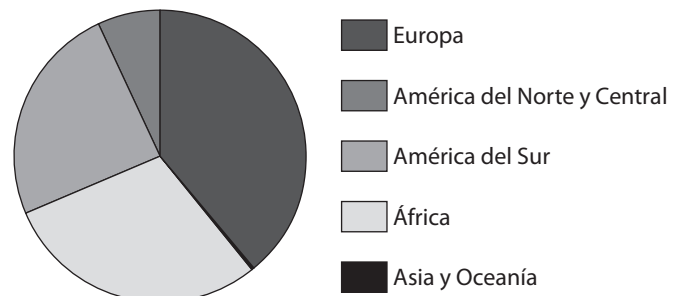


27 En el Anuario del Instituto Nacional de Estadística del año 2005 se pueden ver los datos de extranjeros residentes en España, desde el año 2002:

Procedencia	Número de personas
Europa	473 514
América del Norte y Central	79 416
América del Sur	300 889
África	366 518
Asia y Oceanía	102

Completa la tabla escribiendo la fila correspondiente al total y representa estos datos en un diagrama de sectores.

Procedencia	Número de personas	Frecuencia relativa	%
Europa	473 514	0,39	144,40
América del Norte y Central	79 416	0,07	25,20
América del Sur	300 889	0,25	90,00
África	366 518	0,30	108,00
Asia y Oceanía	102	0,00	0
Total	1 220 439	1	100

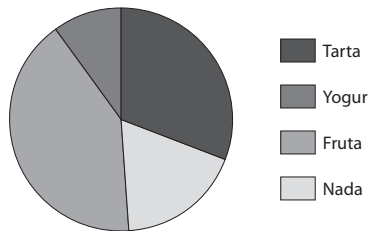


28 El camarero de un restaurante observa que una noche los clientes han elegido así los postres:

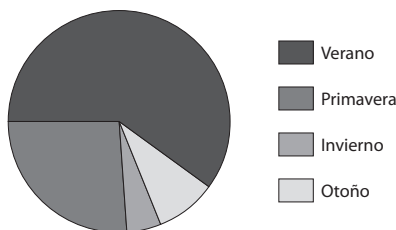
Postre	N.º de personas
Tarta	26
Yogur	8
Fruta	34
Nada	15

Representa estos datos en un diagrama de sectores.

Postre	N.º de personas	Frecuencia relativa	%
Tarta	26	0,31	111,6
Yogur	8	0,10	36
Fruta	34	0,41	147,6
Nada	15	0,18	64,80
Total	83	1	360



29 En el registro de un pueblo hemos visto las fechas de las últimas 200 bodas y hemos anotado la estación en la que se han producido: 120 han sido en verano, 52 en primavera, 10 en invierno y 18 en otoño. Representa esta información en un diagrama de sectores.

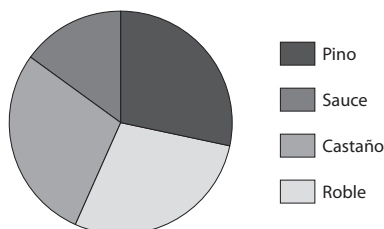


30 En un jardín hemos examinado todos los árboles para estudiar de qué especie son, y los resultados obtenidos son (P: pino, S: sauce, C: castaño, R: roble):

P, S, S, S, C, S, C, C, C, C, P, P, R, C,
R, R, P, P, C, C, R, R, R, P, P, R, R, P

Resume los datos en una tabla de frecuencias y construye después el diagrama de sectores.

Árboles	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
Pino	8	0,29	104,40
Sauce	4	0,15	54,00
Castaño	8	0,29	104,40
Roble	8	0,29	104,40
Total	28	1	



31 En una tienda de maletas sólo venden tres tamaños: maletín, pequeña y grande. Han vendido 216 el último mes. Al hacer un diagrama de sectores, el círculo queda dividido en tres sectores iguales. ¿Cuántos grados tiene cada sector? ¿Cuántas maletas han vendido de cada tipo?

Cada sector circular tiene $\frac{360}{3} = 120^\circ$.

De cada tipo han vendido 72 maletas.

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

32 Halla la media aritmética de las siguientes colecciones de números:

a) 3, 7, 9, 2, 1, 5, 4, 3, 8

b) 86, 80, 96, 103, 92, 100, 86

c) 520, 502, 566, 584, 531

$$a) \bar{x} = \frac{3 + 7 + 9 + 2 + 1 + 5 + 4 + 3 + 8}{9} = \frac{42}{9} = 4,67$$

$$b) \bar{x} = \frac{86 + 80 + 96 + 103 + 92 + 100 + 86}{7} = \frac{643}{7} = 91,86$$

$$c) \bar{x} = \frac{520 + 502 + 566 + 584 + 531}{5} = \frac{2703}{5} = 540,6$$

33 En la clase de María, el profesor ha preguntado por el número de aparatos de televisión que tiene cada uno en casa, y éstas han sido las respuestas:

2, 2, 5, 3, 1, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 2

Halla la media aritmética y la moda.

$$\bar{x} = \frac{2 + 2 + 5 + 3 + 1 + 3 + 4 + 5 + 3 + 4 + 5 + 6 + 1 + 2}{20} + \frac{2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 2}{20} = \frac{66}{20} = 3,3$$

Mo = 2

34 Tomás ha obtenido las siguientes notas en su boletín:

8, 6, 7, 5, 9, 7, 6, 5, 4, 6

Halla su nota media en esta evaluación.

$$\bar{x} = \frac{8 + 6 + 7 + 5 + 9 + 7 + 6 + 5 + 4 + 6}{10} = \frac{63}{10} = 6,3$$

35 Las alturas en centímetros de un grupo de amigos son:

154, 158, 150, 162, 169, 158, 170, 162

Halla la media aritmética y la moda.

$$\bar{x} = \frac{154 + 158 + 150 + 162 + 169 + 158 + 170 + 162}{8} = 160,38$$

Mo = 150

36 Halla la mediana de cada uno de los siguientes conjuntos de datos:

a) 25, 26, 32, 36, 40

b) 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 9, 9, 9, 10

c) 50, 50, 51, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 59, 59

a) 32

b) 5

c) 53

37 ■ **Calcula la mediana de los siguientes datos:**

- a) 7, 4, 2, 6, 8 b) 2, 5, 1, 3, 2, 5, 2, 3, 5
c) 502, 501, 508, 524, 563, 512, 519

- a) 6 b) 3 c) 512

38 ■ **Halla la mediana de los siguientes datos:**

- a) 1, 3, 3, 5, 6, 8, 9, 9, 10, 10 b) 14, 7, 8, 10

- a) $\frac{6+8}{2} = 7$ b) $\frac{8+10}{2} = 9$

39 ■■ **Añade un dato a las siguientes colecciones para que la mediana sea 5:**

- a) 2, 4, 6, 8 b) 3, 4, 4, 5, 7, 8
a) 2, 4, 5, 6, 8 b) 3, 4, 4, 5, 5, 7, 8

40 ■ **En la Avenida de las Luces hay 15 castaños. Sus alturas, en centímetros, son:**

120, 152, 130, 150, 120, 140, 152, 160,
144, 120, 136, 158, 125, 110, 148

Halla la media, la moda y la mediana.

$$\bar{x} = \frac{120 + 152 + 130 + 150 + 120 + 140 + 152 + 160 + 144}{15} + \frac{120 + 136 + 158 + 125 + 110 + 148}{15} = \frac{2065}{15} = 137,67$$

Mo = 120; Me = 140

41 ■ **El precio, en céntimos, del mismo bote de refresco en las tiendas de un pueblo varía así:**

60, 45, 50, 45, 50, 50, 40, 52

- a) **Halla la media aritmética, la moda y la mediana.**
b) **Halla el rango y la desviación media.**

a) $\bar{x} = \frac{60 + 45 + 50 + 45 + 50 + 50 + 40 + 52}{8} = \frac{392}{8} = 49$

Mo = 50; Me = 50

- b) Rango = 60 - 40 = 20

$$DM = \frac{|49 - 60| + |49 - 45| + |49 - 50| + |49 - 45|}{8} + \frac{|49 - 50| + |49 - 50| + |49 - 40| + |49 - 52|}{8} = \frac{11 + 4 + 1 + 4 + 1 + 1 + 9 + 3}{8} = \frac{34}{8} = 4,25$$

42 ■ **Silvia quiere participar en la próxima maratón. Además de los ejercicios de gimnasia, para entrenarse los últimos días antes de la prueba ha corrido los siguientes kilómetros:**

8, 5, 10, 10, 5, 19, 0, 7, 5, 8, 8, 5, 16, 0, 8, 7, 8, 0, 3

Halla la media, la mediana, la moda, el rango y la desviación media.

$$\bar{x} = \frac{8 + 5 + 10 + 10 + 5 + 19 + 7 + 5 + 8 +}{19} +$$

$$+ \frac{8 + 5 + 16 + 8 + 7 + 8 + 3}{19} = \frac{132}{19} = 6,95$$

Me = 7; Mo = 8; Rango = 19 - 0 = 19

$$DM = \frac{|6,95 - 8| + |6,95 - 5| + |6,95 - 10| + |6,95 - 10|}{19} + \frac{|6,95 - 5| + |6,95 - 19| + |6,95 - 0| + |6,95 - 7| + |6,95 - 5|}{19} + \frac{|6,95 - 8| + |6,95 - 8| + |6,95 - 0| + |6,95 - 3| + |6,95 - 3|}{19} = \frac{1,05 + 1,95 + 3,05 + 3,05 + 1,95 + 12,05 + 6,95 + 0,05}{19} + \frac{1,95 + 1,05 + 1,05 + 1,95 + 9,05 + 6,95 + 1,05 + 0,05}{19} + \frac{1,05 + 6,95 + 3,95}{19} = \frac{65,15}{19} = 3,43$$

43 ■■ **Las notas de Luis en la última evaluación han sido:**

4, 8, 5, 7, 9, 6, 7, 8, 7

Las de Marcos fueron:

6, 8, 6, 7, 9, 5, 6, 8, 7

- a) **Compara sus medias, sus modas y sus medianas.**
b) **¿Cuál de los tres parámetros crees que permite hacer una mejor comparación?**

a) Luis: $\bar{x} = \frac{4 + 8 + 5 + 7 + 9 + 6 + 7 + 8 + 7}{9} = \frac{61}{9} = 6,78$

Me = 7; Mo = 7

Marcos: $\bar{x} = \frac{6 + 8 + 6 + 7 + 9 + 5 + 6 + 8 + 7}{9} = \frac{62}{9} = 6,89$

Me = 7; Mo = 6

- b) La media.

44 ■■ **La media aritmética de 10 números es 5,4, ¿cuánto suman esos números?**

$$5,4 = \frac{\sum n}{10} \Leftrightarrow \sum n = 5,4 \cdot 10 = 54$$

45 ■■ **La mediana de cinco números es 6. Si dos de ellos son 3 y 4, el resto puede ser (contesta verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones):**

- a) 7, 8, 10 b) 5, 6, 7 c) 6, 8, 20
a) Falso b) Falso c) Verdadero

46 ■■ **¿Qué parámetros se pueden hallar para las variables cualitativas? ¿Y para las cuantitativas?**

Para las variables cualitativas: moda.

Para las cuantitativas: todos.

A cluster of squares in various shades of gray, ranging from light to dark, arranged in a non-uniform pattern in the top-left corner of the page.

SOLUCIONARIO

GUÍA DIDÁCTICA

A cluster of squares in various shades of gray, ranging from light to dark, arranged in a non-uniform pattern in the bottom-right corner of the page.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

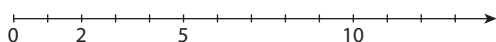
1 Completa los siguientes cuadros:

Palabras	Cifras	Ordinal
Dos mil doscientos millones	2 200 000 000	
Cinco billones seis	5 000 000 000 006	
Veintiocho	28	Vigésimo octavo
Cuarenta y cinco	45	Cuadragésimo quinto
Ciento cinco	105	

2 Indica cuáles de los siguientes números son números naturales y represéntalos en una recta:

$$-8 \quad 5 \quad \frac{1}{4} \quad 3,07 \quad 2 \quad 10 \quad 0,3333... \quad \frac{6}{5}$$

5, 2 y 10



3 Efectúa las siguientes operaciones con potencias, considerando que las letras son números naturales:

a) $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^8 \cdot 2^0 \cdot 2^1$

b) $2^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 9^4 \cdot 5^1 \cdot 9^3 \cdot 7^5 \cdot 3^0$

c) $2^3 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot 2^0 \cdot x^3 \cdot y^2$

d) $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \cdot x^0$

e) $\frac{5^0 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 5^3 \cdot 2^4 \cdot 3^2}{5^2 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \cdot 2^4 \cdot 3^0 \cdot 5^1}$

a) $2^{16} = 65\,536$

b) $2^2 \cdot 5^1 \cdot 3^{14} \cdot 7^6 = 1,12542304 \cdot 10^{13}$

c) $2^3 x^6 y^4 = 8x^6 y^4$

d) x^9

e) 2

4 Efectúa de dos maneras distintas las siguientes operaciones con números naturales:

a) $9 + (3 + 1)$

b) $(5 + 2) + (3 + 7)$

c) $8 + (1 + 6 + 3)$

a) $9 + (3 + 1) = 9 + 4 = 12 + 1 = 13$

b) $(5 + 2) + (3 + 7) = 7 + 10 = 5 + 5 + 7 = 17$

c) $8 + (1 + 6 + 3) = 8 + 10 = 9 + 9 = 18$

5 Completa la siguiente tabla:

Notación decimal	Notación científica
3 420 000 000	$3,4 \cdot 10^9$
320 000	$3,2 \cdot 10^5$
7 208 900 000	$7,2089 \cdot 10^9$
3 080	$3,08 \cdot 10^3$
514 000	$5,14 \cdot 10^5$

6 Señala el valor correcto de las siguientes raíces:

$$\sqrt{7^4} = \textcircled{49} \quad 7 \quad \sqrt{14} \quad 14$$

$$\sqrt{16 + \sqrt{81}} = 7 \quad \textcircled{5} \quad \sqrt{97} \quad 13$$

$$\frac{\sqrt{a \cdot a^5}}{\sqrt{a^3}} = a^2 \quad \textcircled{a^4} \quad \sqrt{a^3} \quad \sqrt{a^{11}}$$

7 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes frases:

a) Si un número es primo sólo es divisible por el 1.

b) Si un número a es divisible por b , entonces b es un múltiplo de a .

c) Si a es un múltiplo de b , entonces b es un divisor de a .

d) Como $54 = 2 \cdot 3^3$, entonces 54 es un múltiplo de 9 y además 18 divide a 54.

a) Falsa, también es divisible por él mismo.

b) Verdadera, por definición de múltiplo y divisor.

c) Verdadera por definición de múltiplo y divisor.

d) Verdadera, pues $54 = 9 \cdot 6$ y $54 : 18 = 3$

8 Descompón en factores primos las siguientes parejas de números y calcula su máximo común divisor y su mínimo común múltiplo:

a) 27 y 81

b) 48 y 12

c) 100 y 150

d) 729 y 19

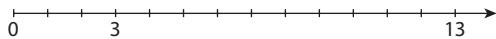
Parejas	27, 81	48, 12	100, 150	729, 19
MCD	$3^3 = 27$	$2^2 \cdot 3$	$5^2 \cdot 2$	1
mcm	$3^4 = 81$	$2^4 \cdot 3$	$5^2 \cdot 2^2 \cdot 3$	$3^6 \cdot 19$

EVALUACIÓN

1 Indica cuáles de los siguientes números son un número natural y represéntalos en una recta:

13 -23 5,01 0,111... 3 $\frac{1}{2}$ $\sqrt{2}$

Naturales: 13 y 3



2 Efectúa las siguientes operaciones con potencias y raíces:

a) $\frac{5^0 \cdot 5^3 \cdot 2^4 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 5^1}$

b) $\sqrt{49} + (5 - 1)^3 + 3 \cdot 4^2$

c) $(\sqrt{25})^3$

a) $\frac{5^2}{2} = \frac{25}{2}$

b) 119

c) 125

3 Estudia si son verdaderas o falsas las siguientes frases:

a) Si un número es par, es divisible por 2.

b) Los divisores de 9 son solamente 1 y 3.

c) Como 25 es un múltiplo de 5, 5 es un divisor de 25.

d) Si a es divisible entre b , entonces b es un divisor de a y a un múltiplo de b .

e) 100 es un número compuesto.

a) Verdadera, todo número par es divisible por 2.

b) Falsa, también 9 es un divisor de 9.

c) Verdadera, por la definición de múltiplo y divisor.

d) Verdadera, por la definición de múltiplo, divisor y ser divisible.

e) Verdadera, 100 no es primo.

4 Descompón en factores primos y determina el m.c.d. y el m.c.m. de las siguientes parejas de números:

a) 125 y 75

b) 2 y 3

c) 16 y 100

d) 28 y 23

Parejas	125 y 75	2 y 3	16 y 100	28 y 23
MCD	25	1	4	1
mcm	375	6	400	644

5 En casa hemos observado que hay que cambiar la bombona de butano cada 15 días, y las bolsas de la aspiradora cada 20 días. El lunes 1 de octubre cambiamos la bombona y pusimos una nueva bolsa a la aspiradora. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que volvamos a poner en el mismo día la bombona y la bolsa de la aspiradora? ¿Qué has calculado para determinar este resultado?

Tras 60 días, el 29 de noviembre. Hemos calculado el m.c.m. de 15 y 20.

2 NÚMEROS ENTEROS

<http://www.McGraw-Hill.es>

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1 Si un número a vale (-6) , ¿qué vale el opuesto de a más tres?

¿Cuál es el valor de a si el opuesto del opuesto de a es $(+9)$?

Si $b = (+6)$, entonces el opuesto del opuesto de b vale...

El opuesto de a más tres vale 9.

El valor de a si el opuesto del opuesto de a es $(+9)$, vale 9.

El opuesto del opuesto de b vale $(+6)$.

2 Un señor abre una cuenta corriente con 350 € el 1 de mayo, y saca 175 el 3 de mayo, 30 € el 15 de mayo y 260 € el 25 de mayo, ingresando 630 € el 27 de mayo. Determina el estado de la cuenta bancaria al final del mes, escribiendo las cantidades en la siguiente tabla:

Fecha	Ingreso	Gasto	Saldo
1 mayo	350		+350
3 mayo		175	+175
15 mayo		30	+145
25 mayo		260	-115
27 mayo	630		+515

3 Expresa mediante operaciones con números los siguientes enunciados y resuélvelos:

a) En cada estante de una librería hay 3 libros grandes y 2 pequeños. ¿Cuántos libros hay en una librería de 5 estantes?

b) Tenía 2 botellas de vino y me han regalado 3 estuches con 5 botellas cada uno. ¿Cuántas botellas tengo ahora?

a) $5 \cdot (3 + 2)$

b) $2 + 3 \cdot 5$

4 Inventa problemas que se resuelvan mediante las operaciones siguientes:

a) $2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)$ b) $2 \cdot [-5 + 3 \cdot (-7)]$

c) $(2 \cdot 5 + 3) \cdot (-7)$ d) $(+17) + (-5)$

a) Tengo 3 € en cada uno de mis 2 bolsillos y un papel que dice que tengo 7 deudas de 7 €. ¿Cuánto tengo?

b) En cada cuenta tengo una deuda de 5 euros y 3 deudas de 7 €. Si tengo 2 cuentas, ¿cuánto dinero tengo?

c) He jugado 2 series de 5 partidas y luego 3 partidas más. En todas ellas he perdido 7 bolas. ¿Qué saldo tengo al final de estas partidas?

d) Tenía 17 € y me ha llegado una carta que me comunica una deuda de 5 €. ¿Cuánto tengo?

5 Pablo, Rafa y Antonio están situados en el (-2) . Pablo da un salto de $(+5)$; Rafa da un salto el doble que Pablo, pero en sentido contrario, y Antonio hace un salto que vale el triple que el de Pablo. ¿En qué posición queda cada uno?

Pablo en $+3$, Rafael -10 y Antonio en $+13$

6 Completa:

a) $(-25) \cdot \square = (+50)$

b) $\square \cdot (-5) = (-40)$

c) $\square : 2 = (-15)$

d) $(-5) \cdot [4 + (-9)] = \square$

e) $10 \cdot [\square + (-5) + 8] = 40$

f) $(-10) + [(20 - 6) - 4 \cdot (-4)] - 6 = \square$

a) $(-25) \cdot (-2) = (+50)$

b) $(+8) \cdot (-5) = (-40)$

c) $(-30) : 2 = (-15)$

d) $(-5) \cdot [4 + (-9)] = +25$

e) $10 \cdot [(+1) + (-5) + 8] = 40$

f) $(-10) + [(20 - 6) - 4 \cdot (-4)] - 6 = 14$

7 Problema de operaciones con enteros. En una visita a unos grandes almacenes, mi padre dejó el coche en el sótano tres, subió cinco plantas, después bajó dos plantas, a continuación subió tres plantas. Expresa con números enteros el recorrido que hizo. ¿En qué planta se encuentra ahora? ¿Cuántas plantas tiene que bajar para llegar al sótano 3?

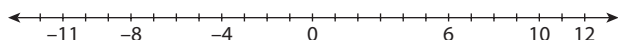
Se encuentra en el piso $+3$. Tiene que bajar 6 pisos.

EVALUACIÓN

1 Representa cada uno de estos números y sus opuestos en la recta numérica:

$(+12), (-8), (+10), (+6), (-4), (-11)$

¿Cuál es el resultado de la suma de dos números opuestos cualquiera?



El resultado de la suma de dos números opuestos es el 0.

2 Realiza las siguientes operaciones:

a) $(-2) + (+6) + (-12) + (8) =$

b) $(+2) + (+6) + (-13) + (-7) + (-8) =$

c) $(-8) + (-7) + (-5) + (+10) =$

a) 0

b) -20

c) -10

3 Halla el resultado de estas expresiones:

a) $[(+30) + (20) + (+10)] + (-50) + [(+80) + (10)] =$

b) $(-5) + [(-1) + (-4) + (-5) + (+10)] + [(-8) + (+3)] + (+10) =$

c) $[(+10) + (-20)] + [(+10) + (+20)] + 0 + [(-15) + (-10)] + (+25) =$

a) 100

b) 0

c) 0

4 Problema de operaciones con enteros.

Una fosa marina tiene 1 100 metros y un monte en la costa, al lado de la fosa, tiene una altura de 8 800 m. ¿Qué distancia hay entre el punto más alto del monte y el punto más bajo de la fosa?

9 900 m

5 Calcula:

a) $(-2) \cdot (-5 - 7)^2 + 3 \cdot (-2)$

b) $(-3 + 5) : 2 + 6 \cdot (-5)^2$

c) $[-7 \cdot 2 + 2 \cdot (-3)] : 2 + (-3^2)^2 - 4 \cdot (-3)$

d) $2^{-9} \cdot 2^5 \cdot 2^{-2}$

a) -294

b) 151

c) 103

d) $\frac{1}{64}$

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1 Resuelve los siguientes ejercicios con fracciones:

a) A real y medio la sardina y media, ¿cuánto valen 12 sardinas?

b) Los $\frac{2}{7}$ de un campo han costado 3 500 €, ¿cuánto vale el campo entero?

c) Un queso completo vale 45 €. ¿Cuánto valen $\frac{3}{4}$ del mismo?

d) ¿Cuántos gramos hay en $\frac{3}{2}$ de kilo?

- a) 12 reales b) 12 250 €
c) 36 € d) 1 500 gr

2 Estudia qué fracciones de las siguientes son equivalentes y halla una fracción irreducible de cada una:

- a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ b) $\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}$ c) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}$ d) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$

- a) No son equivalentes, y son ambas irreducibles.
b) Equivalentes, irreducible $\frac{2}{3}$.
c) No son equivalentes, y son ambas irreducibles.
d) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ No son equivalentes, y son ambas irreducibles.

3 Identifica cuáles de los siguientes números son racionales, cuáles son naturales, cuáles son enteros no naturales y cuáles son racionales pero no enteros. Representa los en una recta.

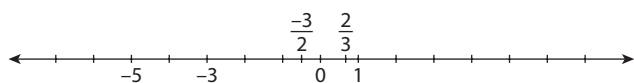
$$\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}; -5; -\frac{9}{3}; 1$$

Son racionales todos.

Naturales: 1.

Enteros no naturales: -5 y -3.

Racionales no enteros: $\frac{2}{3}$ y $-\frac{3}{2}$



4 Realiza las siguientes operaciones con números racionales:

- a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{2}{7}$ b) $\left(\frac{3}{7} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{5}$

c) $\frac{3}{5} + \frac{3}{8} : \frac{1}{2}$

d) $\frac{2}{3} + 1 : \frac{3}{7}$

a) $\frac{57}{70}$

b) $-\frac{1}{7}$

c) $\frac{27}{20}$

d) 3

5 Encuentra los siguientes números:

a) La mitad de $\frac{1}{3}$.

b) La tercera parte de $\frac{4}{5}$.

c) El doble de la quinta parte de $\frac{1}{7}$.

d) El número de veces que $\frac{1}{2}$ contiene a $\frac{1}{16}$.

e) Cuánto contiene 4 a $\frac{1}{2}$.

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{4}{15}$

c) $\frac{2}{35}$

d) 8

e) 8

6 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $5 \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^3$

b) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

c) $\sqrt{\frac{2}{8} \cdot \frac{9}{16}} \cdot 3^{-2}$

a) $\frac{211}{24}$

b) $\frac{121}{20}$

c) $\frac{1}{8}$

7 Tengo 300 €. Me gasto $\frac{1}{3}$ en una bicicleta, pero mi tío me regala 25 €. Me compro una carpeta que me cuesta $\frac{2}{25}$ de lo que me quedaba, y en la vuelta a casa se me pierden 10 €. ¿Cuántos euros me quedan?

$$200 + 25 - \frac{2}{25} \cdot 225 = 197 \text{ €}$$

8 Una pieza rectangular de tela pierde al lavarla $\frac{1}{20}$ de ancho y $\frac{1}{10}$ de largo. Si después de un lavado la pieza mide 96 cm de ancho por 2,70 m de largo, ¿cuánto medía la pieza original?

$$100,8 \times 297$$

EVALUACIÓN

1 En los siguientes pares de fracciones, indica cuál es la más grande, y cuáles son equivalentes:

a) $\frac{1}{3}; \frac{3}{5}$

b) $\frac{-21}{6}; \frac{10}{-3}$

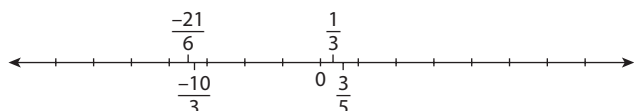
c) $\frac{9}{15}; \frac{3}{5}$

a) $\frac{1}{3} < \frac{3}{5}$

b) $\frac{-21}{6} < \frac{10}{-3}$

c) $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

2 Representa las fracciones anteriores en una recta.



3 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{-7}{2} \cdot 7$

b) $1 + \frac{1}{2} : \left(\frac{3}{7} + 2 \right)$

a) $\frac{763}{30}$

b) $\frac{41}{34}$

4 En un hospital maternal nacen cada año $\frac{52}{100}$ niñas y el resto de niños. Si en el año 2007 han nacido en dicho hospital 10 750 bebés, ¿cuántas niñas y cuántos niños han nacido?

Niñas 5 590, niños 5 160

5 Resuelve las siguientes operaciones con fracciones:

a) $\left(\frac{2}{3} \right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^{-2}$

b) $\sqrt{\frac{32}{10000} \cdot \left(\frac{4}{2} \right)^{-2}}$

a) $\frac{25}{54}$

b) $\frac{1}{10}$

6 Resuelve los siguientes problemas de operaciones con fracciones:

a) Si le quito $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{2}$, ¿cuánto queda?

b) ¿Cuánto es la mitad de $\frac{3}{4}$?

c) ¿Cuánto es $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$ de 15?

d) En $\frac{4}{5}$, ¿cuántos $\frac{1}{10}$ caben?

a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{3}{8}$

c) 2

d) 8

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1 Expresa con palabras las siguientes cantidades:

a) 5,01

b) 0,850

a) Cinco unidades y una centésima. Quinientas una centésimas.

b) Ochocientas cincuenta milésimas. Ochenta y cinco centésimas.

2 Expresa con números decimales las siguientes medidas:

a) Trescientos quince centésimas.

b) Mil veinticuatro diezmilésimas.

a) 3,15

b) 0,1024

3 Identifica, uniendo con una flecha, los distintos tipos de decimales que aparecen en la siguiente relación:

0,1212...	Decimal exacto
54,07	Decimal periódico puro
2,4565656...	Decimal periódico mixto
3,0	

4 Escribe tres situaciones en las que aparezcan decimales exactos y tres en las que se utilicen números periódicos.

Exactas: compré kilo y medio de patatas: me costó 3,25 €.

Periódicas: utilicé $\frac{1}{3}$ del paquete de harina; he recorrido los $\frac{8}{9}$ del camino.

5 Empareja las expresiones fraccionarias y decimales de los siguientes conjuntos. Completa los que faltan:

$\frac{6}{10}$	0,6
$\frac{2}{3}$	0,6666
$\frac{125}{100}$	1,25
$\frac{232}{99}$	2,2343434...

6 Busca números decimales que sean:

a) Exacto, menor que 3 y mayor que 2, con una sola cifra decimal.

b) Periódico puro entre 0,2 y 0,5.

c) Periódico mixto entre 0,25 y 0,26.

a) 2,1; 2,2; ...; 2,9

b) 0,22222...; 0,33333...; 0,4444444

c) 0,251111...; 0,25123123...; 0,2522222...; ...; 0,2599999...

7 Calcula el resultado de:

a) $2,75 \cdot 23,1$

b) $(12,08 - 9,9 : 3,1) + 2,01 \cdot 3,9$

a) 63,525

b) 1,72545161

8 Relaciona las expresiones de estos dos conjuntos (potencias y sus resultados):

$2,5^2$	0,49
$0,01^2$	6,25
$0,01^{-2}$	1
$0,7^2$	0,001

9 Obtén las raíces cuadradas de los siguientes decimales o sus radicandos

a) $\sqrt{1,69} = \square$

b) $\sqrt{\square} = 1,02$

a) 1,3

b) 1,0404

10 Aproxima los siguientes números:

a) 12,576 con dos cifras decimales.

b) 0,1983 con tres cifras decimales.

a) 12,58

b) 0,198

EVALUACIÓN

1 Indica cuáles de las siguientes expresiones decimales corresponden a decimales exactos, periódicos puros y periódicos mixtos. Escríbelos de forma abreviada y subraya de diferentes colores la parte entera, el anteperíodo (si lo hay) y el período:

a) 2,33333...

b) 5 décimas y 777 diezmilésimas

c) 25,01878787878...

d) 100,101010...

e) 3,14159

f) Cuarenta décimas y 178 cienmillonésimas

Número	Tipo	Parte entera	Periodo	Anteperíodo
2,33333...	PP	2	3	—
5 décimas y 777 diezmilésimas	Exacto	—	—	—
25,01878787878	PP	25	87	0,1
100,101010...	PP	100	10	—
3,14159	Exacto	—	—	—
Cuarenta décimas y 178 cienmillonésimas	Exacto	—	—	—

2 Obtén la fracción generatriz de los siguientes decimales:

- a) 2,33333...
- b) 5 décimas y 777 diezmilésimas
- c) 25,01878787878...
- d) 100,101010...
- e) 3,14159
- f) Cuarenta décimas y 178 cienmillonésimas
- g) 5,434343...
- h) 1,007
- i) 35 centésimas y 35 diezmilésimas y 35 millonésimas

- a) $\frac{8}{3}$
- b) $\frac{5777}{10000}$
- c) $\frac{147667}{9900}$
- d) $\frac{9910}{99}$
- e) $\frac{314159}{10000}$
- f) $\frac{40000178}{1000000}$
- g) $\frac{538}{99}$
- h) $\frac{1007}{1000}$
- i) $\frac{35}{99}$

3 Realiza las siguientes sumas y restas con números decimales:

- a) $2,75 + 0,125$
- b) $23,019 - 18,96$
- c) $0,00067 + 0,123123$
- d) Trescientas millonésimas menos cuarenta y seis milésimas.
- e) Ciento ocho centésimas menos cuarenta y cinco milésimas.
- f) $2,028 + 20,8 + 0,208$

- a) 2,875
- b) 4,059
- c) 0,123793
- d) -0,0457
- e) 1,035
- f) 23,036

4 Busca ejemplos que te permitan estudiar si las siguientes frases son verdaderas o falsas:

- a) La suma y resta de dos números decimales exactos es siempre un decimal exacto.
- b) La multiplicación de un número entero por un número decimal es un número decimal.
- c) La suma de dos números decimales periódicos es un decimal periódico.
- d) La división de un número decimal entre un número entero es siempre decimal.

- a) Verdadera.
- b) Falsa.
- c) Falsa.
- d) Verdadera.

5 Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones con decimales:

- a) $0,75 \cdot 6$
- b) $1,5 : 3$
- c) $5 : 1,25$
- d) $7,9 : 2,3$
- e) $0,246 \cdot 3,456$
- f) $3,67 : 0,56$
- g) Mitad de cincuenta y cinco centésimas
- a) 4,5
- b) 0,5
- c) 4
- d) 3,4347826
- e) 0,850176
- f) 6,553571429
- g) 0,275

6 Realiza las siguientes potencias y raíces cuadradas de números decimales:

- a) Cuadrado de 1,25
- b) Cubo de 6 milésimas
- c) $0,01^{-2}$
- d) $1,35^4$
- e) Raíz cuadrada de 6,25
- f) $\sqrt{0,0001}$
- g) $\sqrt{1,024}$
- a) 1,5625
- b) 0,000000216
- c) 10000
- d) 3,32150625
- e) 2,5
- f) 0,01
- g) 1,0119288

7 Realiza las siguientes operaciones combinadas de números racionales:

- a) $0,25 + 0,125 \cdot 1,1 - 0,01$
- b) $(1,56 - 2 \cdot 0,61) \cdot 3,1 + 0,72$
- c) $2,56 - 0,75 : 0,01 + 3,47$
- d) $(2,56 - 0,75) : (0,01 + 3,47)$
- a) 0,3775
- b) 1,774
- c) -68,97
- d) 0,5201149

8 Problema de operaciones con decimales:

Una hoja de papel tiene de grosor una décima de milímetro, 22,7 cm de ancho y 2,71 dm de largo. Calcula su volumen en milímetros cúbicos, aproximando hasta las décimas.

$$\text{Volumen} = 6,1 \text{ mm}^3$$

9 Problema de operaciones con decimales:

Las alturas de los jugadores de un equipo de baloncesto son: 0,189; 0,202; 0,193; 0,179 y 0,895 Decámetros. Obtén la altura media de estos jugadores, expresada en metros, aproximando hasta las décimas de metro.

$$\text{Media} = 1,916 \text{ m}, 1,9 \text{ m}$$

10 Redondea el resultado de las operaciones siguientes hasta las décimas:

- a) $2,35 + 1,7 \cdot 0,25$
- b) $61,02 - 28,7$
- c) $1\,006,25 + 2,5$
- a) $2,775 \approx 2,8$
- b) $32,32 \approx 32,3$
- c) $1\,008,75 \approx 1\,008,7$

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1 Dados los monomios $A(x) = 3x^2$, $B(x) = 8x^5$ y $C(x) = 2x$, calcula:

- a) $A(x) + B(x)$ b) $A(x) - B(x)$
 c) $C(x) \cdot [A(x) + B(x)]$ d) $C(x) \cdot A(x) + C(x) \cdot B(x)$
 e) $8 \cdot A(x)$ f) $A(x) \cdot [B(x) \cdot C(x)]$
 g) $[A(x)]^2$
 a) $A(x) + B(x) = 8x^5 + 3x^2$
 b) $A(x) - B(x) = 3x^2 - 8x^5$
 c) $C(x) \cdot [A(x) + B(x)] = 2x [8x^5 + 3x^2] = 16x^6 + 6x^3$
 d) $C(x) \cdot A(x) + C(x) \cdot B(x) = 6x^3 + 16x^6 = 16x^6 + 6x^3$
 e) $8 \cdot A(x) = 24x^2$
 f) $A(x) \cdot [B(x) \cdot C(x)] = 3x^2 \cdot (16x^6) = 48x^8$
 g) $[A(x)]^2 = 9x^4$

2 Efectúa las siguientes operaciones:

- a) $\frac{8x^3yz}{4xyz^4}$ b) $\frac{1}{5} \frac{x^3a^{-5}}{4xya^4}$
 c) $(6zyx^4) + (10x^4yz) - (3zx^4y)$ d) $\frac{x^3y}{4xy} + 5x^2$
 a) $\frac{2x^2}{z^3}$ b) $\frac{x^2}{20ya^9}$
 c) $13zyx^4$ d) $\frac{x^2}{4} + 5x^2 = \frac{21}{4}x^2$

3 Completa las siguientes afirmaciones:

- a) El grado del monomio $4xy^8z^2$ es
 b) La parte literal de $35yxa^8$ es
 c) En el monomio el coeficiente es 4 y la parte literal es zx^3 .
 d) El polinomio tiene grado 5 y sus variables son a, b, c .
 e) El polinomio $x^5 + 3x$ se puede sumar con el polinomio
 f) Para que dos monomios se puedan sumar o restar es necesario que tengan, es decir que sean
 a) 11 b) yxa^8
 c) $4zx^3$ d) Por ejemplo, $7ab^2c^2$
 e) Cualquier polinomio, aunque no podamos simplificar la expresión en algunos casos.
 f) La misma parte lateral, monomios semejantes.

4 Efectúa las siguientes operaciones con los polinomios $P(x) = 3x^5 + 2x^3 - 4x^2 - 9$ y $Q(x) = x^3 - 5x + 6$.

- a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$
 c) $P(x) \cdot Q(x)$ d) $Q(x) \cdot P(x)$
 e) $P(x) \cdot [-Q(x)]$ f) $2 \cdot P(x) \cdot Q(x)$
 g) $[P(x)]^2$ h) $[Q(x)]^2$
 a) $3x^5 + 3x^3 - 4x^2 - 5x - 3$
 b) $3x^5 + x^3 - 4x^2 + 5x - 15$
 c) $3x^8 - 13x^6 + 14x^5 - 10x^4 + 23x^3 - 24x^2 + 45x - 54$
 d) $3x^8 - 13x^6 + 14x^5 - 10x^4 + 23x^3 - 24x^2 + 45x - 54$
 e) $-3x^8 + 13x^6 - 14x^5 + 10x^4 - 23x^3 + 24x^2 - 45x + 54$
 f) $6x^8 - 26x^6 + 28x^5 - 20x^4 + 46x^3 - 48x^2 + 90x - 108$
 g) $9x^{10} + 12x^8 - 24x^7 + 4x^6 - 70x^5 + 16x^4 - 36x^3 + 72x^2 + 81$
 h) $x^6 - 10x^4 + 12x^3 + 25x^2 - 60x + 36$

5 Calcula el valor numérico de los polinomios obtenidos en cada uno de los apartados anteriores para el valor $x = 2$.

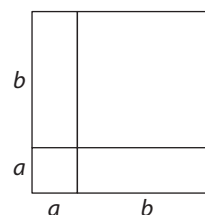
- a) 91 b) 83 c) 348 d) 348
 e) -348 f) 696 g) 7569 h) 16

6 Escribe las expresiones algebraicas de las siguientes propiedades:

- a) En la potencia de una potencia, se mantiene la misma base y se multiplican los exponentes.
 b) La potencia de un producto es el producto de las potencias.
 c) En el cociente de potencias de la misma base se mantiene la misma base y se restan los exponentes.
 d) Si una base aparece con una suma en el exponente, podemos descomponerlo en el producto de dos factores con la misma base y cada uno con uno de los sumandos.

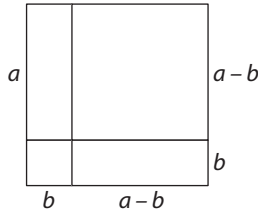
- a) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ b) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
 c) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n - m}$ d) $a^{n + m} = a^n \cdot a^m$

7 Explica qué relación existe entre el siguiente dibujo y la identidad notable $(a + b)^2$.



El área del cuadrado grande $(a + b)^2$ es la suma del área de los cuadrados a^2 y b^2 y de la de los dos rectángulos $2ab$.

8 Encuentra una relación con áreas que represente la identidad $(a - b)^2$.



Consideramos el lado del cuadrado mayor a , obteniendo que $a^2 = b^2 + (a - b)^2 + 2b(a - b)$. Operando se obtiene la igualdad.

9 Si llamamos x a la cantidad de dinero en euros que llevo en el bolsillo, ¿cómo expresarías algebraicamente los siguientes enunciados?

- a) El doble de dicha cantidad.
- b) La mitad de dicha cantidad.
- c) Esa cantidad más 8 €.
- d) Esa cantidad menos 2 €.
- e) La cuarta parte de esta cantidad.
- f) El cuadrado del doble de dicha cantidad.

- | | | |
|------------|------------------|-------------|
| a) $2x$ | b) $\frac{x}{2}$ | c) $x + 8$ |
| d) $x - 2$ | e) $\frac{x}{4}$ | f) $(2x)^2$ |

10 Calcula la expresión algebraica de $(a + b)^3$.

$$(a + b)^2 \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

EVALUACIÓN

1 Dados los monomios $5xy^3$, $-3y^3x$, $8x^3y$.

- a) ¿Cuáles son los coeficientes y partes literales de cada uno?
 - b) ¿Cuáles son sus grados?
 - c) ¿Cuáles son semejantes?
 - d) ¿Qué operaciones puedes hacer con ellos?
- a) Coeficientes 5, -3 y 8. Parte literal xy^3 de los dos primeros y x^3y del último.
- b) Grado 4
- c) $5xy^3$, $-3y^3x$
- d) Los dos primeros se pueden sumar y restar. Se pueden multiplicar y dividir todos ellos.

2 Halla el valor numérico de los tres monomios anteriores para $y = 3$ y $x = -2$.

-270, 162, -192

3 Dados los polinomios $P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 10x + 9$ y $Q(x) = -x^3 + 2x^2 - 8x + 3$, efectúa las siguientes operaciones:

- a) $7 \cdot P(x)$
- b) $P(x) + Q(x)$
- c) $P(x) - Q(x)$
- d) $P(x) \cdot Q(x)$

a) $7 \cdot P(x) = 14x^4 - 35x^2 + 70x + 63$

b) $P(x) + Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 12$

c) $P(x) - Q(x) = 2x^4 + x^3 - 7x^2 + 18x + 6$

d) $P(x) \cdot Q(x) = -2x^7 + 4x^6 - 11x^5 - 14x^4 + 51x^3 - 77x^2 - 42x + 27$

4 Si x = edad de Isabel, expresa algebraicamente las siguientes afirmaciones.

- a) La edad de Isabel dentro de 10 años.
- b) La edad de Isabel hace 5 años.
- c) El doble de la edad de Isabel.
- d) La tercera parte de la edad de Isabel.
- e) El doble de la edad de Isabel menos 5.

- | | | |
|------------------|-------------|---------|
| a) $x + 10$ | b) $x - 5$ | c) $2x$ |
| d) $\frac{x}{3}$ | e) $2x - 5$ | |

5 Explica con tus palabras las identidades notables referidas al cuadrado de una suma, al cuadrado de una diferencia y al producto de una suma por una diferencia.

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer sumando más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del minuendo menos el doble producto del minuendo por el sustraendo más el cuadrado del sustraendo.

Suma por diferencia es igual a la diferencia de cuadrados.

ACTIVIDADES
COMPLEMENTARIAS

1 Expresa en forma de ecuación e indica si son identidades o ecuaciones:

- a) Un número es igual a su doble.
 b) El doble de un número es igual a tres veces ese número menos el número.
 c) Si a un número lo multiplicamos por 3 y le sumamos 5 resulta 26.
 d) Si a un número le sumamos 5 y le restamos ese número sale 5.
- a) $x = 2x$, ecuación
 b) $2x = 3x - x$, identidad
 c) $3x + 5 = 26$, ecuación
 d) $x + 5 - 5 = x$, identidad

2 Escribe:

- a) Una ecuación de primer grado con una incógnita que tenga la solución $x = -5$.
 b) Una ecuación de segundo grado con una incógnita que tenga la solución $x = 4$.
 c) Una ecuación de primer grado con dos incógnitas que tenga la solución $x = 0, y = 2$.
- a) $x + 5 = 0$ b) $x - 4 = 0$ c) $x + y = 2$

3 Estudia si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

- a) Si a una ecuación de primer grado con una incógnita le sumamos 3 a ambos miembros, resulta una ecuación equivalente.
 b) Si a una ecuación de primer grado le restamos x a cada miembro, resulta una ecuación equivalente.
 c) Dos ecuaciones son equivalentes si tienen los mismos coeficientes, aunque no sean iguales los signos.
- a) Verdadera b) Verdadera c) Falsa

4 Comprueba si $x = 5$ es una solución de las siguientes ecuaciones:

- a) $3x - 1 = 0$
 b) $5 - 5x = 0$
 c) $2(x - 5) + 3 = 23 - 4x$
 d) $3\frac{2x}{5} - \frac{20 - 2x}{10} = x - 10$

- a) No b) No c) Sí d) No

5 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con una incógnita:

a) $3 + 2(x - 5) + 3x = 6x - 9$

b) $\frac{x-3}{4} - \frac{3x-1}{5} = 6 - x$

a) $x = 2$ b) $x = \frac{121}{13}$

6 Busca ecuaciones de segundo grado que tengan las siguientes soluciones:

a) $x = 3$ y $x = -3$

b) $x = 0$ y $x = 4$

a) $x^2 - 9 = 0$ b) $x^2 - 4x = 0$

7 Estoy en una tienda de discos, en la que cada CD vale 8 €, y cada DVD 12 €. Invento enunciados de problemas sobre cuántos CD y DVD compro, cuyas soluciones sean las siguientes. Expresa las ecuaciones del sistema y resuélvelas:

a) He comprado 2 CD y 3 DVD.

b) He comprado 5 CD y ningún DVD.

a) $8x + 12y = 52$ $y = x + 1$

b) $8x + 12y = 40$ $y = x - 5$

8 El lunes pasado cumplí años. Mi edad es la tercera parte de la que tendré en el año 2030. ¿Qué edad tengo y en qué año nací?

Nací en 1997 y tengo 11 años en 2008.

9 Plantea las ecuaciones del siguiente sistema y resuélvelo por alguno de los métodos hasta obtener los números x e y .

— Si a un número x le resto el doble de otro número y resulta 12.

— Si sumo los dos números resulta 9.

— $x - 2y = 12$

— $x + y = 9$

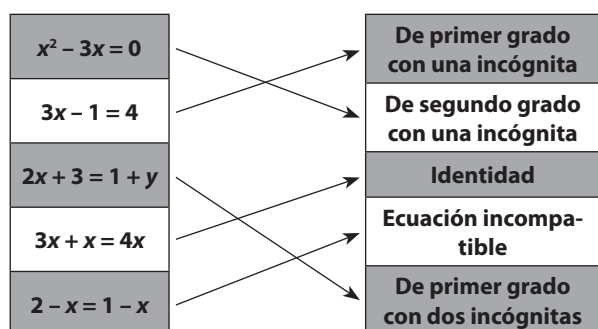
Solución: $x = 10, y = -1$

EVALUACIÓN

1 Indica si las siguientes igualdades entre expresiones algebraicas son identidades o ecuaciones:

- a) $x = x$ b) $2x - 1 = x$
 c) $3x + 5 = 3 + 3x + 2$ d) $(x + 3)2 = 9$
 a) Identidad b) Ecuación
 c) Identidad d) Ecuación

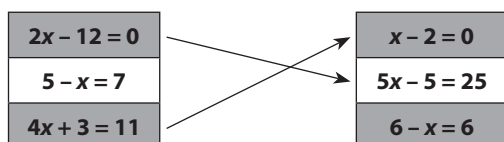
2 Indica de qué tipo son las ecuaciones siguientes, relacionándolas mediante una flecha:



3 Escribe dos ecuaciones de primer grado con una incógnita que tengan la solución $x = 5$.

$x - 5 = 0, 3x - 15 = 0$

4 Relaciona las ecuaciones que sean equivalentes, trazando una flecha entre ellas:



5 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con una incógnita:

a) $2(x - 3) + 3x - 5 = 7x - 4$ b) $\frac{2x - 1}{3} - \frac{8 - x}{2} = x - 3$
 a) $x = \frac{7}{2}$ b) $x = 8$

6 Resuelve las ecuaciones de segundo grado con una incógnita:

a) $x^2 - 12 = 13$ b) $2x^2 + 8x = 2x$
 a) $x = 5, x = -5$ b) $x = 0, x = -3$

7 Entre mi hermano y yo tenemos 100 años. Si mi hermano nació cuatro años antes que yo, ¿qué edad tenemos cada uno?

Yo tengo 48 y mi hermano 52

8 Un ángulo de un triángulo mide 35° y el segundo es doble del tercero. ¿Cuánto miden los tres ángulos del triángulo?

$35^\circ, \frac{145^\circ}{3}, \frac{290^\circ}{3}$

9 Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 5x + 3y = 9 \end{cases}$
 a) $x = 2, y = 0$ b) $x = 0, y = 3$

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1 Un grupo de 73 personas pagó 438 € por las entradas de un parque de atracciones. ¿Cuánto pagarán 69 personas?

$$\frac{438}{73} \cdot 69 = 414 \text{ €}$$

2 Para pintar una muralla de 45 m² dos trabajadores necesitan 20 litros de pintura. ¿Cuántos litros de pintura se necesitan para pintar una muralla de superficie similar que mide 18 m²?

$$\frac{20}{45} \cdot 18 = 8 \text{ latas}$$

3 Para construir una terraza, un trabajador encarga 720 baldosas cuadradas de 25 cm de lado. Su proveedor le indica que sólo tiene baldosas cuadradas de 40 cm de lado, ¿cuántas baldosas debe comprar?

$$\frac{720}{625} \cdot 1\,600 = 281,25 \approx 282$$

4 Un fabricante de detergente introduce al azar tres premios de 100 000 € por cada 5 000 cajas de detergente.

a) ¿Cuántos premios deberá introducir en una producción de 2 millones de cajas? ¿Cuánto dinero es la suma de los premios en este caso?

b) ¿A qué producción corresponde un total de premios equivalente a 600 000 €?

a) $\frac{2\,000\,000}{5\,000} \cdot 3 = 1\,200$; $1\,200 \cdot 100\,000 = 120\,000\,000$

b) 10 000 cajas de detergente.

5 Los tres integrantes de un grupo de rock se reparten las ganancias y los gastos en partes proporcionales a 3, 5 y 2. Calcula en cada caso lo que corresponde a cada uno.

a) Por un concierto obtuvieron 800 000 €.

b) En viajes gastaron 300 000 €.

c) El primer disco les ocasionó gastos por 1 000 000 € y unos ingresos de 1 760 000 €.

a) 240 000, 400 000, 160 000

b) 90 000, 150 000, 40 000

c) 228 000, 380 000, 152 000

6 En un comercio han rebajado de precio una chaqueta un 20%, y ahora se puede comprar a 28,80 €. ¿Cuál era el precio original, sin rebajar?

36 €

7 Si el precio de venta al público de un producto es de 63,00 € y está gravado con un IVA del 16%. ¿Cuál es su precio antes de aplicarle el impuesto?

$$63 : 1,16 = 54,31 \text{ €}$$

8 Si el precio de venta al público de un producto añadiéndole el IVA es de 72 € y sin el IVA sería de 67,29 €, ¿cuál es el IVA que le aplican? ¿Es un artículo de lujo?

7%, no es un artículo de lujo.

EVALUACIÓN

1 Los tres quintos de los alumnos de una clase son chicas. Si añadimos a esa clase 5 chicas y 5 chicos, ¿qué afirmación es cierta?

- a) Hay más chicas que chicos.
- b) Hay igual número de chicas que de chicos.
- c) Hay más chicos que chicas.
- d) Con la información dada no se puede saber si hay más chicas que chicos.

a), d)

2 Para obtener una pintura de un cierto color, Ana mezcla 5 litros de pintura roja, 2 litros de azul y 2 litros de pintura amarilla. ¿Cuál es la proporción de pintura roja en el total de la mezcla?

- a) $\frac{5}{2}$
- b) $\frac{9}{4}$
- c) $\frac{5}{4}$
- d) $\frac{5}{9}$

3 Pedro compró 70 artículos y Ana 90. Si cada artículo costó lo mismo y todos juntos costaron 800 €, ¿cuánto pagó Ana?

Ana pagó 450 €.

4 Una clase tiene 28 alumnos. La razón entre chicas y chicos es de 4 a 3. ¿Cuántas chicas hay en la clase?

16 chicas y 12 chicos.

5 Una fotocopiadora saca 50 hojas por minuto. Elabora una tabla de datos para registrar la cantidad de copias en 5, 10, 15, 20, 25 y 30 minutos. ¿Cuántas copias sacará en 1 hora?

Minutos	1	5	10	15	20	25	30	60
Fotocopias	50	250	500	750	1 000	1 250	1 500	3 000

6 Para una red de alcantarillado se necesitan 5 000 tubos de 3,20 m. ¿Cuántos tubos de 4 metros serían necesarios para la misma obra?

4 000 tubos de 4 m.

7 El 56 % de los alumnos de un curso asistió al examen; si el curso tiene 40 alumnos, ¿cuántos faltaron?

El 56 % salen 22 y faltaron 18.

8 En el campeonato escolar el equipo de fútbol del colegio jugó 40 partidos, de los que ganó 25, empató 10 y perdió 5 partidos. ¿Qué porcentaje representan los partidos ganados, empatados y perdidos?

Ganados 62,5 %; empatados 25 % y perdidos 12,5 %.

8 FUNCIONES

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1 Representa una gráfica que relacione el consumo eléctrico de una familia que viva en Sierra Nevada según los meses del año. Explica la información utilizada.

El alumno deberá justificar a qué es debido el aumento o disminución del consumo, el número de miembros que ha considerado, la temperatura que ha estimado, el número de electrodomésticos de la casa...

2 Representa la gráfica en el caso de que la familia anterior viviese en la playa de Cádiz. Explica la información utilizada.

Deberá comparar lo expuesto en el ejercicio 1, relacionándolo con el clima y justificando el consumo.

3 Busca una gráfica del consumo de luz, agua, gas o teléfono e interpreta la información obtenida.

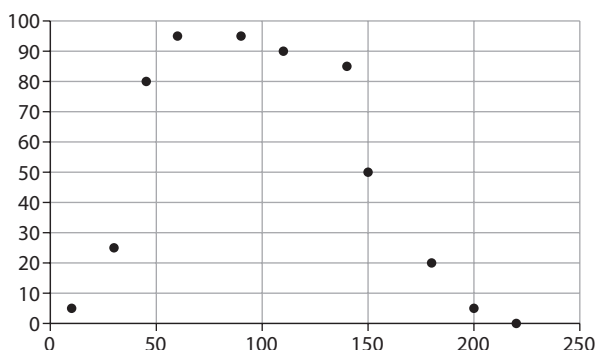
El alumno debe relacionar el consumo con las variables de las que depende: precio, número de personas, mes del año...

4 Utiliza una tabla de valores para indicar el número de horas de televisión que ves diariamente según el día del mes.

Les plantearemos si la gráfica tiende a repetirse cada siete días, si aumenta o disminuye en los fines de semana...

5 Representa los puntos de la gráfica asociada a la siguiente tabla de valores:

Tiempo de estudio (minutos)	10	30	45	60	90	110	140	150	180	200	220
Rendimiento (%)	5	25	80	95	95	90	85	50	20	5	0



6 Interpreta los datos obtenidos de la gráfica anterior. ¿Tiene sentido unir los puntos?

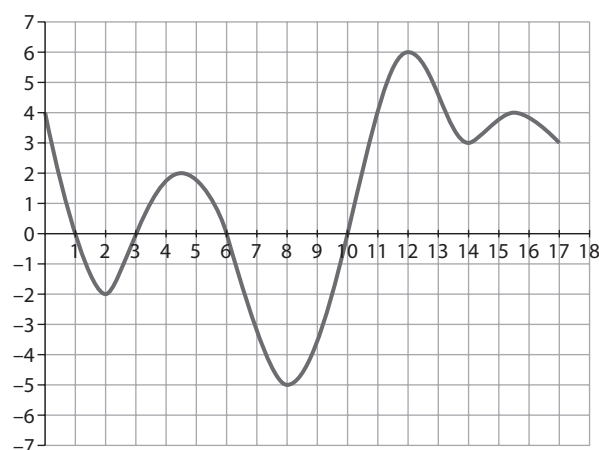
El rendimiento va aumentando con el tiempo de estudio hasta alcanzar su máximo en 95 % entre los minutos 60 y 90. Luego decrece hasta que vale 0 cuando transcurren 220.

Sí tendría sentido unir los puntos porque la variable tiempo de estudio es una variable continua y podríamos hablar del

<http://www.McGraw-Hill.es>

rendimiento en todos los valores desde 0 hasta 220 (en cada minuto tendría sentido calcular el rendimiento).

7 La gráfica siguiente representa la relación entre los meses transcurridos (eje x) y los beneficios en miles de euros de una empresa. Interpreta toda la información que puedas obtener.



Inicialmente, cuando el tiempo era 0, la empresa tenía unos beneficios de cuatro mil euros. Los beneficios disminuyen (en el primer mes, obtiene 0 beneficios) hasta el mes 2 que tiene un mínimo relativo de -2 en beneficios (dos mil euros de pérdidas). Los beneficios aumentan (en el tercer mes vuelve a tener 0 beneficios) hasta mediados de los meses cuarto y quinto, en el que obtienen un máximo relativo de dos mil euros. Vuelve a descender (en el sexto mes vuelve a tener 0 de beneficios) hasta alcanzar un mínimo absoluto en el octavo mes con cinco mil euros de pérdidas. A partir de ahí, van aumentando los beneficios (en el décimo mes los beneficios vuelven a ser 0) y alcanza un máximo absoluto en el duodécimo mes con unos beneficios de seis mil euros. Vuelven a descender y en el décimo cuarto mes tiene un mínimo relativo de tres mil euros hasta aumentar en el décimo sexto mes hasta cuatro mil euros. A partir de ahí vuelven a descender los beneficios.

8 Calcula la expresión algebraica de la función lineal que pasa por el punto (3, 10).

$$f(x) = \frac{10}{3}x$$

9 Calcula la expresión de la función afín que pasa por los puntos (1, 7) y (3, 11).

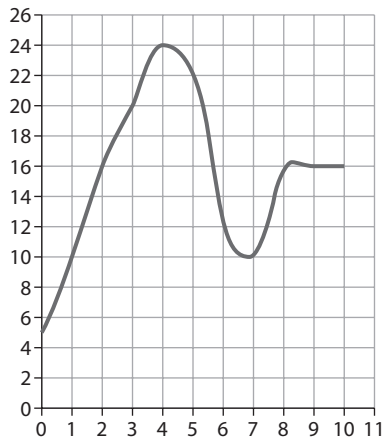
$$y = 2x + 5$$

10 Una empresa decide rebajar todos sus productos en un 20 %. Calcula la expresión algebraica que calcula los precios rebajados a partir de los originales.

$$f(x) = 2x + 5$$

EVALUACIÓN

1 Inventa dos variables para que la siguiente gráfica se corresponda a su tabla de valores. Extrae toda la información posible:



Por ejemplo la variable independiente podría ser «horas de trabajo» y la dependiente «beneficio de la empresa en miles de euros». De la información debe extraer los valores máximos y mínimos, cuándo crece y decrece la función, cuándo es constante... e interpretarlos según las variables propuestas.

2 Completa la siguiente tabla con la variable dependiente y sus correspondientes valores para que sea una función.

Edad (años)	1	2	5	10	15	25	50	62

Por ejemplo, puede ser estatura, peso, número de pie... Insistiremos que sean coherentes al estimar los valores correspondientes y las unidades y escalas utilizadas.

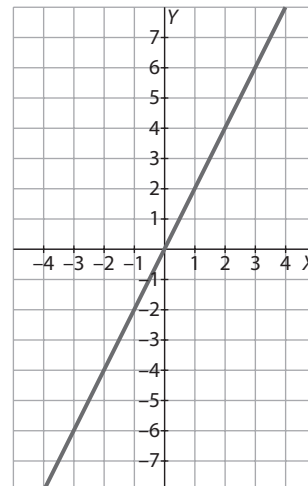
3 Completa la siguiente tabla con la variable dependiente y sus correspondientes valores para que no sea una función.

Edad (años)	1	2	5	15	15	25	50	62

Debe haber un valor de la variable independiente al que se correspondan dos valores de la variable dependiente. En este caso, para el valor 15 debe haber dos valores. Por ejemplo, hemos preguntado a ocho amigos su edad y el número de pie, y tenemos un amigo con 15 años que tiene un 36 y otro amigo de 15 años que tiene un 38.

4 Representa la gráfica de la siguiente tabla de valores que corresponde a los precios de determinados productos de un supermercado. Posteriormente, interpreta la información.

Precio en noviembre de 2007 (€)	Precio en diciembre de 2007 (€)
0,5	1
1	2
1,75	3,5
2,2	4,4
3	6
10	20
12	24
18,5	37



Se corresponde con la función $f(x) = 2x$. Todos los precios han aumentado el doble.

5 Juan siempre saca 2 puntos menos que Fran en los exámenes de Matemáticas. Escribe la expresión algebraica que expresa la nota de Juan a partir de la de Fran. Construye la tabla de valores y la gráfica asociada y decide si se pueden unir los puntos de la misma.

x = nota de Fran, entonces la nota de Juan es $f(x) = x - 2$.

Nota de Fran	5	6	7	8	9	10
Nota de Juan	3	4	5	6	7	8

Sí tendría sentido unir los puntos cuando las notas pudiesen ser decimales, por ejemplo si Fran pudiese obtener un 7,32 en los exámenes.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1 Completa la siguiente tabla:

Medida compleja del tiempo en horas, minutos y segundos	Medida decimal del tiempo en horas
20 min	0,3
1 h 30 min	1,5
3 h 35 min 35 s	3,59305556
2 h 27 min	2,45
3 h 30 min	3,5
3 h 3 min	3,05

2 Quiero grabar un CD con canciones que duran:

- | | |
|-------------|--------------|
| a) 2 m 35 s | b) 4 m 45 s |
| c) 5 m 53 s | d) 12 m 38 s |
| e) 7 m 45 s | f) 13 m 46 s |
| g) 8 m 13 s | h) 3 m 58 s |
| i) 6 m 12 s | j) 10 m 3 s |
| k) 3 m 49 s | |

Si en el CD caben 72 minutos, estudia si puedo grabarlas todas. Si no es así, indica qué canciones puedo grabar de manera que tenga el máximo número de minutos de grabación.

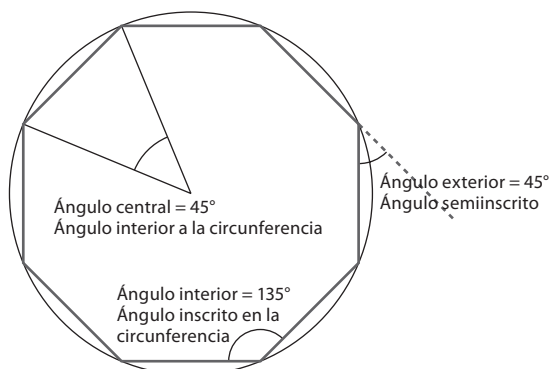
Duran 79 m 37 s. No caben. La mejor forma de aprovecharlo es incluyendo las canciones c, d, e, f, g, h, i, k y l. Entre todas hacen 71 m 40 s.

3 Expresa en forma compleja las siguientes fracciones de tiempo:

- a) Un tercio de día.
b) Tres octavos de semana.
c) Un dieciseisavo de hora.

- a) 8 horas b) 63 horas c) 3 min 45 s

4 Dibuja un octógono regular inscrito en una circunferencia. Indica sobre él ángulos de diferentes medidas, expresando cuánto mide cada uno.



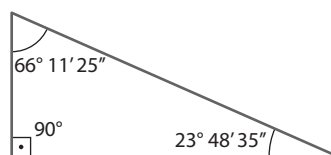
5 Dibuja las figuras siguientes y determina la medida de los ángulos que faltan. Justifica qué relación existe entre los ángulos conocidos y los desconocidos.

a) Un triángulo rectángulo, uno de cuyos ángulos mide $23^\circ 48' 35''$.

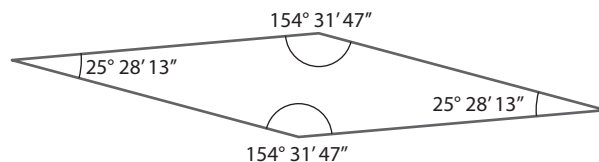
b) Un rombo con un ángulo de $25^\circ 28' 13''$.

c) Un trapecio rectángulo con un ángulo de $38^\circ 45'$.

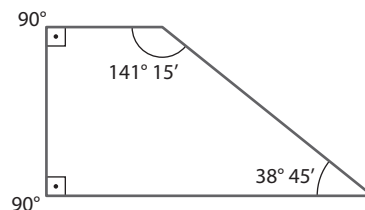
a) Triángulo rectángulo (la suma de los tres es 180°).



b) Rombo (la suma de los cuatro es 360° , dos consecutivos son suplementarios).

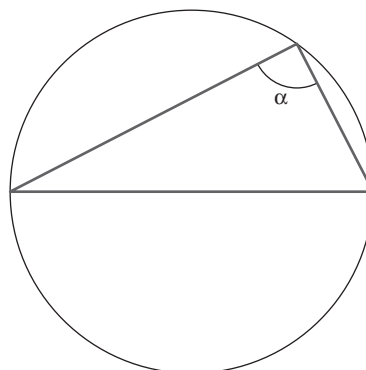


c) Trapecio rectángulo (suma 360° , dos consecutivos son suplementarios, por alternos internos).



6 Demuestra que todo triángulo que tiene como un lado un diámetro de la circunferencia que pasa por los tres vértices es un triángulo rectángulo. Indica qué tipo de ángulos son los del triángulo en relación con la circunferencia.

El ángulo α está inscrito en la circunferencia. Como su lado opuesto es un diámetro, divide a la circunferencia en dos partes iguales, luego el arco que abarca mide 180° , por lo tanto su medida es 90° , y el triángulo es rectángulo. Los tres ángulos del triángulo son ángulos inscritos en la circunferencia.



EVALUACIÓN

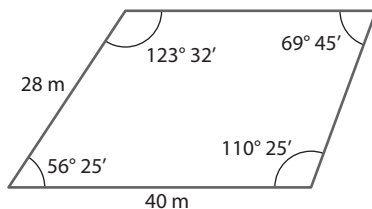
1 Calcula y expresa en forma compleja:

- a) $8,75 \text{ h} + 3,45 \text{ h}$
 b) $18,05 \text{ h} \cdot 7$
 c) $4,8 \text{ h} : 6$
 a) 12 h 12 min b) 126 h 21 min c) 48 min

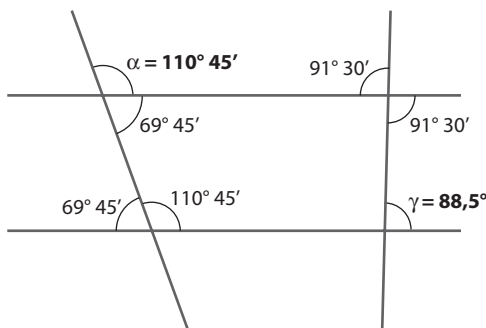
2 Un corredor de fondo ha hecho 4 series de 1000 metros con un tiempo de 1 minuto y 45 segundos, 3 series de 135 segundos y 2 series de 1,6 minutos. Determina el tiempo total que ha empleado en correr. Calcula el tiempo medio empleado en 1000 metros en estas 9 series.

17 min 21 s. Media: 1 min 55,666 seg

3 Un solar tiene forma de cuadrilátero con dos lados paralelos desiguales, uno de los cuales mide 40 metros. Uno de los lados no paralelos forma con el de 40 m un ángulo de $56^\circ 25'$ y mide 28 metros, y el otro ángulo correspondiente al lado de 40 metros mide $110,25^\circ$. Dibuja el solar y determina los otros dos ángulos del cuadrilátero.

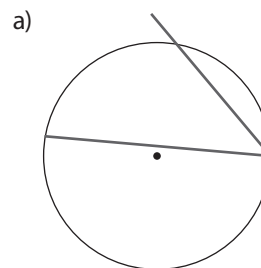


4 En la siguiente figura sólo conocemos los datos que aparecen sobre ella. Determina qué ángulos son iguales y justifica por qué. Calcula el valor de todos los ángulos de la figura.

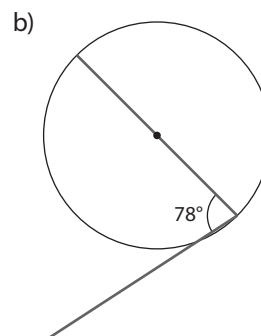


5 Dibuja sobre la siguiente circunferencia, empleando un transportador de ángulos, los ángulos indicados. Indica cuánto miden los trozos de arco correspondientes:

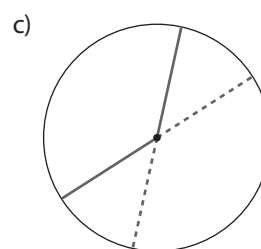
- a) Un ángulo inscrito de amplitud 45° .
 b) Un ángulo semiinscrito de amplitud 78° .
 c) Un ángulo interior de amplitud 135° .
 d) Un ángulo exterior de amplitud 39° .



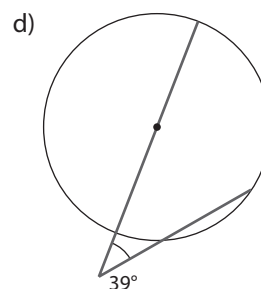
90°



156°



135°



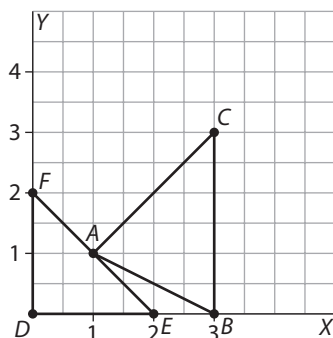
$110^\circ, 32^\circ$

ACTIVIDADES
COMPLEMENTARIAS

1 Representa gráficamente dos circunferencias cualesquiera. Estudia y justifica si son semejantes.

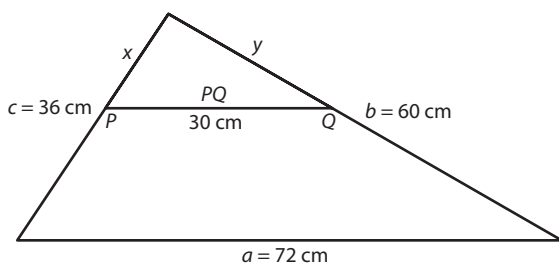
Sí, son semejantes.

2 Representa gráficamente en el plano cartesiano las figuras ABC y DEF sabiendo que $A(1, 1)$, $B(3, 0)$, $C(3, 3)$, $D(0, 0)$, $E(2, 0)$ y $F(0, 2)$. ¿Son figuras semejantes?



No son semejantes.

3 Dado el triángulo ABC de lados $a = 72$ cm, $b = 60$ cm y $c = 36$ cm, se traza una recta paralela al lado a que corta a los lados b y c en los puntos P y Q respectivamente. Calcula las longitudes de los lados del triángulo APQ sabiendo que $PQ = 30$ cm.



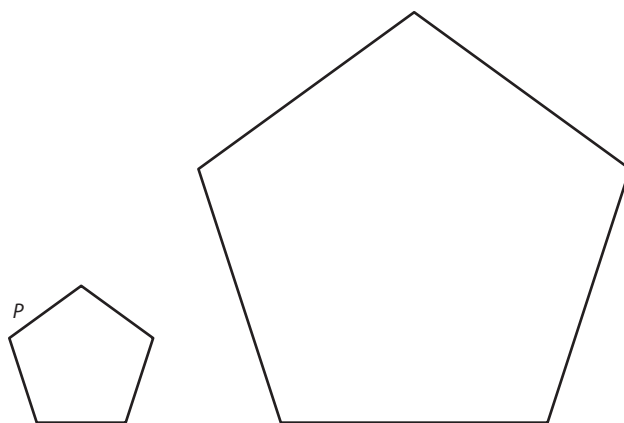
$$\frac{x}{36} = \frac{30}{72} \Leftrightarrow x = 15 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{60} = \frac{30}{72} \Leftrightarrow y = 25 \text{ cm}$$

4 Se han construido dos edificios semejantes de alturas 20 m y 25 m respectivamente. El más bajo de ellos se ha levantado sobre una base de 100 m^2 . ¿Cuál es la superficie sobre la que se ha construido el más alto de los edificios?

$$\frac{h'}{h} = \frac{25}{20} \Leftrightarrow \frac{S'}{S} = k^2 \Leftrightarrow \frac{S'}{100} = \left(\frac{25}{20}\right)^2 \Leftrightarrow S' = 156,25 \text{ m}^2$$

5 Dibuja primero un pentágono P , y desde un punto exterior a P traza otro pentágono semejante con razón de semejanza 3.



6 Queremos hacer una fotocopia de un plano de escala 1:1 000, pero el papel utilizado por la máquina es pequeño en comparación con el plano. Por este motivo realizamos una reducción al 40 %.

a) ¿Cuánto mide en el plano original una distancia de 1 cm en la fotocopia?

b) ¿Qué escala presenta el plano de la fotocopia?

a) 0,6 cm

b) 1:4 000

7 Una distancia de 550 km está representada sobre un mapa por un segmento de longitud 1 cm. Halla la escala utilizada.

1: 55 000 000

8 En un triángulo isósceles, la base mide 10 cm y los otros dos lados miden 12 cm cada uno. Halla la altura correspondiente al lado desigual.

$$h = \sqrt{12^2 - 10^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{44} \text{ cm}$$

EVALUACIÓN

1 Una distancia de 15 km está representada en un plano por 3 cm. ¿Cuál es la escala utilizada?

1 : 500 000

2 Se han realizado dos réplicas en miniatura de un determinado modelo real de bicicleta. La primera de ellas a escala 1:37 y la segunda a escala 1:62. ¿Cuál de las dos réplicas es más pequeña?

La segunda.

3 Halla la altura de un rectángulo cuya base mide 21 cm y su diagonal 29 cm.

$$h = \sqrt{29^2 - 21^2} \Leftrightarrow h = 20 \text{ cm}$$

4 Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Se construye otro semejante a él cuyo lado menor mide 15 cm.

a) ¿Cuál es la razón de semejanza?

b) Halla la longitud de los otros dos lados del segundo triángulo.

c) El primer triángulo es rectángulo. ¿Podemos asegurar que el segundo también lo será?

a) $\frac{15}{3} = 5$

b) $\frac{15}{3} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = 25 \text{ cm}; \frac{15}{3} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow y = 20 \text{ cm}$

c) Sí, porque son semejantes.

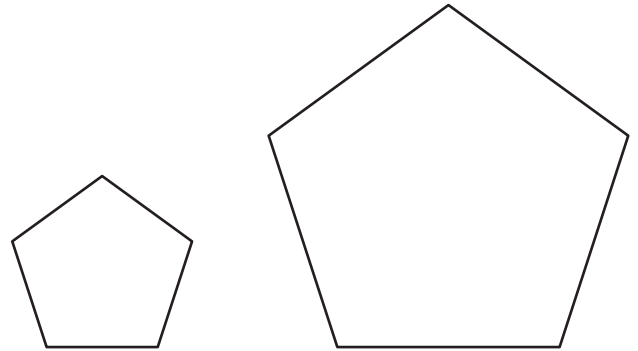
5 Dibuja en tu cuaderno un pentágono irregular. Ampliálo al doble de su tamaño:

a) Proyectándolo desde un punto exterior.

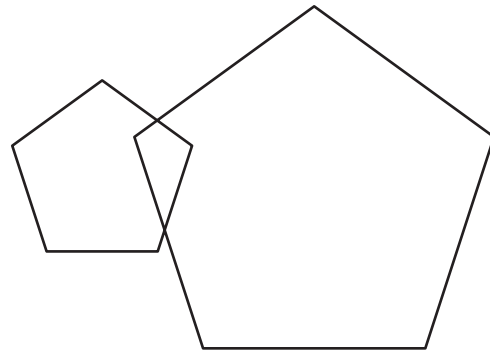
b) Proyectándolo desde un punto interior.

c) Proyectándolo desde uno de sus vértices.

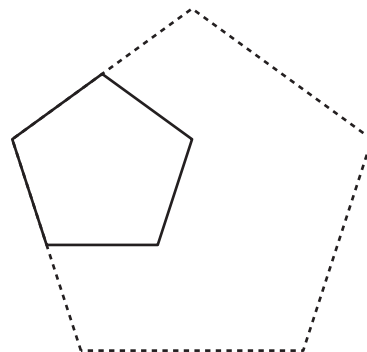
a)



b)



c)



ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

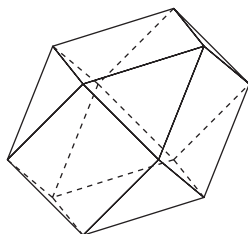
1 Forma los poliedros regulares con plastilina.

Para formar los poliedros regulares con plastilina hay diversas técnicas. Una de ellas consiste en construir en primer lugar el cubo, que se puede hacer apretando con algo plano y rígido contra el suelo, para hacer las caras paralelas. Una vez construido el cubo, se puede construir el tetraedro truncando el cubo, cortando dos caras contiguas por sus diagonales que parten de un vértice común con un corte que llegue a la arista opuesta a dicho vértice. Si se hace esto por cuatro lugares aparece el tetraedro. Si se trunca el tetraedro, cortando por los puntos medios de las aristas, se obtiene el octaedro. El dodecaedro se puede hacer formando dos pirámides pentagonales, y truncándolas, para obtener dos partes. Se unen estos dos troncos de pirámide tratando de que las aristas de uno de ellos caiga en el centro de las aristas de la base del otro. Luego se trunca cada vértice de las caras unidas, hasta formar pentágonos, lo que dará lugar al dodecaedro. Por último, el icosaedro se puede hacer en tres partes. Se forman dos pirámides pentagonales de caras triángulos equiláteros, y un antiprisma de base un pentágono y caras triángulos equiláteros iguales a los anteriores, y se unen entre sí.

2 Busca todos los poliedros regulares que tienen sus caras con forma de triángulos equiláteros. Indica el nombre de cada uno, cuántas caras, vértices y aristas tienen y dibújalos.

- a) Tetraedro: 4 caras, 4 vértices, 6 aristas.
- b) Octaedro: 8 caras, 6 vértices, 12 aristas
- c) Icosaedro: 20 caras, 12 vértices, 30 aristas.

3 Se cortan todas las esquinas de un cubo de 2 cm de lado, como se indica en la figura, a una distancia de 1 cm sobre cada arista. Describe el nuevo poliedro que se obtiene, haciendo un dibujo. Determina qué polígonos forman las caras y cuántos vértices, caras y aristas tiene el sólido así obtenido.



Se obtiene un cuboctaedro, que tiene 14 caras, 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros, 12 vértices y 24 aristas.

<http://www.McGraw-Hill.es>

4 Se van a hacer unos túneles que atraviesan un cubo grande, como se indica en la figura. Calcula cuántos cubos pequeños quedan.

El número de cubos pequeños que quedan es:

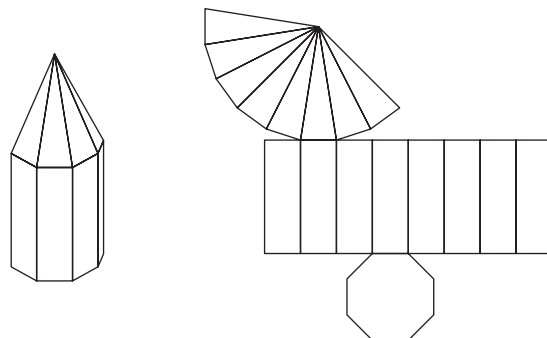
$$5^3 - [5 \cdot 3 \cdot 3 - 6 \cdot 1 - 1 \cdot 2] = 88 \text{ cubos.}$$

También puede calcularse por la operación:

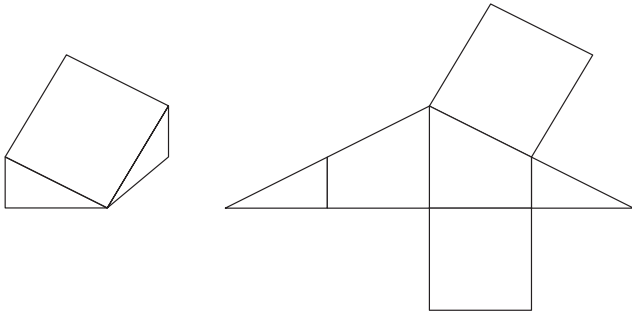
$$5^3 - [5 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 4] = 125 - 37 = 88$$

5 Una torre está formada por un prisma octogonal rematado por una pirámide octogonal, que le hace de tejado, pues la base de la pirámide coincide con una de las bases del prisma. Dibuja la torre. Determina el número de vértices, caras y aristas de la torre, y el orden de cada vértice. Indica qué polígonos forman las caras y cuántos hay de cada clase. Dibuja un desarrollo plano de la torre.

Tiene 17 vértices, 17 caras (contando con la del suelo, pues sin ella no es un poliedro), 32 aristas (naturalmente, contando con las del suelo). El vértice superior tiene orden 8 (concurren en él 8 aristas), los vértices de la base del tejado tienen orden 4 (8 vértices de orden 4), y los del suelo tienen orden 3 (8 vértices de orden 3). Las caras son 8 triángulos isósceles, 8 rectángulos y un octógono.



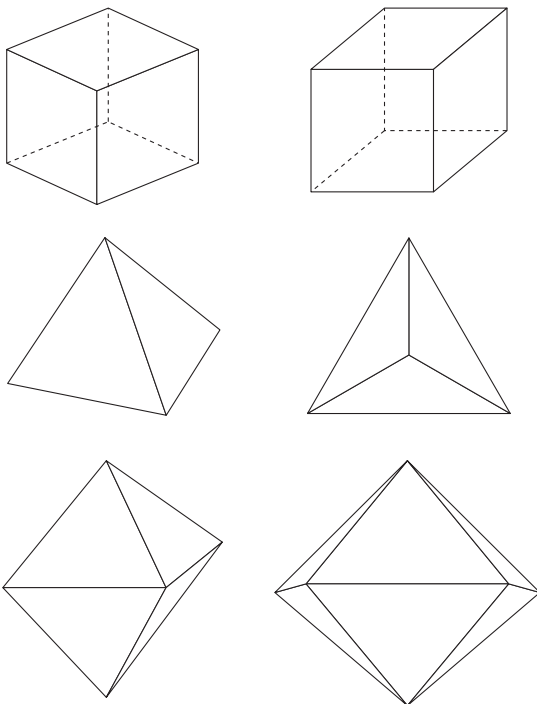
6 La figura siguiente es el logotipo de una marca comercial. Se trata de un cubo en el que se han unido dos vértices y dos puntos medios de dos aristas. Identifica y escribe las características de todos los poliedros que aparecen en la figura (nombre y número de caras, el número de vértices y aristas, y el tipo de poliedro). Dibuja un desarrollo de algún poliedro de los que aparecen en la figura que no sea el cubo.



Triángulo rectángulo, trapezoide, cuadrado y rombo.

Vértices: 7; caras: 6; aristas: 11.

7 Un cubo se puede dibujar de varias formas. En la figura siguiente aparece dibujado de dos maneras diferentes. Dibuja de dos formas distintas el tetraedro y el octaedro.

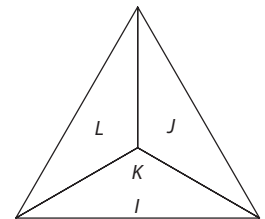
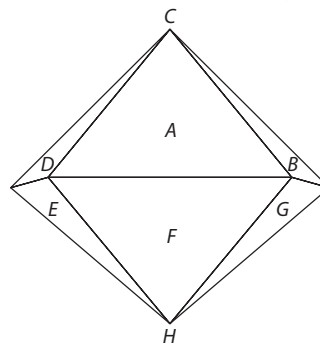
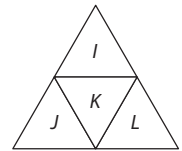
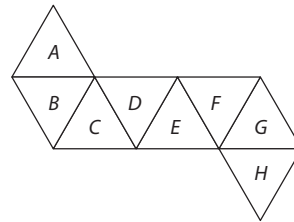


8 Calcula el área lateral y el volumen de un octaedro de arista 5 cm.

$$\text{Área lateral} = 8 \cdot \frac{5^2 \sqrt{3}}{4} = 50 \sqrt{3} \approx 86,6 \text{ cm}^2.$$

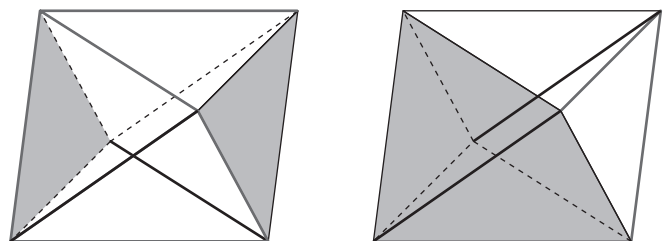
$$\text{Volumen} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot \frac{5 \sqrt{2}}{2} = \frac{125 \sqrt{2}}{3} \approx 58,9 \text{ cm}^3.$$

9 Las siguientes figuras son desarrollos de poliedros regulares. Señala en ellas las caras que van a estar en planos paralelos y en planos secantes cuando se formen los poliedros correspondientes. Señala rectas que sean paralelas, secantes y que se crucen, cuando se formen los poliedros regulares correspondientes.



EVALUACIÓN

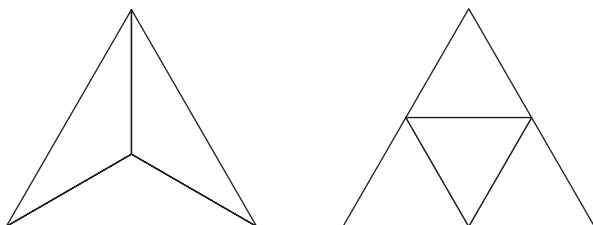
1 El poliedro de la figura es un octaedro regular. Determina y marca en rojo en el octaedro las aristas que sean paralelas, en azul dos aristas que se corten y en verde dos aristas que se crucen. Sombrea en rojo dos planos paralelos y en azul dos planos que se cortan.



11 POLIEDROS

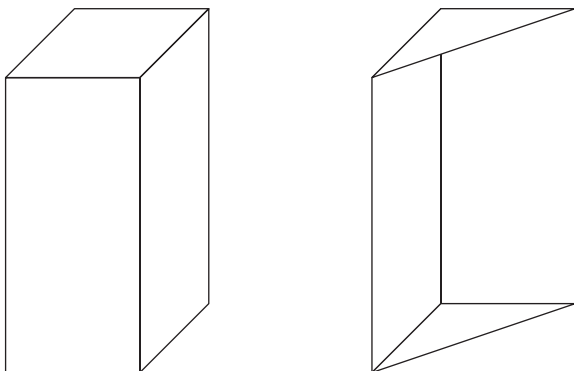
2 Define el tetraedro regular e indica sus características y elementos. Dibuja el tetraedro regular y un desarrollo plano.

Poliedro regular formado por 4 triángulos equiláteros. Tiene 4 caras triángulos equiláteros, 4 vértices y 6 aristas.



3 Describe dos objetos cotidianos que tengan forma de prismas y que no sean iguales. En cada uno de ellos indica su nombre y sus elementos (número y tipo de caras, número de aristas y de vértices). Dibuja los dos prismas.

- Altavoz. Prisma rectangular, con 2 bases en forma de rectángulo y 4 caras laterales en forma de rectángulo, 8 vértices.
- Mueble de esquina. Prisma triangular, 2 bases en forma de triángulo rectángulo y 3 caras laterales en forma de rectángulo, 6 vértices.



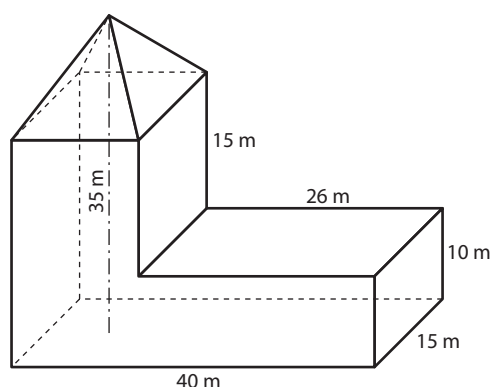
<http://www.McGraw-Hill.es>

4 Calcula el área y el volumen de una pirámide cuadrada de caras laterales triángulos equiláteros, sabiendo que el lado de la base mide 6 cm.

$$\text{Área} = 6^2 + 4 \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} \approx 98,35 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot \frac{6\sqrt{2}}{2} \approx 50,91 \text{ cm}^3.$$

5 Calcula el área de las paredes y el volumen del edificio siguiente en forma de poliedro. De él se conocen los datos que aparecen en la figura.



$$\text{Área lateral} = 2 \cdot 620 + 150 + 225 + 375 = 1990 \text{ m}^2.$$

$$\text{Volumen} = 40 \cdot 15 \cdot 10 + 14 \cdot 15 \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 14 \cdot 15 \cdot 10 = 9850 \text{ m}^3.$$

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1 Identifica cuerpos de revolución del entorno que tengan las formas siguientes:

- a) Un cono.
 - b) Un cilindro.
 - c) Un cilindro rematado por un cono de igual base.
 - d) Dos conos unidos por la base.
 - e) Un cilindro rematado por la mitad de una esfera.
- a) Cucuruchos de helado, capirote de penitente, tejado de torres.
- b) Tuberías, columnas, lápices, etc.
- c) Estaca cilíndrica, iglesia de torre cilíndrica y tejado cónico, punta, etcétera.
- d) Boya marina, corcho de pescar,
- e) Bastón, mástil de bandera, pata de algunas camas, etcétera.

2 Identifica los cuerpos de revolución cuyos desarrollos son los de las figuras adjuntas.

- a) Cilindro b) Tronco de cono c) Cono

3 Los jugadores de un equipo de baloncesto han decidido jugar con un balón en forma de un gran dado. Estudia qué dificultades van a encontrar en este juego. Para que les resulte más sencillo encestar, han decidido poner un «aro» de forma cuadrada ¿Qué han ganado y qué nuevas dificultades van a encontrar?

Dificultades: el dado dará botes irregulares, por tanto no es conveniente lanzarlo a tablero; si el aro guarda con la diagonal del cubo la misma relación que con el diámetro de la esfera, será más fácil de introducir, el dado puede hacerles daño en las manos, etcétera.

Si el aro es cuadrado: el dado se introducirá sólo si las aristas del aro son casi paralelas a las caras del dado, pues la diagonal será más grande que el aro, o más próxima a la amplitud del aro, lo que dificultará atravesarlo.

4 Existe un juego infantil que consiste en un recipiente hueco que tiene una tapadera con agujeros de diversas formas, tal como se muestra en la figura. El niño tiene que introducir unas formas (E, P, C, S) a través de estos agujeros (1, 2 y 3). Identifica cuál de estas formas es un cuerpo de revolución. Empareja cada forma con el agujero o los agujeros en los que puede entrar. Estudia cuál es la forma que el niño puede introducir más fácilmente.

La forma E podrá colarse por 3, la C por 3, la P por 1 y la S por 2 (y por 3 si coincide su diámetro con el de 3).

La más fácil de colar será la E, ya que puede colarla de cualquier forma. Después la C, ya que puede colarlo con la única condición de que la generatriz sea perpendicular al plano del agujero. Después la P, ya que hay varias formas de colarlo, con tal de que las caras sean paralelas a los lados del agujero 1, lo que supone que puede colarlo de 4 formas. Por último la S, que sólo admite dos posiciones simétricas.

5 En un bar hay vasos en forma cilíndrica, con una altura de 13 cm y diámetro 8 cm. El vaso lleno de refresco cuesta 1,50 €. Han comprado otros vasos de la misma forma que tienen de altura 8 cm y de diámetro de la base 6 cm. ¿Cuánto debe costar este nuevo vaso lleno de refresco?

$$\frac{27}{52} \cdot 1,5 = 0,51 \text{ €}$$

6 Un pintor tiene que pintar las 8 columnas de un garaje, que tienen forma de cilindro. Cada columna tiene un diámetro de 1 m y una altura de 3,5 m. ¿Qué superficie tiene que pintar?

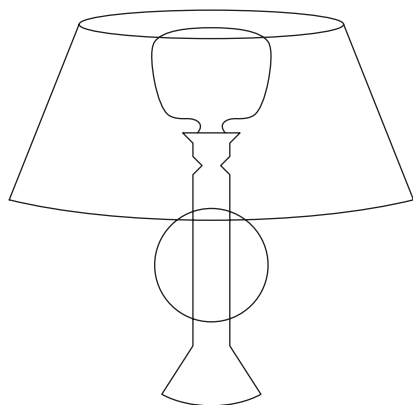
$$8 \cdot 3,5 \cdot \pi \approx 87,92 \text{ m}^2$$

7 Busca en una enciclopedia las coordenadas geográficas de todas las ciudades españolas cuyo nombre comienza por C.

Cáceres: -6 de longitud y 39 de latitud; Cádiz: -1 longitud, 5 de latitud; Castellón de la Plana, 0 longitud y 40 latitud; Ciudad Real: -4 longitud y 39 latitud; Córdoba: -5 longitud, 38 latitud; Coruña: -8 longitud y 43 latitud.

8 Una lámpara está formada por un tronco de cono que sirve de base, sobre el cual hay un cilindro. Sobre este cilindro hay una porción de esfera, y sobre ella otro cilindro igual al anterior, sobre el que está el casquillo y la bombilla. Su pantalla es un tronco de cono. Dibuja la lámpara y estudia si es un cuerpo de revolución.

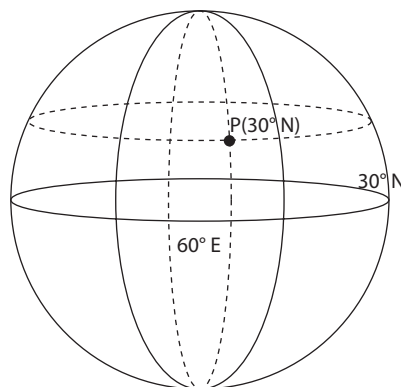
Se trata de un cuerpo de revolución, pues está formado por varios cuerpos de revolución que tienen el mismo eje.



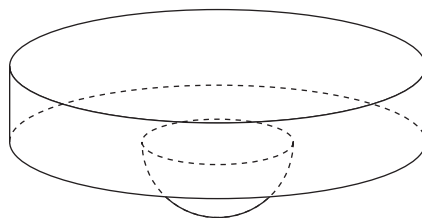
3 Un tubo de cartón para guardar planos tiene forma de cilindro. Su longitud es 75 cm y el diámetro de la base es 12 cm. Determina la cantidad de cartón que se ha utilizado para fabricarlo, teniendo en cuenta además que tiene dos tapaderas.

$$\text{Cartón: } 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 75 + 2 \cdot \pi \cdot 36 \approx 3052 \text{ cm}^2$$

4 Un lugar en la Tierra tiene de longitud 30° N y de latitud 60° E . Dibuja una esfera e identifica este punto en ella.



5 Determina el volumen que tiene una piscina que está formada por un cilindro de diámetro 15 m, y tiene en su centro una semiesfera de diámetro 6 m, sabiendo que la profundidad por el cilindro es de 1,5 m.



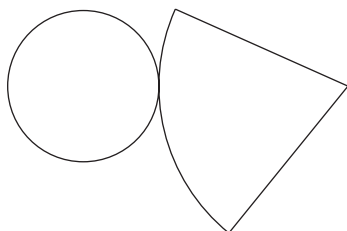
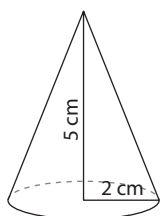
$$\text{Volumen: } \pi \cdot 7,5^2 \cdot 1,5 + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \approx 321 \text{ m}^3$$

EVALUACIÓN

1 Indica tres objetos del entorno que tengan forma de cilindro, tres que sean conos y tres que tengan forma de esfera.

- a) Cilindro: Tuberías, columnas, lápices, etcétera.
- b) Cono: Cucuruchos de helado, capirote de penitente, tejado de torres, etcétera.
- c) Pelotas, rodamientos, pompas de jabón, etcétera.

2 Dibuja un cono que tenga de altura 5 cm y de radio de la base 2 cm. Dibuja su desarrollo plano.



ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1 Un médico atendió la siguiente cantidad de pacientes durante 20 días en el servicio de urgencias:

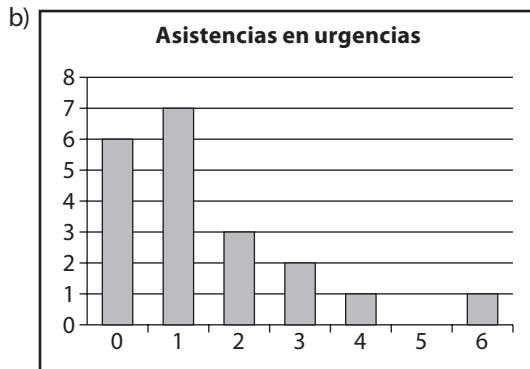
1 3 1 1 0 1 0 2 2 0 0 1 1 2 0 6 3 1 4 0

a) Resume los datos en una tabla que muestre las frecuencias absolutas y relativas del número de pacientes que atendió en un día. Dibuja el correspondiente diagrama de barras.

b) Calcula el número medio de pacientes que atendió en un día (la media) y la mediana.

a)

Asistencias	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0	6	0,3
1	7	0,35
2	3	0,15
3	2	0,1
4	1	0,05
5	0	0
6	1	0,05
Total	20	1



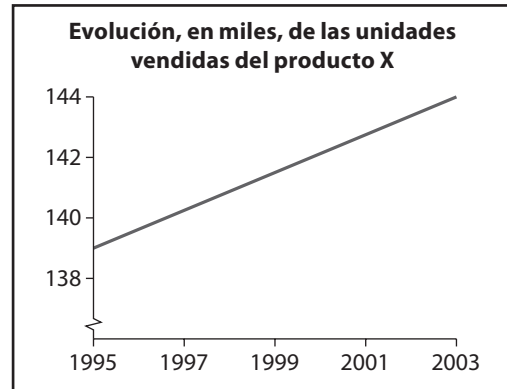
$Me = 1$; $\bar{x} = 1,45$

2 Durante este año se han contabilizado los siguientes nacimientos en una determinada ciudad:

Hospital	A	B	C	D	F
N.º nacimientos	759	538	150	567	293

Dibuja, en papel milimetrado, un pictograma de cunas que represente el número de nacimientos en cada hospital (el área de la cuna debe ser proporcional a la frecuencia).

3 Una compañía que desea captar inversores les muestra el siguiente gráfico sobre la evolución de las ventas de su producto. La subida parece muy fuerte, pero no fue tanto. ¿Sabrías encontrar la trampa?



La escala del eje vertical se presenta muy pequeña si se hiciera con una escala mayor se vería que la subida no fue tan fuerte.

4 El curso de 1.ºA ha obtenido una nota media en Matemáticas de 6,7, y el de 1.ºB de 6,45. Sabiendo que la nota media conjunta es de 6,6 y que las clases tienen entre 15 y 30 alumnos, calcula el número de estudiantes que puede haber en cada grupo.

Los alumnos de 1.ºA serán 1,5 veces los alumnos de 1.ºB, luego el número de alumnos en cada grupo podrá ser: 24-16; 27-18; 30-20.

5 Un inversor compra 1 800 acciones de la empresa ACME a 13 euros la acción. Meses más tarde vuelve a adquirir 1 200 acciones de la misma empresa a 10 euros. Al final, vende todas las acciones a 12 euros la acción. ¿Cuál fue el beneficio medio por acción de las operaciones? ¿Cuánto ganó en total?

El beneficio medio por acción fueron 0,20 € y la ganancia final 600 €.

6 En la empresa A el sueldo medio es de 1 900 euros mensuales. El empresario decide aumentar 200 euros a cada empleado. ¿Cuáles es el sueldo medio tras el aumento?

2 100 €

7 Un labrador recorre a caballo el perímetro de una finca cuadrada de 2 km de lado. Los dos primeros km los recorre a 30 km/h, los dos siguientes a 25 km/h, el tercer lado a 20 km/h y el último a 15 km/h. ¿A qué velocidad media recorrió el contorno de la finca?

La velocidad media del recorrido fue 22,5 km/h.

8 Calcula la mediana de las siguientes distribuciones:

Nota (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º alumnos (n)	3	3	2	5	8	12	10	8	4	0	3

La mediana es 5.

9 Comenta los errores cometidos al realizar los siguientes muestreos:

- Para hacer un estudio sobre el número de descendientes en las familias de una ciudad, tomo la muestra preguntando a los estudiantes de varios colegios.
- Para realizar una encuesta sobre las novelas más vendidas pregunto a profesores de literatura, que son expertos en el tema.
- Para realizar una encuesta sobre gustos del consumidor, una empresa de refrescos realizó las muestras dando a probar, a ciegas, entre el refresco de su marca y otro refresco sin determinar.
- No se incluyen en el muestreo las familias con hijos que no están en edad escolar.
- Al preguntar únicamente a los profesores de literatura estoy limitando el estudio a un sector de la población que tendrá criterios de compra parecidos o al menos distintos de otros sectores de la población.
- Al limitar la oferta de refrescos a dos puede ser que elijan el de nuestra empresa porque no guste el otro ofertado, pero si se presentan más refrescos a elegir el resultado nos dará una mejor aproximación del gusto del consumidor.

EVALUACIÓN

1 En un colegio en el que hay 250 chicos y 300 chicas se quiere hacer un estudio estadístico sobre sus gustos deportivos. Indica cuántos habrá que escoger para ello:

- 25 chicos y 30 chicas.
- 30 chicos y 25 chicas.
- El mismo número de chicos que de chicas.
- Muchas más chicas que chicos.

La respuesta es a) para mantener la misma proporción.

2 En una muestra de 25 familias se ha observado que el número de coches que poseen es el siguiente:

0, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 3, 5, 3, 2, 1,
1, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 0, 4, 2, 4

Con estos datos podemos afirmar que la moda de la distribución del número de coches es:

- 1
- 2
- 3
- 4

3 Teniendo en cuenta los datos de la actividad 2, la mediana es:

- 1
- 2
- 3
- 4

4 La media aritmética de los datos de la actividad 2 es:

- 1
- 2
- 3
- 4

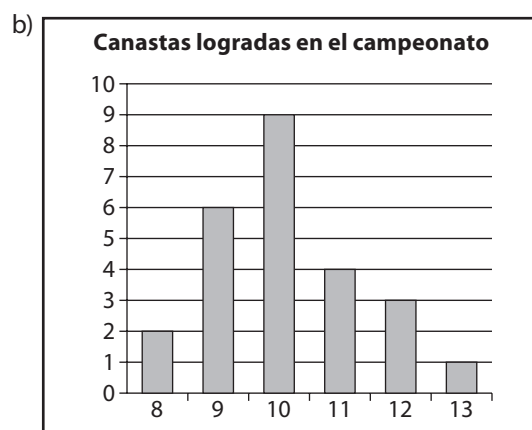
5 Las canastas logradas en 25 partidos en un campeonato de baloncesto fueron:

8 10 12 12 10 10 11 11 10 13
9 11 10 9 9 11 12 9 10 9 10 8 10 9 10

a) Resume los datos anteriores en una tabla de frecuencias del número de puntos por partido (absolutas, relativas y porcentuales).

b) Realiza un diagrama de barras.

Canastas	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Porcentuales
8	2	0,08	8%
9	6	0,24	24%
10	9	0,36	36%
11	4	0,16	16%
12	3	0,12	12%
13	1	0,04	4%
N =	25	1	100%



A cluster of squares in various shades of gray, ranging from light to dark, arranged in a non-uniform pattern in the top left corner.

SOLUCIONARIO

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

A cluster of squares in various shades of gray, ranging from light to dark, arranged in a non-uniform pattern in the bottom right corner.

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

1 Ordena estos números naturales de menor a mayor y represéntalos en la recta numérica: 7, 2, 15, 0, 9, 6, 12.

$$0 < 2 < 6 < 7 < 9 < 12 < 15$$

2 Describe tres situaciones en las que se necesite utilizar números naturales. Por ejemplo, en un envase de pastillas se indica el número de píldoras que contiene.

La edad en años de una persona. El número de días que hay en un mes. El número de hijos de una persona.

3 Describe tres situaciones en las que se utilicen números que no sean números naturales.

El importe de la compra en euros. El área de una habitación en m². La capacidad de diversos recipientes en L.

4 En una granja deben empaquetar 5 130 huevos en cajas de una docena. ¿Cuántas cajas obtendrán? ¿Queda algún huevo sin empaquetar?

427 cajas. Sobran 6 huevos.

1.1 POTENCIAS DE NÚMEROS NATURALES. OPERACIONES

ACTIVIDADES

1 Calcula las siguientes potencias:

- | | | |
|----------|--------------|-----------|
| a) 3^5 | b) 10^6 | c) 10^0 |
| d) 9^2 | e) 5^0 | f) 10^4 |
| g) 7^1 | h) 2^6 | i) 6^3 |
| a) 243 | b) 1 000 000 | c) 1 |
| d) 81 | e) 1 | f) 10 000 |
| g) 7 | h) 64 | i) 216 |

2 Escribe como una única potencia de 2 y después calcula el resultado:

- | | | |
|------------------------------|------------------|--------------------|
| a) $2^2 \cdot 2^3$ | b) $2 \cdot 2^5$ | c) $2^4 \cdot 2^3$ |
| d) $2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^3$ | e) $2^6 : 2^2$ | f) $2^4 : 2^3$ |
| g) $2^7 : 2^6$ | h) $2^3 : 2^3$ | i) $2^9 : 2^4$ |
| a) $2^5 = 32$ | b) $2^6 = 64$ | c) $2^7 = 128$ |
| d) $2^{13} = 8 192$ | e) $2^4 = 16$ | f) $2^1 = 2$ |
| g) $2^1 = 2$ | h) $2^0 = 1$ | i) $2^5 = 32$ |

3 Escribe como una sola potencia y luego calcula el resultado:

- | | | |
|-----------------|--------------------|--------------------|
| a) $(3^3)^2$ | b) $(2^2)^2$ | c) $(3^2)^2$ |
| d) $(5^4)^2$ | e) $2^2 \cdot 3^2$ | f) $2^4 \cdot 5^4$ |
| g) $25^3 : 5^3$ | h) $4^3 \cdot 5^3$ | i) $12^2 : 3^2$ |

- | | | |
|--------------------|-------------------|--------------------|
| a) $3^6 = 729$ | b) $2^4 = 16$ | c) $3^4 = 81$ |
| d) $5^8 = 390 625$ | e) $6^2 = 36$ | f) $10^4 = 10 000$ |
| g) $5^3 = 125$ | h) $20^3 = 8 000$ | i) $4^2 = 16$ |

4 Calcula el número desconocido x en cada caso:

- | | | |
|--------------------------|------------------------------------|------------------------------|
| a) $(5^x)^2 = 625$ | b) $(7 \cdot 8)^6 = 7^x \cdot 8^6$ | c) $6^x \cdot 2^x = 12^5$ |
| d) $2^x \cdot 2^5 = 2^8$ | e) $3^6 : 3^x = 3$ | f) $(12 : 3)^x = 12^2 : 3^2$ |
| a) $x = 2$ | b) $x = 6$ | c) $x = 5$ |
| d) $x = 3$ | e) $x = 5$ | f) $x = 2$ |

5 La distancia aproximada de la Tierra a la Luna es de 380 000 km. Si una nave espacial hace un viaje de ida y vuelta, ¿qué distancia recorre? Escribe la respuesta en notación científica.

$$7,6 \cdot 10^5 \text{ km}$$

1.2 RAÍCES CUADRADAS. OPERACIONES COMBINADAS

ACTIVIDADES

1 Calcula las siguientes raíces cuadradas:

- | | | |
|-----------------|-----------------|--------------------|
| a) $\sqrt{36}$ | b) $\sqrt{81}$ | c) $\sqrt{10 000}$ |
| d) $\sqrt{121}$ | e) $\sqrt{100}$ | f) $\sqrt{144}$ |
| a) 6 | b) 9 | c) 100 |
| d) 11 | e) 10 | f) 12 |

2 Sabemos que $\sqrt{a} = 13$; ¿cuál es el valor de a?

$$a = 169$$

3 El área de un jardín de forma cuadrada vale 324 m². Calcula la medida del lado y la del perímetro.

$$\text{Lado} = 18 \text{ m. Perímetro} = 72 \text{ m}$$

4 Aplica las propiedades de las raíces para realizar estas operaciones:

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ | b) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{36}$ |
| c) $\sqrt{20} : \sqrt{5}$ | d) $\sqrt{81} : \sqrt{9}$ |
| a) $\sqrt{16} = 4$ | b) $\sqrt{900} = 30$ |
| c) $\sqrt{4} = 2$ | d) $\sqrt{9} = 3$ |

5 Realiza las siguientes operaciones:

- | | | |
|------------------|----------------------------|--------------------------|
| a) $3^2 \cdot 5$ | b) $2^3 + 7$ | c) $5^2 - 3^2$ |
| d) $2^3 + 3^2$ | e) $\sqrt{16} + \sqrt{25}$ | f) $15 - 2^2 + \sqrt{9}$ |
| a) 45 | b) 15 | c) 16 |
| d) 17 | e) 9 | f) 14 |

6 Al elevar cierto número al cuadrado hemos obtenido 441. ¿De qué número se trata?

$$\sqrt{441} = 21$$

1.3 MÚLTIPLOS Y DIVISORES. NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

COMPLETA

En los siguientes números sustituye la cifra desconocida x por la que tú quieras para que el enunciado sea cierto. Ten en cuenta que puede haber más de una cifra adecuada.

- $32x$ es múltiplo de 2.
- $56x$ es múltiplo de 3.
- $79x$ es múltiplo de 5.
- $x172$ es múltiplo de 9.
- $1x6$ es múltiplo de 11.
- $1x$ es divisor de 32.
- $5x$ es divisor de 100.

320; 561; 790; 8172; 176; 16; 50.

ACTIVIDADES

1 Completa las siguientes frases poniendo la palabra *múltiplo* o *divisor*, según convenga, y explicando la razón:

- a) 14 es de 7 porque
- b) 5 es de 20 porque
- c) 12 es de 36 porque
- d) 100 es de 10 porque
- e) 8 es de 24 porque
- f) 26 es de 13 porque

Teoría.

2 Entre los siguientes números naturales marca con color azul los que sean múltiplos de 9 y con color rojo los que sean múltiplos de 3. ¿Qué observas?

27, 93, 16, 90, 24, 108, 33, 45, 61, 63

Múltiplos de 9: 27; 90; 108; 45; 63.

Múltiplos de 3: 27; 93; 90; 24; 108; 33; 45; 63.

Todos los que son múltiplos de 9 también lo son de 3. Al revés no ocurre.

3 Escribe:

- a) Cinco múltiplos de 11.
 - b) Cinco divisores de 81.
 - c) Todos los divisores de 19.
- a) 11, 22, 33, 44 y 55
 - b) 1, 3, 9, 27 y 81
 - c) 1 y 19.

4 Explica con tus propias palabras qué es un número primo y escribe los 15 primeros números primos. Para ello puedes formar una criba de Eratóstenes del 1 al 50.

Teoría.

5 Calcula todos los divisores del número 28. Después comprueba que si los sumas todos (menos el propio número), el resultado es 28.

Divisores de 28: 1, 2, 4, 7, 14 y 28.

La suma: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

1.4 DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL. MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

ACTIVIDADES

1 Realiza la descomposición en factores primos de los siguientes números:

- | | | | |
|-----------------------|--|------------------------------|-------------------------------------|
| a) 96 | b) 420 | c) 1 089 | d) 1 620 |
| a) $96 = 2^5 \cdot 3$ | b) $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ | c) $1\,089 = 3^2 \cdot 11^2$ | d) $1\,620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$ |

2 Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los números:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| a) 24 y 30 | b) 16 y 36 | c) 12 y 20 |
| a) m.c.d. = 6; m.c.m. = 120 | b) m.c.d. = 4; m.c.m. = 144 | c) m.c.d. = 4; m.c.m. = 60 |

3 Si calculas el m.c.d. de dos números primos, ¿qué resultado obtienes? Pon un ejemplo.

El m.c.d. de dos números primos distintos es 1.

4 Ana, Juan y Paloma son primos y de vez en cuando van a visitar a sus abuelos. Ana va cada 5 días, Juan va cada 10 días y Paloma va cada 15 días. Si los tres coinciden de visita el 25 de diciembre, ¿cuándo volverán a coincidir de nuevo?

m.c.m. (5, 10, 15) = 30.

Volverán a coincidir al cabo de 30 días, el 24 de enero.

5 En un laboratorio utilizan recipientes de 180 cL y de 525 cL para guardar un compuesto químico. Quieren hacer una pipeta cuyo contenido quepa un número exacto de veces tanto en un recipiente como en el otro. ¿Qué capacidad deberá tener la pipeta? ¿Cuál será la mayor posible?

m.c.d. (180, 525) = 15. La capacidad puede ser 15 cL (la mayor) o cualquier divisor de 15: 1, 3 ó 5 cL.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Realiza las siguientes operaciones:

- | | | |
|----------------|----------------------|----------------|
| a) $7^2 + 6^2$ | b) $2^3 + 5 \cdot 3$ | c) $100 - 8^2$ |
| d) $2^6 : 2^2$ | e) $(3^3)^2$ | f) $(3^2)^3$ |
| a) 85 | b) 23 | c) 36 |
| d) 16 | e) 729 | f) 729 |

2 Escribe en notación científica los siguientes números:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) 150 000 | b) 77 000 | c) 8 600 |
| d) 24 000 | e) 120 000 | f) 86 000 |
| a) $1,5 \cdot 10^5$ | b) $7,7 \cdot 10^4$ | c) $8,6 \cdot 10^3$ |
| d) $2,4 \cdot 10^4$ | e) $1,2 \cdot 10^5$ | f) $8,6 \cdot 10^4$ |

3 Realiza las siguientes operaciones aplicando las propiedades de las raíces cuadradas:

- | | | |
|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $\sqrt{100} \cdot \sqrt{49}$ | b) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$ | c) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{16}$ |
| d) $\sqrt{144} : \sqrt{36}$ | e) $\sqrt{32} : \sqrt{2}$ | f) $\sqrt{64} : \sqrt{16}$ |
| a) $\sqrt{4900} = 70$ | b) $\sqrt{64} = 8$ | c) 32 |
| d) 2 | e) 4 | f) 2 |

4 Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

- | | | |
|------------------------------|----------------|----------------|
| a) 12, 15 y 10 | b) 36, 60 y 24 | c) 28, 49 y 16 |
| a) m.c.d. = 1; m.c.m. = 60 | | |
| b) m.c.d. = 12; m.c.m. = 360 | | |
| c) m.c.d. = 1; m.c.m. = 784 | | |

5 Julián ha contado todos sus libros y se ha dado cuenta de que, si quisiera, podría colocarlos en montones de 20, de manera exacta, y también en montones de 15. Calcula el número de libros que tiene, sabiendo que no llegan a 100.

m.c.m. (20, 15) = 60. Tiene 60 libros, ya que cualquier otro múltiplo es mayor que 100.

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

1 Realiza estas operaciones:

- | | | |
|-------------------------------|---|-------|
| a) $2 \cdot 3 + 1$ | b) $8 \cdot (12 - 9)$ | |
| c) $12 : 2 + 5 \cdot 6$ | d) $6 \cdot (14 - 5) - 24$ | |
| e) $12 \cdot 5 : 2$ | f) $30 - 6 \cdot 2$ | |
| g) $14 + (8 - 6) - (7 + 5)$ | h) $(30 - 6) \cdot 2$ | |
| i) $31 - 2 \cdot (9 - 4) - 8$ | j) $2 \cdot (14 - 9) - (8 - 3) + 3 \cdot 4$ | |
| a) 7 | b) 24 | c) 36 |
| d) 30 | e) 30 | f) 18 |
| g) 4 | h) 48 | i) 13 |
| j) 17 | | |

2 En las siguientes secuencias de números naturales observa qué regla de formación se sigue y escribe los tres siguientes números:

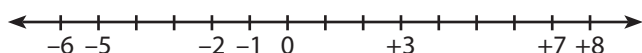
- | | |
|-------------------------------|-------------------------|
| a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... | b) 3, 6, 9, 12, 15, ... |
| c) 10, 20, 30, ... | d) 2, 4, 8, 16, ... |
| e) 2, 4, 6, 8, 10, ... | f) 3, 9, 27, 81, ... |
| g) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... | h) 64, 32, 16, 8, ... |

- a) Números impares: 13, 15, 17
 b) Múltiplos de 3: 18, 21, 24
 c) Múltiplos de 10: 40, 50, 60
 d) Potencias de 2: 32, 64, 128
 e) Números pares: 12, 14, 16
 f) Potencias de 3: 243, 729, 2 187
 g) Cada número es la suma de los dos anteriores: 34, 55, 89
 h) Cada número es la mitad del anterior: 4, 2, 1

2.1 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS. REPRESENTACIÓN Y VALOR ABSOLUTO

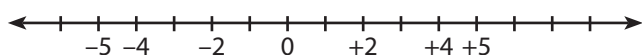
ACTIVIDADES

1 Dibuja una recta numérica y representa en ella con color rojo los siguientes números enteros: -5, +3, +7, 0, -1, -2, +8, -6.



2 Representa en la recta numérica:

- a) El +5 y su opuesto.
 b) El +2 y su opuesto.
 c) El -4 y su opuesto.



3 Escribe los dos números enteros cuyo valor absoluto es 7 y represéntalos en la recta numérica. ¿Cuántas unidades hay entre ellos?

El 7 y -7. Hay 14 unidades entre ellos.

4 Escribe todos los números enteros que están comprendidos entre:

- a) El -6 y el +2.
 b) El -9 y su opuesto.
 c) El -1 y +7.
 d) Los dos enteros cuyo valor absoluto es 10.

Incluimos los propios números.

- a) -6, -5, -4, ..., 0, 1, 2.
 b) -9, -8, -7, ... hasta el 9.
 c) -1, 0, 1, ... hasta el 7.
 d) -10 y 10.

5 Pedro y su padre han dejado el coche en la planta -4 de unos grandes almacenes y van a comprar a la 5.ª planta. Calcula, con la ayuda de la recta numérica, cuántos pisos tienen que subir.

9 pisos.

6 El termómetro exterior de la casa de Elena marcaba a las tres de la madrugada -5 °C, y al mediodía marcaba 13 °C. Calcula, con ayuda de la recta numérica, cuántos grados había subido la temperatura.

Había subido 18 °C.

2.2 SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS. PROPIEDADES

ACTIVIDADES

1 ¿De qué signo es el resultado cuando se suman dos números positivos? ¿Y si se suman dos números negativos? Pon un ejemplo de cada caso.

Positivo; negativo.

2 Ana ha sumado dos números enteros y el resultado ha sido -3. ¿Podemos saber qué números ha sumado? Escribe cuatro sumas que den como resultado -3.

No podemos saber los números que ha sumado:

$$(+5) + (-8) = -3; (-1) + (-2) = -3$$

3 Realiza estas operaciones:

- | | |
|-------------------|--------------------|
| a) $(+12) + (+4)$ | b) $(-12) + (-8)$ |
| c) $(-15) + (+6)$ | d) $(+20) + (-19)$ |
| e) $(+8) + (+21)$ | f) $(-13) + (-12)$ |

2 NÚMEROS ENTEROS

<http://www.McGraw-Hill.es>

- g) $(+6) + (-8) + (+14)$ h) $(-5) + (-2) + (+10)$
 i) $(-5) + (+30) + (-11)$ j) $(-2) + (-4) + (-6)$
 a) 16 b) -20 c) -9 d) 1
 e) 29 f) -25 g) 12 h) 3
 i) 14 j) 12

4 Quita los paréntesis y realiza estas operaciones. Observe las que ya están hechas.

- a) $(+4) - (+6) = 4 - 6 = -2$
 b) $(-60) - (+10) = -60 - 10 = -70$
 c) $(+12) - (-8)$ d) $(-14) - (-9)$
 e) $(+20) - (-10)$ f) $(-40) - (-20)$
 g) $(-3) - (+10)$ h) $(+5) - (-5)$
 i) $(-7) - (-7)$ j) $(+14) - (-2)$
 k) $(+17) - (-5)$ l) $(-17) - (+5)$
 a) -2 b) -70 c) 20 d) -5
 e) 30 f) -20 g) -13 h) 10
 i) 0 j) 16 k) 22 l) -22

5 ¿Qué resultado obtienes cuando sumas un número con su opuesto? Pon tres ejemplos.

Cero: $(-2) + (+2) = 0$; $(-5) + (+5) = 0$

2.3 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

ACTIVIDADES

1 Una señora ha comprado 20 relojes iguales al precio de 80 euros cada uno, y todavía no los ha pagado. Calcula su saldo utilizando números enteros.

Su saldo es de $(-80) \cdot 20 = -1\ 600$ euros.

2 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $(-2) \cdot (+3)$ b) $(+2) \cdot (+3)$ c) $(-3) \cdot (+5)$
 d) $(+5) \cdot (-12)$ e) $(-12) \cdot (+4)$ f) $(-15) \cdot (-6)$
 g) $(-4) \cdot (-9)$ h) $(-8) \cdot (-3)$ i) $(-9) \cdot (+12)$
 a) -6 b) 6 c) -15
 d) -60 e) -48 f) 90
 g) 36 h) 24 i) -108

3 Realiza las siguientes divisiones:

- a) $(+24) : (-4)$ b) $(-20) : (+10)$ c) $(+200) : (-20)$
 d) $(-100) : (-2)$ e) $(-7) : (-1)$ f) $(+15) : (+3)$
 g) $(-21) : (+3)$ h) $(+50) : (+5)$ i) $(-27) : (+3)$
 a) -6 b) -2 c) -10
 d) 50 e) 7 f) 5
 g) -7 h) 10 i) -9

4 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $(-2) \cdot (-4) \cdot (-9)$ b) $(-2) \cdot (+3) \cdot (-8)$
 c) $(-12) \cdot (+3) \cdot 10$ d) $(-2) \cdot (+3) \cdot (-7)$
 e) $7 \cdot (+3) \cdot (-3)$ f) $(-2) \cdot (+3) \cdot (-24)$
 a) -72 b) 48
 c) -360 d) 42
 e) -63 f) 144

5 Un padre debe 3 600 euros y encomienda el pago a sus cuatro hijos por igual. Calcula el saldo de cada hijo utilizando números enteros.

El saldo de cada hijo es $(-3\ 600) : 4 = -900$ euros.

6 Un chico ha multiplicado cierto número por (-23) y le ha salido como resultado $(+483)$. Calcula el número.

El número es -21.

2.4 POTENCIAS DE NÚMEROS ENTEROS. PROPIEDADES

INVESTIGA

Busca el exponente en estas potencias:

- $(-3)^{\square} = +81$ $(+2)^{\square} = 128$
 $(-5)^{\square} = -125$ $(-4)^{\square} = -64$

Los exponentes son 4; 7; 3 y 3.

Busca la base en estas potencias:

- $\square^3 = -8$ $\square^2 = 400$
 $\square^5 = -32$ $\square^3 = -1$

Las bases son -2; 20 o -20; -2 y -1.

ACTIVIDADES

1 Calcula las siguientes potencias:

- a) $(-3)^2$ b) $(-5)^3$ c) $(-2)^5$
 d) $(+6)^2$ e) $(-1)^4$ f) $(+3)^3$
 a) 9 b) -125 c) -32
 d) 36 e) 1 f) 27

2 Realiza las siguientes operaciones. Recuerda que la primera operación que se efectúa es la potencia.

- a) $(-2)^2 + 5$ b) $(-3)^2 + 12$ c) $(-1)^6 + 9$
 d) $(-2)^3 + 6$ e) $(-1)^3 + 4$ f) $(-1)^8 + 6$
 a) 9 b) 21 c) 10
 d) -2 e) 3 f) 7

3 Calcula a qué número hemos elevado (-2) si el resultado ha sido:

- a) 16 b) 64 c) -32 d) -2
a) 4 b) 6 c) 5 d) 1

4 Expresa como una sola potencia y después calcula el resultado en los siguientes ejercicios. Antes de hacerlo, consulta en el libro de texto las propiedades de las potencias.

- a) $2^3 \cdot 2^2$ b) $(-2)^3 \cdot (-2)^2$ c) $(-3)^2 \cdot (-3)^1$
d) $(-4)^2 \cdot (-4)^2 \cdot (-4)^3$ e) $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^1$ f) $3^2 \cdot 3^3$
a) $2^5 = 32$ b) $(-2)^5 = -32$ c) $(-3)^3 = -27$
d) $(-4)^7 = -16\,384$ e) $2^6 = 64$ f) $3^5 = 243$

5 El abuelo materno de Enrique tuvo 5 descendientes, entre hijos e hijas, y cada uno de éstos tuvo otros cinco. ¿Cuántos nietos tiene en total este abuelo? ¿Cuántos primos tiene Enrique por su parte materna?

Tiene $5^2 = 25$ nietos. Tiene 20 primos maternos.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Realiza las siguientes operaciones:

- a) Suma (-3) con el opuesto de $(+5)$.
b) Calcula el cuadrado de (-12) .
c) Eleva (-2) a la quinta.
d) Réstale a 10 el opuesto de 15.

- a) $(-3) + (-5) = -8$ b) $(-12)^2 = 144$
c) $(-2)^5 = -32$ d) $10 - (-15) = 25$

2 Busca la ley de formación en estas secuencias de números enteros y escribe en cada una los siete números siguientes:

- a) 16, 12, 8, 4, ...
b) 20, 17, 14, 11, 8, 5, ...
c) 17, 12, 7, 2, ...
a) Restar 4: 0, -4, -8, -12, -16, -20, -24
b) Restar 3: 2, -1, -4, -7, -10, -13, -16
c) Restar 5: -3, -8, -13, -18, -23, -28, -33

3 Realiza estas operaciones:

- a) $5 \cdot (7 - 3)$ b) $(6 - 3) \cdot (9 - 15)$ c) $(15 - 7) : 4$
d) $8 \cdot (9 - 12)$ e) $(4 - 5) \cdot (1 - 7)$ f) $(25 - 7) : (-2)$
a) 20 b) -18 c) 2
d) -24 e) 6 f) -9

4 Completa los huecos para que estas igualdades sean correctas:

- a) $(-12) : \square = 2$ b) $(-2) \cdot (-3) \cdot \square = -6$
c) $\square - 5 = -12$ d) $(\square)^3 = -27$
e) $(\square)^3 = 8$ f) $\square - 5 = 12$
a) -6 b) -1 c) -7
d) -3 e) 2 f) 17

5 Busca los dos números enteros que al elevarlos al cuadrado dan:

- a) 16 b) 36 c) 100 d) 900
a) 4 y -4 b) 6 y -6 c) 10 y -10 d) 30 y -30

6 Los saldos de cuatro hermanos son -120, -32, 180 y 3 euros respectivamente y deciden hacer un fondo común. ¿Cuál es el saldo resultante?

31 euros.

7 Un filósofo de la antigüedad vivió entre los años 12 a. C. y 43 d. C. ¿A qué edad murió?

A los $43 - (-12) = 55$ años.

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

1 ¿Qué nombre recibe cada uno de los dos términos que componen una fracción? Pon un ejemplo.

Numerador y denominador.

2 Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes:

a) $\frac{4}{6}$

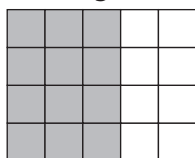
b) $\frac{7}{4}$

c) $\frac{5}{9}$

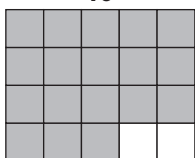
Multiplicar (o dividir) el numerador y el denominador por un mismo número.

3 En las siguientes figuras, colorea la parte de la figura que representa a la fracción indicada:

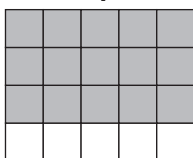
$\frac{3}{5}$



$\frac{9}{10}$



$\frac{3}{4}$



3.1 LOS NÚMEROS RACIONALES. REPRESENTACIÓN

ACTIVIDADES

1 Escribe con tus propias palabras qué es una fracción irreducible. Busca una fracción que se pueda simplificar y conviértela en irreducible.

Teoría.

2 Calcula:

a) Los $\frac{5}{6}$ de 1 200 euros.

b) Los $\frac{9}{13}$ de 1 300 L.

a) 1 000 euros

b) 900 L

3 Simplifica las siguientes fracciones hasta convertirlas en irreducibles:

a) $\frac{40}{120}$

b) $\frac{50}{75}$

c) $\frac{54}{81}$

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

4 En los siguientes pares de números racionales, explica cuál es el menor y cuál el mayor:

a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$

b) $\frac{7}{9}$ y $\frac{5}{4}$

c) $\frac{4}{6}$ y $\frac{1}{3}$

a) $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$; b) $\frac{7}{9} < \frac{5}{4}$. La primera fracción es menor que 1 y la

segunda es mayor que 1; c) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$

5 Representa en la recta numérica los números:

$\frac{4}{5}, \frac{-3}{2}$ y $\frac{10}{3}$

Teoría.

6 En un bloque de 56 viviendas, los $\frac{2}{7}$ del total están deshabitadas. ¿Cuántas viviendas están habitadas? ¿Qué fracción del total constituyen las viviendas habitadas?

Están habitadas $56 - 16 = 40$ viviendas, y son $\frac{5}{7}$ del total.

3.2 SUMA Y RESTA DE NÚMEROS RACIONALES

ACTIVIDADES

1 Realiza las siguientes operaciones. Ten en cuenta que el resultado puede ser negativo.

a) $\frac{5}{8} + \frac{1}{8}$

b) $\frac{16}{9} - \frac{5}{9}$

c) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{7}{4}$

d) $\frac{7}{5} - \frac{12}{5} + \frac{6}{5}$

a) $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{11}{9}$

c) $-\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{5}$

2 Realiza las siguientes operaciones, simplificando el resultado:

a) $\frac{3}{5} + \frac{5}{6}$

b) $\frac{3}{14} + \frac{7}{10}$

c) $\frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{11}{6}$

d) $\frac{2}{5} - \frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{4} + \frac{5}{2} - \frac{7}{6}$

f) $\frac{2}{5} - \frac{8}{15} + \frac{4}{3}$

a) $\frac{43}{30}$

b) $\frac{32}{35}$

c) $\frac{17}{3}$

d) $\frac{3}{20}$

e) $\frac{25}{12}$

f) $\frac{6}{5}$

3 Ismael y María comparten una caja de bombones. Ismael se ha comido $\frac{1}{5}$ de los bombones de la caja y María se ha comido los $\frac{2}{7}$. ¿Qué fracción del total se han co-

mido entre los dos? Si la caja tenía 70 bombones, ¿cuántos ha comido cada uno y cuántos quedan?

Se han comido los $\frac{17}{35}$ de la caja. Ismael ha comido 14 bombones. María ha comido 20 bombones. Quedan 36 bombones.

4 Realiza cada una de estas operaciones de dos formas: a) calculando en primer lugar el interior del paréntesis; b) quitando paréntesis en primer lugar. Ten en cuenta que debes obtener el mismo resultado.

a) $\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{5} - 2\right)$ b) $\left(\frac{4}{9} + \frac{7}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right)$
a) $\frac{37}{15}$ b) $\frac{44}{45}$

5 Suma el número $\frac{5}{4}$ con su opuesto y el número $-\frac{7}{5}$ con su opuesto. ¿Obtienes el mismo resultado? Explica la razón.

Cero: al sumar un número con su opuesto siempre da cero.

3.3 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

ACTIVIDADES

1 Realiza las siguientes operaciones, simplificando el resultado:

a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{21} \cdot 3$ c) $\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{7}{4}$
d) $\frac{11}{6} \cdot \frac{7}{5} : \frac{3}{2}$ e) $\frac{6}{7} : \frac{2}{3}$ f) $\frac{6}{7} : \frac{3}{4}$
a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{35}{4}$
d) $\frac{77}{45}$ e) $\frac{9}{7}$ f) $\frac{8}{7}$

2 Multiplica la fracción $\frac{2}{5}$ por su inversa y la fracción $-\frac{17}{6}$ por su inversa. ¿Obtienes el mismo resultado? Explica la razón.

Al multiplicar una fracción por su inversa siempre sale 1.

3 Realiza cada una de las siguientes operaciones de dos maneras: a) calculando en primer lugar las operaciones del interior de los paréntesis; b) aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación. Observa que debes obtener el mismo resultado.

a) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + 6\right)$ b) $6 \cdot \left(3 - \frac{1}{2}\right)$
c) $\frac{4}{2} - 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)$ d) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{2}\right)$
a) $\frac{13}{5}$ b) 15 c) $-\frac{28}{15}$ d) $\frac{9}{5}$

4 En una familia consumen $\frac{3}{4}$ de litro de leche diariamente. ¿Cuántos L consumen en 20 días? ¿Y en 8 semanas?

En 20 días consumen 15 L y en 8 semanas consumen 42 L.

3.4 POTENCIAS Y RAÍCES CUADRADAS DE NÚMEROS RACIONALES

ACTIVIDADES

1 Calcula las siguientes potencias, escribiéndolas previamente como un producto. Observa la que ya está hecha.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$ b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$
e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$
a) $\frac{27}{125}$ b) $\frac{4}{25}$ c) $\frac{1}{16}$
d) $-\frac{1}{8}$ e) $\frac{4}{9}$ f) $\frac{4}{9}$

2 Cuando un número negativo se eleva a un exponente par, ¿de qué signo es el resultado? Pon dos ejemplos.

El resultado es positivo: $(-2)^4 = 16$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

3 Cuando un número negativo se eleva a un exponente impar, ¿de qué signo es el resultado? Pon dos ejemplos.

El resultado es negativo: $(-2)^3 = -8$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$.

4 Calcula las siguientes potencias y raíces:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ b) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$
d) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$ e) $\sqrt{\frac{16}{9}}$ f) $\sqrt{\frac{100}{121}}$
g) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ h) $\sqrt{\frac{36}{400}}$ i) $\sqrt{\frac{169}{49}}$
a) $\frac{125}{8}$ b) 216 c) $\frac{4}{9}$
d) $\frac{9}{25}$ e) $\frac{4}{3}$ f) $\frac{10}{11}$
g) $\frac{1}{3}$ h) $\frac{3}{20}$ i) $\frac{13}{7}$

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Ordena de menor a mayor los siguientes números racionales:

$$\frac{7}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{12}{7}, \frac{1}{2} \text{ y } 2$$

Para ello puedes reducirlos a común denominador, utilizando el m.c.m. de los denominadores.

$$-\frac{12}{7} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{5}{6} < 2 < \frac{7}{3}$$

2 En el mes de septiembre, un empleado trabajó los $\frac{5}{6}$ de los días del mes, y cobró 50 euros por cada día de trabajo. ¿Cuántos días trabajó? ¿Cuánto dinero cobró?

Trabajó 25 días y cobró 1 250 euros.

3 En una cuadrícula de 64 cuadrados iguales, calcula cuántos cuadrados quedarán coloreados si se rellenan de color:

a) Los $\frac{5}{8}$ de la cuadrícula.

b) Los $\frac{3}{4}$ de la cuadrícula.

c) Los $\frac{15}{16}$ de la cuadrícula.

a) 40 cuadros b) 48 cuadros c) 60 cuadros

4 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3 - \frac{2}{5}\right)$ b) $\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{3}\right) : \frac{4}{3}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ f) $\left(-\frac{4}{3}\right)^2$

g) $\sqrt{\frac{49}{144}}$ h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

i) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

a) $\frac{143}{50}$ b) $-\frac{1}{12}$ c) $\frac{9}{25}$ d) $-\frac{32}{243}$

e) $-\frac{1}{8}$ f) $\frac{16}{9}$ g) $\frac{7}{12}$ h) $\frac{9}{4}$

i) $\frac{8}{27}$

5 Tres hermanos quieren reunir cierta cantidad de dinero para comprar una impresora. Uno de ellos consigue la tercera parte del dinero; otro, la quinta parte, y el tercero consigue los $\frac{7}{15}$ del dinero. ¿Cuánto les falta por reunir? Si la impresora cuesta 150 euros, ¿cuánto ha conseguido cada uno?

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{7}{15} = 1.$$

Ya lo tienen todo. Han conseguido 50, 30 y 70 euros respectivamente.

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

1 Realiza estas operaciones:

- | | | | |
|--------------------------|---------------------|------------|-----------|
| a) $4,37 \cdot 100$ | b) $4,37 : 100$ | | |
| c) $0,025 \cdot 1\,000$ | d) $0,35 : 100$ | | |
| e) $1,75 \cdot 10$ | f) $106,7 : 1\,000$ | | |
| g) $9,708 \cdot 10\,000$ | h) $46 : 10$ | | |
| i) $14,73 \cdot 10$ | j) $507,1 : 100$ | | |
| a) 437 | b) 0,0437 | c) 25 | d) 0,0035 |
| e) 17,5 | f) 0,1067 | g) 97\,080 | h) 4,6 |
| i) 147,3 | j) 5,071 | | |

2 Completa estas igualdades para que las operaciones sean correctas:

- | | | | |
|-------------------------------|------------------------------|-------|--------|
| a) $7,25 \cdot \square = 725$ | b) $0,6 \cdot \square = 600$ | | |
| c) $14,5 : \square = 1,45$ | d) $79 : \square = 0,79$ | | |
| a) 100 | b) 1\,000 | c) 10 | d) 100 |

4.1 FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN NÚMERO DECIMAL

ACTIVIDADES

1 Convierte estas fracciones en número decimal. Recuerda que para ello debes dividir el numerador entre el denominador hasta que salga un número decimal exacto o periódico.

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| a) $\frac{12}{5}$ | b) $\frac{16}{3}$ | c) $\frac{17}{6}$ |
| a) 2,4 | b) $5,\bar{3}$ | c) $2,8\bar{3}$ |

2 Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales exactos:

- | | | | |
|-------------------|---------------------|-------------------|----------------------|
| a) 7,2 | b) 14,7 | | |
| c) 16,25 | d) 0,715 | | |
| a) $\frac{36}{5}$ | b) $\frac{147}{10}$ | c) $\frac{65}{4}$ | d) $\frac{143}{200}$ |

3 Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos puros. Consulta en el libro de texto la forma de hacerlo.

- | | | | |
|-------------------|---------------------|---------------------|-------------------|
| a) 8,333... | b) $6,\bar{03}$ | | |
| c) $9,\bar{15}$ | d) 0,020202... | | |
| a) $\frac{25}{3}$ | b) $\frac{199}{33}$ | c) $\frac{302}{33}$ | d) $\frac{2}{99}$ |

4 Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos. Consulta en el libro de texto la forma de hacerlo.

- | | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| a) 3,2555... | b) $0,3\bar{25}$ | | |
| c) $0,1\bar{26}$ | d) 2,4888... | | |
| a) $\frac{293}{90}$ | b) $\frac{161}{495}$ | c) $\frac{25}{198}$ | d) $\frac{112}{45}$ |

5 Juan, Elisa y Marta son hermanos y han heredado un capital de 35 000 €. Juan recibe los $\frac{3}{5}$ del total y Elisa recibe $\frac{2}{7}$ del total. Calcula cuánto recibe cada uno.

Juan recibe 21 000 euros; Elisa recibe 10 000 euros y Marta 4 000 euros.

4.2 OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

ACTIVIDADES

1 Realiza estas operaciones con números decimales:

- | | | | |
|---------------------------|----------|-----------|----------|
| a) $1,23 + 36,5 + 12,348$ | | | |
| b) $29,56 - 13,8$ | | | |
| c) $32,6 - 12,807$ | | | |
| d) $0,654 + 13,8 - 5,06$ | | | |
| a) 50,078 | b) 15,76 | c) 19,793 | d) 9,394 |

2 Una jarra tiene una capacidad de 1,5 L y hemos echado en ella $\frac{3}{4}$ de litro de leche. Calcula, en litros, cuánta leche cabe todavía.

Caben 0,75 L.

3 Realiza las siguientes operaciones con números decimales:

- | | | | |
|----------------------|---------------------|---------|----------------|
| a) $14,29 \cdot 1,6$ | b) $0,408 \cdot 72$ | | |
| c) $12,67 : 1,4$ | d) $32 : 3,6$ | | |
| a) 22,864 | b) 29,376 | c) 9,05 | d) $8,\bar{8}$ |

4 Un chico ha comprado para su motocicleta 12 L de gasolina a 0,97 € / L. ¿Cuánto pagó?

11,64 euros.

5 Cinco amigos compran golosinas por un valor total de 6,25 € y deciden pagarlas a partes iguales. Calcula cuánto dinero debe poner cada uno.

1,25 euros.

4.3 POTENCIAS Y RAÍCES. OPERACIONES COMBINADAS

ACTIVIDADES

■ **1** Calcula las siguientes potencias:

- | | |
|-------------|------------|
| a) $1,25^2$ | b) $2,1^3$ |
| c) $0,15^2$ | d) $5,2^3$ |
| a) 1,5625 | b) 9,261 |
| c) 0,0225 | d) 140,608 |

■ **2** Calcula estas potencias convirtiendo previamente el número decimal en fracción. Expresa el resultado como número decimal.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $(0,6666\dots)^2$ | b) $1,5^{-2}$ |
| a) $\frac{4}{9} = 0,4$ | b) $\frac{4}{9} = 0,4$ |

■ **3** Calcula el área de una habitación cuadrada cuyo lado mide 3,2 m.

10,24 m²

■ **4** El área de una habitación cuadrada vale 6,25 m². ¿Cuánto mide el lado?

2,5 metros.

■ **5** Una señora compra 14 madejas de lana a 2,25 € cada una, y 8 pares de calcetines a 3,15 € cada par. Si paga con un billete de 100 €, ¿cuánto deben devolverle?

Deben devolverle 43,3 euros.

■ **6** Una lámina cuadrada de 4,5 dm de lado se corta en 9 cuadrados iguales. Calcula el área de cada trozo expresada en cm². Haz un dibujo.

225 cm²

4.4 APROXIMACIÓN Y REDONDEO

INVESTIGA

Al medir el lado de un cuadrado de 10 cm de lado un niño cometió un error y midió 9,7 cm; después, con esta medida, calculó el área. Calcula:

- El error cometido en la medida del lado.
- El error cometido en la medida del área.

El error en el lado es 0,3 cm.

El error en el área es $100 - 9,7^2 = 5,91$ cm².

ACTIVIDADES

■ **1** Redondea hasta las centésimas los siguientes números decimales:

- | | | |
|-----------|---------------|---------------|
| a) 7,2359 | b) 0,76111... | c) 4,01777... |
| a) 7,24 | b) 0,76 | c) 4,02 |

■ **2** Redondea hasta las décimas:

- | | | |
|----------|-----------|----------|
| a) 4,291 | b) 15,726 | c) 0,758 |
| a) 4,3 | b) 15,7 | c) 0,8 |

■ **3** Redondea hasta las milésimas:

- | | | |
|------------|-----------|-----------|
| a) 12,3146 | b) 0,0078 | c) 1,7081 |
| a) 12,315 | b) 0,008 | c) 1,708 |

■ **4** Realiza estas operaciones redondeando el resultado hasta las centésimas:

- | | | |
|----------------|----------------------|-------------|
| a) $29 : 7$ | b) $3,12 \cdot 4,28$ | c) $4,2^3$ |
| d) $142,6 : 3$ | e) $0,16 \cdot 1,29$ | f) $1,25^2$ |
| a) 4,14 | b) 13,35 | c) 74,09 |
| d) 47,53 | e) 0,21 | f) 1,56 |

■ **5** Los tiempos de un corredor en sus entrenamientos han sido 79,25 s, 78,13 s, 85,83 s y 80,02 s. Calcula la media aritmética redondeando a las centésimas.

80,81 s

■ **6** Francisco ha medido una varilla de metal, obteniendo 4,56 cm; pero ha cometido un error, midiendo 5 mm de menos. Calcula la verdadera longitud de la varilla.

50,6 mm = 5,06 cm

ACTIVIDADES DE REFUERZO

■ **1** Un terreno tiene forma triangular, de base 132,7 m y altura 63,5 m. Calcula el área expresada en m², redondeando a las centésimas. Recuerda que el área del triángulo es la mitad de la base por la altura.

Área = 4 213,23 m²

■ **2** Realiza estas operaciones, expresando el resultado en forma de número decimal. Para hacer el cálculo convierte previamente los números decimales en fracción.

- | | |
|------------------------|--------------|
| a) $0,3 + \frac{2}{3}$ | b) $5 - 2,7$ |
| a) 1 | b) $2,2$ |

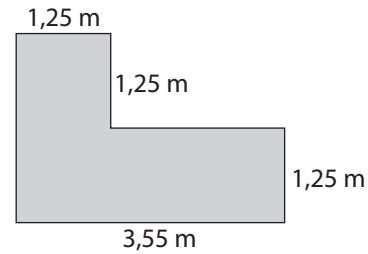
3 Ana ha comprado tres chokolatinas a 0,75 € cada una y dos libros, de 4,25 € y 6,75 € respectivamente. Su amiga ha gastado 5,25 € en ir al cine y 3,65 € en golosinas. Calcula cuál de las dos amigas ha gastado más y cuánto más ha gastado una que otra.

Ana ha gastado 13,25 euros y su amiga 8,9 euros. Ana ha gastado 4,35 euros más que su amiga.

4 María se ha comprado un coche de segunda mano por 6 200 €. Sus padres le han dado la quinta parte del precio del coche y ella tiene 2 100 €. El resto piensa pagarlo en 3 plazos iguales. ¿Cuánto debe pagar en cada plazo?

Debe pagar 1 113,3 euros en cada plazo.

5 Una habitación tiene forma de L con las medidas indicadas en el dibujo. Calcula su área en m².



El área es 6 m².

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

1 Aplica la propiedad distributiva para quitar paréntesis en estas expresiones:

- a) $4(2a + 6)$ b) $(-5)(x - 8)$
 c) $12(x - 9)$ d) $5(x - 2) + 4(x - 3)$
 e) $6(3x - 1)$ f) $2(3 - x) - 5(1 - 2x)$
 g) $8a + 24$ h) $-5x + 40$ i) $12x - 108$
 j) $9x - 22$ k) $18x - 6$ l) $1 + 8x$

2 Expresa como una sola potencia el resultado de estas operaciones:

- a) $4^2 \cdot 4^4$ b) $x^4 : x^3$ c) $x^3 \cdot x^2 \cdot x$
 d) $x^7 : x^7$ e) $\frac{x^4 \cdot x^5}{x^2}$ f) $x^3 \cdot x^6 : x^4$
 g) 4^6 h) x i) x^6
 j) $x^0 = 1$ k) x^7 l) x^5

5.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS. VALOR NUMÉRICO

ACTIVIDADES

1 En una frutería, un kilo de manzanas cuesta x euros y un kilo de peras cuesta y euros. Expresa algebraicamente cuánto debemos pagar por:

- a) 10 kg de manzanas
 b) 4 kg de peras
 c) 6 kg de manzanas y 1 de peras
 d) 4 kg de cada fruta
 e) 1 kg de manzanas y 12 de peras
 f) 1 kg de cada fruta

- a) $10x$ b) $4y$ c) $6x + y$
 d) $4x + 4y$ e) $x + 12y$ f) $x + y$

2 Como no sabemos el valor del lado de un cuadrado lo denotamos por x metros. Expresa algebraicamente:

- a) El área del cuadrado.
 b) El perímetro.

Si el valor de x fuese 10 m, ¿qué valor tendría el área? ¿y el perímetro?

- a) x^2 b) $4x$

Si $x = 10$ m, el área es 100 m^2 y el perímetro es 40 m .

3 Calcula el valor numérico de estas expresiones algebraicas para los valores que se indican:

- a) $3x^2 - 5x$ para $x = 2$ b) $3x^2 - 5x$ para $x = 1$
 c) $7xy - x^2y$ para $x = 2$ e $y = 3$ d) $\frac{5xz}{x+z}$ para $x = 1$ y $z = 4$

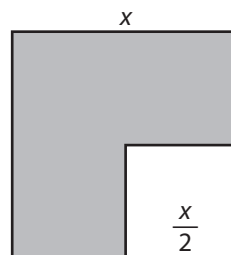
e) $4x + 9$ para $x = -3$

- a) 2
 d) 4

f) $\frac{3x-y}{x+y}$ para $x = 6$ e $y = 2$

- b) -2
 e) -3
 c) 30
 f) 2

4 Calcula el área de la parte coloreada en este cuadrado de lado x . Halla el valor numérico de dicha área si $x = 12 \text{ cm}$.



Área = $\frac{3}{4}x^2$.

Si $x = 12 \text{ cm}$, el área de la parte coloreada es 108 cm^2 .

5 Las edades de tres amigos son: $x - 2$, x y $x + 5$ años.

- a) ¿Cuántos años le lleva el segundo al primero?
 b) ¿Y el tercero al primero?
 c) ¿Y el tercero al segundo?

- a) 2 años b) 7 años c) 5 años

5.2 MONOMIOS. OPERACIONES CON MONOMIOS

ACTIVIDADES

1 Explica con tus propias palabras qué son monomios semejantes. Pon un ejemplo de dos monomios que sean semejantes y otro de dos monomios que no lo sean.

Teoría.

2 Completa la siguiente tabla con las características de estos monomios:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado	Un monomio semejante a él
$-4x^9$	-4	x^9	9	$6x^9$
$6x^3y^4$	6	x^3y^4	7	$4x^3y^4$
$\frac{2}{3}xz$	$\frac{2}{3}$	xz	2	$9xz$
$7x$	7	x	1	$6x$
5	5	No tiene	0	7

3 ¿Qué condición deben cumplir dos monomios para que se puedan sumar o restar?

Deben ser semejantes.

4 Realiza las siguientes sumas o restas de monomios semejantes:

- | | | |
|--------------------|-------------------------|-----------|
| a) $5x^4 + 6x^4$ | b) $7x^2 - 3x^2 + 9x^2$ | |
| c) $5z - 9z + 14z$ | d) $6x + 9x - 7x$ | |
| e) $6xy + 5xy$ | f) $x^3 - 3x^3 + 4x^3$ | |
| a) $11x^4$ | b) $13x^2$ | c) $10z$ |
| d) $8x$ | e) $11xy$ | f) $2x^3$ |

5 Realiza las siguientes operaciones con monomios:

- | | | |
|------------------------|-----------------------|---------------|
| a) $7x^2 \cdot 5x^4$ | b) $6x \cdot 13x^2$ | |
| c) $5xy \cdot 7x^2y^3$ | d) $(-3x^2) \cdot 9x$ | |
| e) $9x^5 : 3x^2$ | f) $4z^2 \cdot 9xz^2$ | |
| a) $35x^6$ | b) $78x^3$ | c) $35x^3y^4$ |
| d) $-27x^3$ | e) $3x^3$ | f) $36xz^4$ |

5.3 POLINOMIOS. SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

ACTIVIDADES

1 Qué nombre recibe un polinomio que sólo tiene dos monomios? ¿Y uno que sólo tiene tres monomios? Pon un ejemplo de cada caso.

Teoría.

2 Indica el grado de estos polinomios y di si son binomios o trinomios:

- | | |
|------------------------------|-----------------------|
| a) $5x^2 - 9x + 10$ | b) $6x^2y^2 - x^3$ |
| c) $x^4 + x^3 - x^2 - x + 1$ | |
| a) Trinomio de grado 2 | b) Binomio de grado 4 |
| c) Polinomio de grado 4. | |

3 Realiza la suma $P(x) + Q(x)$ y la resta $P(x) - Q(x)$ con los polinomios $P(x) = 4x^2 + 5x + 6$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 9$.

$$P(x) + Q(x) = 5x^2 + 2x + 15; \quad P(x) - Q(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

4 Dados los polinomios:

$A(x) = 3x^3 - 3x^2 + 5$, $B(x) = 6x^2 + 4x + 10$ y $C(x) = x^3 - 7x - 15$, calcula:

- | | |
|--|-------------------------|
| a) $A(x) + B(x)$ | b) $A(x) + B(x) + C(x)$ |
| c) $A(x) - B(x)$ | d) $B(x) - C(x)$ |
| e) $A(x) - C(x)$ | f) $A(x) + C(x)$ |
| a) $A(x) + B(x) = 3x^3 + 3x^2 + 4x + 15$ | |
| b) $A(x) + B(x) + C(x) = 4x^3 + 3x^2 - 3x$ | |
| c) $A(x) - B(x) = 3x^3 - 9x^2 - 4x - 5$ | |

$$d) B(x) - C(x) = -x^3 + 6x^2 + 11x + 25$$

$$e) A(x) - C(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 20$$

$$f) A(x) + C(x) = 4x^3 - 3x^2 - 7x - 10$$

5.4 MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

ACTIVIDADES

1 Realiza las siguientes operaciones:

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $4x^2 \cdot (2x^4 + 6x^2 - 5)$ | b) $2z \cdot (z^2 - 3z + 6)$ |
| c) $(-3x^4) \cdot (x^3 + x - 1)$ | d) $7y^2 \cdot (y^3 - 2y^2 - 3)$ |
| e) $5x^3 \cdot (x^2 - 2x - 4)$ | f) $10xy \cdot (4x^2y + 2xy + 4)$ |
| a) $8x^6 + 24x^4 - 20x^2$ | b) $2z^3 - 6z^2 + 12z$ |
| c) $-3x^7 - 3x^5 + 3x^4$ | d) $7y^5 - 14y^4 - 21y^2$ |
| e) $5x^5 - 10x^4 - 20x^3$ | f) $40x^3y^2 + 20x^2y^2 + 40xy$ |

2 Dados los polinomios:

$A(x) = x^2 - 2x + 3$, $B(x) = x^3 - x^2 + 9$ y $C(x) = x^3 + 3x$, calcula:

- | | | |
|--|----------------------|----------------------|
| a) $A(x) \cdot B(x)$ | b) $A(x) \cdot C(x)$ | c) $B(x) \cdot C(x)$ |
| a) $A(x) \cdot B(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 18x + 27$ | | |
| b) $A(x) \cdot C(x) = x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 9x$ | | |
| c) $B(x) \cdot C(x) = x^6 - x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 27x$ | | |

3 a) Comprueba la identidad notable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ multiplicando $(a + b)$ por sí mismo.

b) Aplícala para desarrollar $(x + 2)^2$.

$$b) x^2 + 4x + 4$$

4 a) Comprueba la identidad notable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ multiplicando $(a - b)$ por sí mismo.

b) Aplícala para desarrollar $(x - 5)^2$.

$$b) x^2 - 10x + 25$$

5 Comprueba la identidad notable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ realizando el producto del primer miembro. Después aplícala para hallar $(x + 3)(x - 3)$.

$$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$$

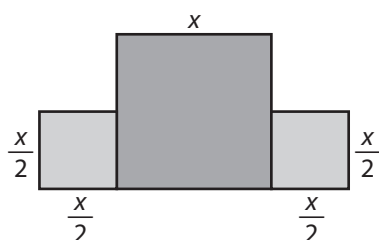
ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Calcula el valor numérico de estas expresiones algebraicas para los valores indicados:

- | |
|--|
| a) $3x^2 - 9x + 1$ para $x = -2$ |
| b) $7x^3 - 9x$ para $x = 2$ |
| c) $11x^2z - xz^2$ para $x = 2, z = 3$ |
| d) $-4xy + x^2$ para $x = -3, y = 3$ |

- | | | | |
|-------|-------|--------|-------|
| a) 31 | b) 38 | c) 114 | d) 45 |
|-------|-------|--------|-------|

2 Calcula el área de esta figura formada por tres cuadrados y exprésala como un solo monomio.



$$\frac{3}{2}x^2$$

3 Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a) $-5x^2 + 6x^2 + x^2$

b) $5x^3 \cdot 7x^2$

c) $16x^3 - 12x^3 + 2x^3$

d) $(-7x^4) \cdot (9x)$

e) $16x^8 : 4x^6$

f) $16x^4 : 8x^2$

a) $2x^2$

b) $35x^5$

c) $6x^3$

d) $-63x^5$

e) $4x^2$

f) $2x^2$

4 Dados los polinomios $A(x) = 9x^2 - 4x + 5$, $B(x) = 6x - 2$ y $C(x) = x^2 + 2x - 15$, calcula:

a) $A(x) + B(x)$

b) $C(x) - B(x)$

c) $A(x) + B(x) + C(x)$

d) $A(x) + B(x) - C(x)$

e) $A(x) \cdot B(x)$

f) $B(x) \cdot C(x)$

a) $A(x) + B(x) = 9x^2 + 2x + 3$

b) $C(x) - B(x) = x^2 - 4x - 13$

c) $A(x) + B(x) + C(x) = 10x^2 + 4x - 12$

d) $A(x) + B(x) - C(x) = 8x^2 + 18$

e) $A(x) \cdot B(x) = 54x^3 - 42x^2 + 38x - 10$

f) $B(x) \cdot C(x) = 6x^3 + 10x^2 - 94x + 30$

5 Desarrolla las siguientes identidades notables:

a) $(x + 3)^2$

b) $(x - 3)^2$

c) $(2x + 3)(2x - 3)$

d) $(x - 12)^2$

e) $(2a + 4)^2$

f) $(x + 4)(x - 4)$

a) $x^2 + 6x + 9$

b) $x^2 - 6x + 9$

c) $4x^2 - 9$

d) $x^2 - 24x + 144$

e) $4a^2 + 16a + 16$

f) $x^2 - 16$

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

1 Realiza estas operaciones aplicando la propiedad distributiva y sumando después los términos que sean semejantes. Recuerda que al quitar un paréntesis que está precedido de un signo menos, debes cambiar los signos que están dentro del paréntesis.

- a) $7 \cdot (5 + 8)$ b) $6 \cdot (x + 12)$
 c) $5 \cdot (x - 6)$ d) $7 \cdot (2x - 8)$
 e) $4 \cdot (2x + 3) + 5 \cdot (4 + x)$ f) $3x + 5 \cdot (4x - 8)$
 g) $9 \cdot (x + 8) - 4 \cdot (x + 6)$ h) $32x - 4 \cdot (6 + 7x)$
 i) $8 \cdot (2x - 1) - 3 \cdot (3x - 5)$ j) $2 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (9 - x)$
 k) $4 \cdot (3x - 8) - 5 \cdot (1 - 2x) + 7 \cdot (x + 10)$
- a) 91 b) $6x + 72$ c) $5x - 30$ d) $14x - 56$
 e) $13x + 32$ f) $23x - 40$ g) $5x + 48$ h) $4x - 24$
 i) $7x + 7$ j) $5x - 29$ k) $29x + 33$

INVESTIGA

Resuelve mentalmente estas ecuaciones:

$\frac{x}{3} = 7$	$\frac{x}{5} = -1$	$\frac{2x}{3} = 4$
$x = 21$	$x = -5$	$x = 6$

6.1 ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

ACTIVIDADES

1 Asocia cada una de estas ecuaciones con su solución:

$3x - 4 = 2x + 4$	$x = 3$
$12 - 4x = x + 2$	$x = 8$
$x - 1 = 4x - 10$	$x = 2$

2 Despeja la incógnita en las siguientes ecuaciones:

- a) $4x = 60$ b) $5x = 85$
 c) $2x = -12$ d) $6x = -72$
- a) $x = 15$ b) $x = 17$ c) $x = -6$ d) $x = -12$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones. Recuerda que debes agrupar en un miembro todos los términos que tengan incógnita y en el otro miembro los términos que no la tengan.

- a) $3x - 5 = x + 7$ b) $6x + 2 = 5x + 4$
 c) $8 + 9x = 5x - 12$ d) $5x - 9 = 6 + 2x$
- a) $x = 6$ b) $x = 2$
 c) $x = -5$ d) $x = 5$

4 Resuelve las siguientes ecuaciones. En primer lugar debes eliminar los paréntesis, aplicando la propiedad distributiva, y después actuar como en el ejercicio anterior.

- a) $4 \cdot (x - 5) = 2x - 6$ b) $3 \cdot (4x + 2) - 5 \cdot (x - 9) = x - 9$
 c) $6 \cdot (2x - 1) + 4 \cdot (x - 3) = 14$
- a) $x = 7$ b) $x = -10$ c) $x = 2$

6.2 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

ACTIVIDADES

1 Resuelve mentalmente estas ecuaciones de segundo grado. Fíjate en la que ya está resuelta y recuerda que cada ecuación tiene dos soluciones.

- a) $x^2 = 25$ $x = 5$ y $x = -5$
 b) $x^2 = 81$ c) $x^2 = 121$ d) $x^2 = 400$
 b) $x = 9$ y -9 c) $x = 11$ y -11 d) $x = 20$ y -20

2 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado incompletas:

- a) $2x^2 - 50 = 0$ b) $x^2 - 49 = 0$
 c) $x^2 - 100 = 0$ d) $x^2 - 50 = 31$
- a) $x = 5$ y -5 b) $x = 7$ y -7
 c) $x = 10$ y -10 d) $x = 9$ y -9

3 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado incompletas. Recuerda que, en primer lugar, debes sacar la x factor común.

- a) $x^2 - 3x = 0$ b) $x^2 - 6x = 0$
 c) $x^2 + 2x = 0$ d) $x^2 + 9x = 0$
- a) $x = 0$ y 3 b) $x = 0$ y 6
 c) $x = 0$ y -2 d) $x = 0$ y -9

4 Estas ecuaciones de segundo grado son incompletas. Explica en cada una cuál es el coeficiente que vale cero y resuélvelas.

- a) $x^2 - 16 = 0$ b) $x^2 + 12x = 0$
 c) $2x^2 - 72 = 0$ d) $5x^2 - 20x = 0$
- a) $b = 0$; $x = 4$ y -4 b) $c = 0$; $x = 0$ y -12
 c) $b = 0$; $x = 6$ y -6 d) $c = 0$; $x = 0$ y 4

5 Un terreno tiene forma cuadrada y su área vale 900 m^2 . ¿Cuánto vale el lado? Plantea y resuelve una ecuación de segundo grado.

$x^2 = 900$; $x = 30$ y -30 ; la solución válida es 30 m .

6.3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
MEDIANTE ECUACIONES

ACTIVIDADES

1 Paula ha multiplicado un número por 9 y al resultado le ha restado 40, obteniendo como valor final 77. ¿Cuál era el número?

$$9x - 40 = 77; x = 13$$

2 Juan ha elevado un número al cuadrado y al resultado le ha restado 15, obteniendo como valor final 21. ¿Cuál era el número? ¿Hay una única respuesta?

$$x^2 - 15 = 21; \text{hay dos respuestas posibles: } 6 \text{ y } -6.$$

3 El abuelo de Pedro le ha dado 40 €, y cada uno de sus tíos le ha dado 20 €. En total, Pedro ha conseguido 200 €. ¿Cuántos tíos tiene?

$$40 + 20x = 200; x = 8 \text{ tíos.}$$

4 En un triángulo, el ángulo mayor mide 40° más que el mediano y éste mide 40° más que el pequeño. Calcula el valor de cada ángulo. Haz el dibujo y llama x a la medida del ángulo menor.

$$x + (x + 40) + (x + 80) = 180; \text{valen } 20^\circ, 60^\circ \text{ y } 100^\circ.$$

5 Un salón de 72 m^2 de área tiene forma rectangular y su lado mayor mide el doble del lado menor. Calcula las dimensiones del salón. Haz el dibujo.

$$2x^2 = 72; \text{las dimensiones son } 12 \text{ m y } 6 \text{ m.}$$

6.4 SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER
GRADO CON DOS INCÓGNITAS

INVESTIGA

Sea el sistema:
$$\begin{cases} x + y = 29 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Señala cuál de estos tres pares de valores es la solución del sistema:

a) $x = 7, y = 22$ b) $x = 13, y = 19$ c) $x = 12, y = 17$

$$x = 12; y = 17$$

ACTIVIDADES

1 Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:

a)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$$

a) $x = 4; y = 2$

b)
$$\begin{cases} x - 4y = -5 \\ 2x - y = 11 \end{cases}$$

b) $x = 7; y = 3$

2 Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a)
$$\begin{cases} 6x + y = 8 \\ x + y = -7 \end{cases}$$

a) $x = 3; y = -10$

b)
$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ x + 4y = -7 \end{cases}$$

b) $x = 1; y = -2$

3 Resuelve estos sistemas por el método de reducción:

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

a) $x = 3; y = -2$

b)
$$\begin{cases} 3x + y = 17 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$$

b) $x = 4; y = 5$

4 Elena y Marta son hermanas y la suma de sus edades vale 29 años. Además, sabemos que el doble de la edad de Elena menos la edad de Marta vale 7 años. Calcula la edad de cada una.

$$x + y = 29; 2x - y = 7; \text{Elena tiene } 12 \text{ años y Marta } 17 \text{ años.}$$

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $8 - \frac{x}{3} = x$

c) $\frac{4x}{5} = 12$

a) $x = 6$

b) $3x - 2 \cdot (x - 1) = 7$

d) $\frac{x - 1}{3} = \frac{x}{4}$

c) $x = 15$

d) $x = 4$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5 \cdot (x - 6) = 2 \cdot (x + 3)$

c) $4 + \frac{x}{5} = 9$

a) $x = 12$

b) $\frac{x - 3}{4} = \frac{x + 3}{6}$

d) $\frac{3x - 1}{2} + x = 7$

c) $x = 25$

d) $x = 3$

3 Ana ha ahorrado cada semana la misma cantidad de dinero, durante 16 semanas. Como premio, sus padres le han dado 32 € y ahora tiene 400 €. ¿Cuánto ahorra cada semana?

$$16x + 32 = 400; x = 23 \text{ euros.}$$

4 Calcula 4 números naturales consecutivos cuya suma vale 170.

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 170; x = 41.$$

Son 41, 42, 43 y 44.

5 Cinco entradas de cine y tres chocolatinas han costado 25,6 €; y siete entradas de cine y cinco chocolatinas han costado 36,8 €. Calcula el valor de cada entrada y de cada chocolatina.

$$5x + 3y = 25,6; 7x + 5y = 36,8$$

La entrada de cine cuesta 4,4 € y la chocolatina 1,2 €.

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

1 Comprueba si los siguientes pares de fracciones son o no equivalentes. Escribe entre ellas el símbolo = si son equivalentes y el símbolo $\neq$ si no lo son.

a) $\frac{2}{3} \square \frac{8}{12}$

b) $\frac{4}{6} \square \frac{6}{9}$

c) $\frac{3}{5} \square \frac{5}{3}$

d) $\frac{6}{3} \square \frac{8}{4}$

a) Equivalentes.

b) Equivalentes.

c) No son equivalentes.

d) Equivalentes.

2 Escribe el signo = (igual), < (menor) o > (mayor), según corresponda, entre los siguientes pares de fracciones. Para ello, puedes escribir las fracciones como números decimales, o bien aplicar la propiedad citada anteriormente.

a) $\frac{2}{3} \square \frac{4}{5}$

b) $\frac{10}{15} \square \frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{5} \square \frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{7} \square \frac{2}{6}$

e) $\frac{1}{2} \square \frac{3}{6}$

f) $\frac{7}{10} \square \frac{2}{5}$

a) $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$

b) $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{7} > \frac{2}{6}$

e) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

f) $\frac{7}{10} > \frac{2}{5}$

7.1 RAZÓN Y PROPORCIÓN

ACTIVIDADES

1 Las edades de tres hermanos son 2 años, 6 años y 18 años. Calcula la razón de las edades del mayor al mediano y la del mediano al pequeño. ¿Forman una proporción esas dos razones?

La razón del mayor al mediano es 3, igual que la razón del mediano al pequeño. Forman proporción.

2 Calcula el cuarto proporcional de:

a) 3, 15 y 10

b) 2, 7 y 9

c) 12, 21 y 8

a) $x = 50$

b) $x = 31,5$

c) $x = 14$

3 ¿Qué otro nombre recibe la media proporcional de dos números? Calcula la media proporcional de dos números que tú elijas.

Media geométrica.

4 Calcula la media geométrica de los siguientes números. Si no da exacto, redondea el resultado con dos cifras decimales.

a) 2 y 8

b) 12 y 16

c) $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{6}$

Consideramos valores positivos para las magnitudes.

a) $x = 4$

b) $x = 13,86$

c) $x = \frac{1}{3}$

5 Ana ha calculado la media aritmética de 12 y 48, y Ernesto ha calculado la media geométrica de 15 y 60. ¿Cuál de los dos ha obtenido mayor resultado?

Ernesto.

7.2 MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES. REGLA DE TRES DIRECTA

ACTIVIDADES

1 En una fábrica de recambios de automóvil, una máquina hace 5 piezas cada hora.

a) Completa la tabla:

N.º de horas trabajadas	x	2	4	6	9	12	24
N.º de piezas producidas	y	10	20	30	45	60	120

b) ¿Cómo son las magnitudes x: «número de horas trabajadas por la máquina» e y: «número de piezas producidas»?

c) Completa las proporciones:

$$\frac{2}{20} = \frac{6}{45} = \frac{12}{120} = \frac{24}{120}$$

a) Son directamente proporcionales.

c) $\frac{2}{10} = \frac{4}{20} = \frac{6}{30} = \frac{9}{45} = \frac{12}{60} = \frac{24}{120}$

2 Un depósito con capacidad para 520 L de gasolina está lleno, y se gastan 20 L cada tres días. ¿Cuántos días deben pasar para que el depósito esté mediado? ¿Y para que esté vacío?

Deben pasar 39 días para que esté mediado y 78 días para que esté vacío.

3 Un colegio subvenciona un viaje de estudios dando 324 € por cada 12 alumnos. ¿Cuál será la subvención recibida si van al viaje 79 alumnos?

2 133 euros.

4 Una comunidad de vecinos alquila un servicio de andamiaje por un total de 6 000 € y 20 días. Si se retrasan en la obra y necesitan los andamios 5 días más, ¿cuánto deberán pagar?

7 500 euros.

7.3 MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES. REGLA DE TRES INVERSA

ACTIVIDADES

1 En una empresa de construcción deben almacenar 300 m³ de arena en bidones.

a) Analiza y completa la tabla:

Capacidad de cada bidón (m ³)	x	2	3	4	5	6
N.º de bidones necesarios	y	150	100	75	60	50

b) ¿Cómo son las magnitudes x: «capacidad de cada bidón» e y: «número de bidones que se necesitan»?

c) Comprueba, con cada par de valores, que $x \cdot y$ es constante.

b) Son magnitudes inversamente proporcionales.

c) $xy = 300$

2 En una empresa familiar han empaquetado su producción de café en 750 paquetes de 1 250 g cada uno. ¿Cuántos paquetes habrían obtenido si cada uno contuviese 1 500 g de café?

625 paquetes.

3 Manteniendo una velocidad media constante de 15 km/h un ciclista tarda 20 minutos en el trayecto de su casa al trabajo. ¿Cuánto tardará si sólo consigue una velocidad media de 12 km/h?

25 minutos.

4 Con su paga mensual, un chico ha comprado 10 cómics a 1,20 € cada uno. Si el precio por unidad fuese 1,5 €, ¿cuántos cómics podría comprar?

8 cómics.

5 Una minicentral eléctrica produce energía para atender a 80 000 familias, si el gasto medio de cada una es de 3 000 kw/h anuales. Si quiere atender a 100 000 familias, ¿qué gasto máximo puede hacer cada una?

2 400 kw/h anuales.

7.4 PORCENTAJES. REPARTOS PROPORCIONALES

ACTIVIDADES

1 Calcula los siguientes porcentajes:

a) El 5 % de 1 200 €

b) El 72 % de 6 000 L

a) 60 euros

b) 4 320 L

2 Por invertir 5 000 €, una señora ha recibido como ganancia el 3,1% de esa cantidad. ¿Cuánto ha ganado?

155 euros.

3 En la compra de un abrigo que costaba 250 € nos han hecho una rebaja del 12 %. Calcula:

a) El importe de la rebaja.

b) Qué cantidad hemos pagado.

c) Qué porcentaje del abrigo hemos pagado.

a) La rebaja es de 30 euros.

b) Hemos pagado 220 euros.

c) Hemos pagado el 88 % del abrigo.

4 Dos hermanos han recibido 80 € por ayudar a su padre y quieren repartirlos en partes directamente proporcionales al número de horas que ha trabajado cada uno, que son 2 horas y 6 horas. ¿Cuánto dinero recibirá cada uno?

El que trabajó 2 h recibe 20 euros y el otro recibe 60 euros.

5 Tres compañeros de piso pagan 510 € mensuales por el alquiler de la vivienda y quieren repartir ese gasto en partes directamente proporcionales al número de días de la semana que lo ocupa cada uno, que son 3, 5 y 7 días. ¿Cuánto debe pagar cada uno?

Paga 102 euros el que lo ocupa 3 días; paga 170 euros el que lo ocupa 5 días y paga 238 euros el que lo ocupa 7 días.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Una familia compra una televisión que cuesta 960 € y una lavadora que cuesta 480 €. En la televisión les hacen un descuento del 8 % y en la lavadora les rebajan el 10 %. ¿Cuánto deben pagar en total?

Deben pagar $883,2 + 432 = 1\,315,2$ euros.

2 Cierta clase de tejido mengua, al ser lavado, un 1,2%. ¿Cuál será el largo de una pieza de 300 m de largo después de lavarla?

296,4 m

3 En una fiesta se han reunido 48 mujeres y 72 hombres. ¿Qué porcentaje del total de asistentes son mujeres? ¿Y cuál es el porcentaje de hombres?

El 40 % son mujeres y el 60 % hombres.

4 En un colegio hay 120 alumnos/as de segundo de ESO, de los cuales el 55 % son chicas y el resto chicos.

a) ¿Cuál es el porcentaje de chicos?

b) ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay?

c) La tercera parte de las alumnas y el 50 % de los chicos participan en alguna actividad extraescolar. ¿Cuántos participan en total?

a) El porcentaje de chicos es 45 %

b) Hay 54 chicos y 66 chicas

c) 49 estudiantes participan en extraescolares.

5 En una empresa se ha producido una pérdida de 15 000 € y debe ser asumida entre los tres socios, de forma directamente proporcional a su participación en la propiedad, que es del 10 %, del 40 % y del 50 % respectivamente. ¿A cuánto asciende la pérdida de cada uno

Las pérdidas respectivas son 1 500, 6 000 y 7 500 euros.

6 En un lote de 960 discos se han encontrado 12 defectuosos. ¿Qué porcentaje de discos defectuosos había en el lote?

1,25 %

8 FUNCIONES

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

1 ¿Qué coordenadas tiene el origen de coordenadas?

(0, 0)

2 Dibuja unos ejes de coordenadas. Después:

a) Representa los puntos:

$A(4, 2)$, $B(-1, 2)$ y $C(-1, -3)$

b) ¿Qué coordenadas debe tener el punto D para que al unir los puntos A , B , C y D resulte un cuadrado?

Debe ser $D(4, -3)$.

3 Indica sobre qué eje está situado cada uno de estos puntos:

a) $P(6, 0)$

b) $Q(0, -5)$

c) $R(0, 3)$

d) $S(-4, 0)$

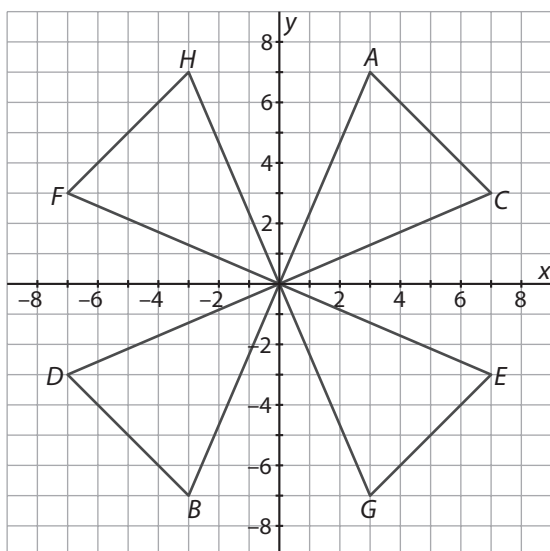
a) y d) Eje OX

b) y c) Eje OY

8.1 EJES DE COORDENADAS E INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS

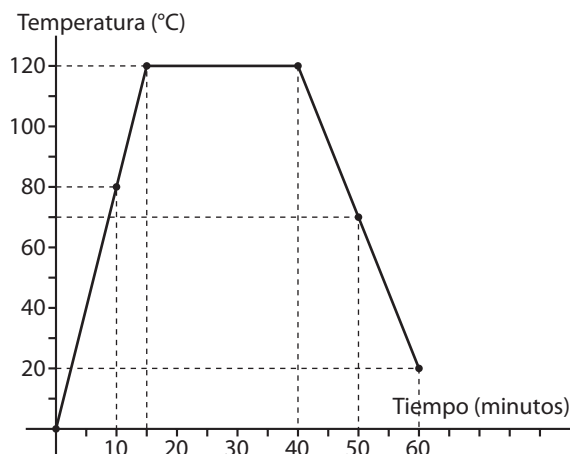
ACTIVIDADES

1 Representa en unos ejes de coordenadas los puntos $A(3, 7)$, $B(-3, -7)$, $C(7, 3)$, $D(-7, -3)$, $E(7, -3)$, $F(-7, 3)$, $G(3, -7)$ y $H(-3, 7)$. Después une A con B ; C con D ; E con F ; G con H ; A con C ; E con G ; B con D y F con H . Deberás obtener el dibujo de un aspa. Rellénala de color.



2 Este gráfico representa la temperatura de un horno a lo largo de una hora de tiempo. Analiza el gráfico e indica:

<http://www.McGraw-Hill.es>



a) En qué intervalo de tiempo estuvo subiendo la temperatura.

b)Cuál fue la temperatura máxima del horno y durante cuánto tiempo se mantuvo.

c)Cuál era la temperatura del horno al cabo de una hora.

d)Cuál era la temperatura del horno a los diez minutos de encenderlo.

e)Cuál era la temperatura del horno diez minutos antes de cumplirse la hora.

a) Subió en el intervalo 0 a 15 minutos.

b) 120 °C durante 25 minutos.

a) 20 °C

d) 80 °C

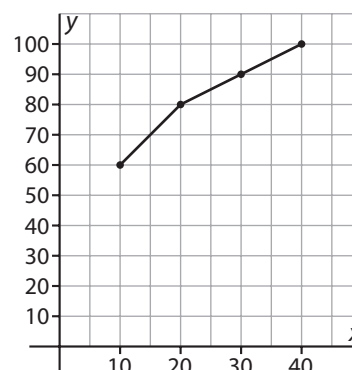
e) 70 °C.

8.2 GRÁFICA ASOCIADA A UNA TABLA DE VALORES

CALCULA

Dibuja tú la gráfica asociada a esta tabla de valores que recoge la velocidad de un coche, medida a intervalos de 10 minutos. Une los puntos mediante segmentos.

Tiempo (minutos)	10	20	30	40
Velocidad (km/h)	60	80	90	100

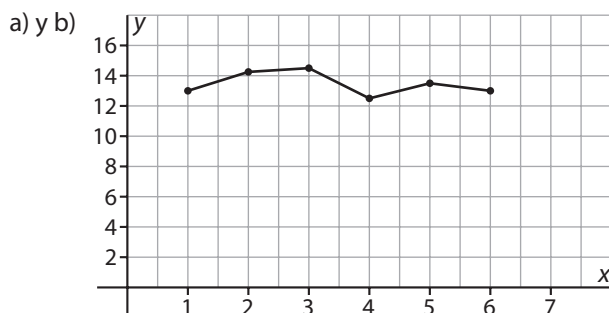


ACTIVIDADES

1 Esta tabla refleja el valor de las acciones de cierta empresa a lo largo de seis meses:

Mes	1	2	3	4	5	6
Valor de la acción en euros	13	14,25	14,5	12,5	13,5	13

- Representa los valores de la tabla en un gráfico.
- Une los puntos mediante segmentos. Observa que al hacer esto damos por supuesto que a lo largo de un mes el precio de la acción no tuvo cambios muy bruscos.
- ¿Cuál fue la variación del precio de la acción entre el primer mes y el quinto? ¿Y entre el segundo y el sexto?

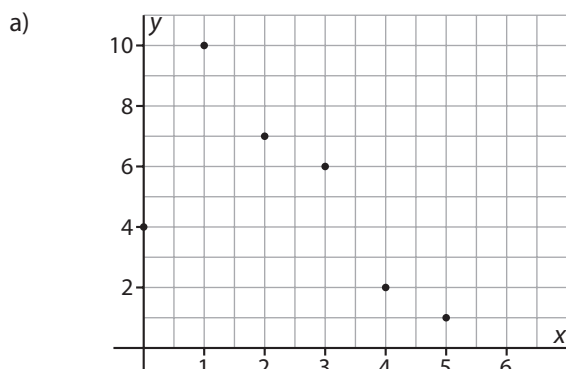


- La variación del precio entre el primer mes y el quinto es: subió 0,5 euros. Entre el segundo mes y el sexto bajó 1,25 euros.

2 En esta tabla se recoge el número de niños menores de 14 años que viven en las diferentes viviendas de un bloque:

Número de niños	0	1	2	3	4	5
Número de viviendas	4	10	7	6	2	1

- Representa los valores de la tabla en un gráfico.
- Explica por qué no tiene sentido unir los puntos.
- ¿Cuántas viviendas hay en el bloque?
- ¿Cuántos niños menores de 14 años hay en total en el bloque?



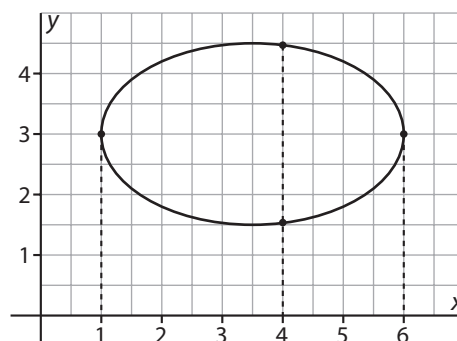
- No se unen los puntos porque el número de niños es un número entero.
- 30 viviendas.
- 55 niños.

8.3 CONCEPTO DE FUNCIÓN. CARACTERÍSTICAS

ACTIVIDADES

1 Observa esta curva representada en el plano y responde a las preguntas:

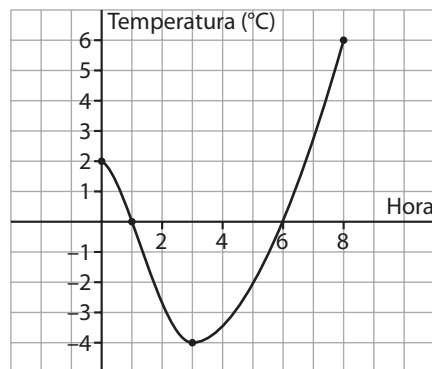
- Cuántos puntos hay en la curva cuya abscisa valga 6? ¿Y cuya abscisa valga 4?



- Explica por qué esta curva no representa a ninguna función.

- Hay un solo punto de abscisa 6, el (6, 3). Hay dos puntos de abscisa 4.
- La curva no representa a una función porque para un valor de x hay más de un valor de y .

2 La gráfica de esta función representa la evolución de las temperaturas en una ciudad a lo largo de una noche. Observa sus características y responde a las siguientes preguntas:



- Indica el dominio y el recorrido de la función.
- ¿Cuál fue la temperatura mínima alcanzada? ¿Y la máxima? ¿A qué hora se alcanzaron?
- Señala el intervalo en el que la función es creciente y el intervalo en el que es decreciente.
- ¿A qué hora la temperatura fue de 0°C ?

8 FUNCIONES

- a) El dominio es el intervalo 0 a 8 horas. El recorrido es el intervalo -4 a 6 °C.
- b) Temperatura mínima: -4 °C a las 3 horas. Temperatura máxima: 6 °C a las 8 horas.
- c) Creciente en el intervalo 3 a 8 h. Decreciente en el intervalo 0 a 3 h.
- d) A la 1 y a las 5 h la temperatura fue de 0 °C.

8.4 FUNCIÓN LINEAL Y FUNCIÓN AFÍN

ACTIVIDADES

1 Dibuja, en unos mismos ejes de coordenadas, la gráfica de las funciones lineales $y = 3x$ e $y = -4x$. Observa que la función que tiene pendiente positiva es creciente y la que tiene pendiente negativa es decreciente.

La gráfica de la función $y = 3x$ es la recta que pasa por el origen y por el punto $(1, 3)$. Es creciente y su pendiente es positiva, $m = 3$.

La gráfica de la función $y = -4x$ es la recta que pasa por el origen y por el punto $(1, -4)$. Es decreciente y su pendiente es negativa, $m = -4$.

2 Dibuja en el mismo sistema de coordenadas la gráfica de las funciones afines $y = 3x - 4$ e $y = -3x + 2$. Indica cuánto vale la pendiente de cada una.

La gráfica de $y = 3x - 4$ es la recta que pasa por los puntos $(0, -4)$ y $(1, -1)$; su pendiente es $m = 3$.

La gráfica de $y = -3x + 2$ es la recta que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(1, -1)$; su pendiente es $m = -3$.

3 Dibuja en el mismo sistema de coordenadas la gráfica de las funciones $y = -4x$ e $y = 2x - 6$. Indica cuánto vale la pendiente de cada una y el punto en el que la función afín corta al eje y .

La gráfica de $y = -4x$ es la recta que pasa por el origen y el punto $(1, -4)$; $m = -4$.

La gráfica de $y = 2x - 6$ es la recta que pasa por $(0, -6)$ y $(2, -2)$; $m = 2$; corta al eje OY en el punto $(0, -6)$.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

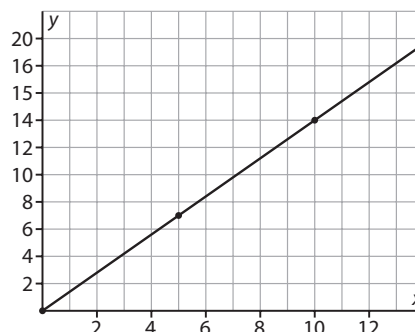
1 Cierta día, el cambio entre el euro y el dólar era: 1 euro = 1,4 dólares.

- a) Calcula el valor en dólares de 10 €, de 150 € y de 500 €.
- b) Representa la gráfica de la función $y = 1,4x$. Para formar la tabla de valores, da a x los valores 0; 5; 10 y 15 y elige la escala de los ejes adecuadamente.
- c) ¿Qué tipo de función es $y = 1,4x$: lineal o afín? ¿Qué representa esta función respecto al cambio de moneda?

<http://www.McGraw-Hill.es>

- a) 10 euros = 14 dólares; 150 euros = 210 dólares; 500 euros = 700 dólares.

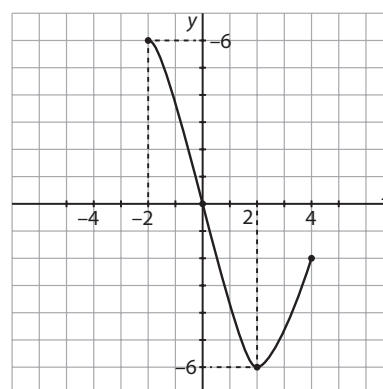
b)



- c) Es lineal; da el valor en dólares de una cantidad cualquiera x de euros.

2 Dibuja la gráfica de una función que cumpla todas estas condiciones a la vez:

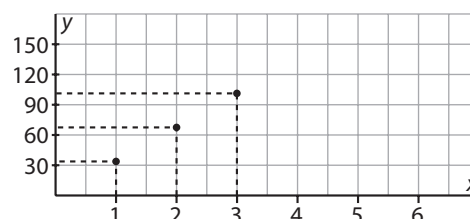
- a) El dominio es el intervalo de -2 a 4 .
- b) El recorrido es el intervalo de -6 a 6 .
- c) La gráfica pasa por el origen de coordenadas.
- d) Es decreciente en el intervalo de -2 a 2 y creciente de 2 a 4 .



3 La cuota mensual en euros de un club de campo viene dada por la función $y = 30 + 10x$, donde x representa el número de familiares que dependen del socio/a.

- a) Representa la gráfica de la función.
- b) ¿Cuánto debe pagar un socio/a sin familia?
- c) ¿Qué tipo de función es, lineal o afín?
- d) Si un socio/a paga 70 euros, ¿cuántos familiares tiene a su cargo?

a)



- a) 30 euros
- c) Afín
- d) 4 familiares

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

■ **1** Responde a estas preguntas de forma razonada:

- ¿Cuántos ángulos centrales hay en un hexágono regular?
- ¿Y en un polígono regular de n lados?
- ¿Cómo son entre sí los ángulos centrales de un polígono regular?
- Calcula el valor de cada ángulo central en un hexágono regular y en un pentágono regular.

- 6
- n
- Iguales
- 60° en el hexágono regular y 72° en el pentágono regular.

■ **2** Dibuja una circunferencia y señala en ella con diferentes colores: un radio, una cuerda, un diámetro y un arco. Expresa con tus propias palabras qué es cada cosa.

Teoría.

■ **3** ¿Cómo se llama cada uno de los dos arcos en que un diámetro divide a una circunferencia? Haz un dibujo.

Semicircunferencia.

9.1 LA MEDIDA DEL TIEMPO

ACTIVIDADES

■ **1** Calcula cuántos minutos y cuántos segundos hay en un día.

1 440 minutos y 86 400 segundos.

■ **2** Expresa en forma compleja (horas, minutos y segundos):

- 8 112 s
- 1 845 min
- 14 205 s
- 2 h 15 min 12 s
- 30 h 45 min
- 3 h 56 min 45 s

■ **3** Expresa en forma decimal, en horas, las siguientes medidas de tiempo en forma compleja:

- 3 h 45 min
- 1 h 30 min 15 s
- 0 h 42 min
- 3,75 h
- 1,5041 h
- 0,7 h

■ **4** Expresa en forma compleja las siguientes medidas de tiempo:

- 2,5 h
- 45,3 min
- 1,165 h
- 2 h 30 min
- 45 min 18 s
- 1 h 9 min 54 s

■ **5** ¿Cuántos años tiene un lustro? ¿Y un decenio? ¿Y un siglo?

- 5 años
- 10 años
- 100 años

■ **6** El padre de Ismael acaba de cumplir 9 lustros e Ismael tiene 3 decenios menos que su padre. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Ismael tiene 15 años y el padre 45 años.

9.2 OPERACIONES CON MEDIDAS DEL TIEMPO EN FORMA COMPLEJA

ACTIVIDADES

■ **1** Marta viaja en avión de Madrid a Bruselas haciendo escala en París. La primera parte del vuelo dura 1 h 55 min; el tiempo de espera en París es de 50 min y la segunda parte del vuelo dura 1 h 5 min. ¿Cuál es la duración total del viaje?

3 h 50 min

■ **2** Un concierto de rock ha durado en total 3 h 17 min y la duración de los descansos ha sido de 1 h 43 min. ¿Durante cuánto tiempo ha estado tocando el grupo?

1 h 34 min

■ **3** En un disco compacto de música hay 14 canciones, todas de la misma duración, y cada una dura 1 min 12 s. Calcula la duración del disco y exprésala en forma compleja.

16 min 48 s

■ **4** Un corredor ha dado 12 vueltas a una pista de atletismo a una velocidad constante y ha tardado en total 40 min 24 s. Calcula cuánto tarda en dar una vuelta.

3 min 22 s

■ **5** Sara salió de su casa a las cinco y media de la tarde y regresó a las 22 h 50 min. ¿Cuánto tiempo estuvo fuera?

5 h 20 min

9.3 MEDIDA DE ÁNGULOS. ÁNGULOS EN EL PLANO

ACTIVIDADES

■ **1** Expresa en forma compleja (grados, minutos y segundos) las siguientes medidas de ángulos:

- 52,25°
- 35,6°
- 20,47°
- 52° 15'
- 35° 36'
- 20° 28' 12"

■ **2** Convierte estas medidas de ángulos a forma decimal, expresadas en grados:

- 12° 45'
- 45° 30'
- 45° 33'
- 12,75°
- 45,5°
- 45,55°

3 Calcula el ángulo complementario y el ángulo suplementario de los siguientes ángulos:

- a) 49° b) $56^\circ 47'$ c) $12^\circ 25' 14''$

- a) El complementario vale 41° y el suplementario 131° .
 b) Complementario: $33^\circ 13'$. Suplementario: $123^\circ 13'$.
 c) Complementario: $77^\circ 34' 46''$. Suplementario: $167^\circ 34' 46''$

4 Dos ángulos suman $56^\circ 23'$ y uno de ellos vale $30^\circ 45' 12''$. Calcula el valor del otro.

$25^\circ 37' 48''$

5 Un ángulo de $153^\circ 26'$ se ha dividido en 4 ángulos iguales. ¿Cuánto mide cada uno?

$38^\circ 21' 30''$

9.4 ÁNGULOS DE UN POLÍGONO Y DE LA CIRCUNFERENCIA

CALCULA

Completa el siguiente cuadro poniendo cuánto vale la suma de los ángulos interiores y cuánto vale cada uno.

	Suma ángulos interiores	Cada ángulo interior
Pentágono regular	540°	108°
Hexágono regular	720°	120°
Octógono regular	1080°	135°

ACTIVIDADES

1 ¿Cuánto vale la suma de los tres ángulos de un triángulo? ¿Y la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero?

180° y 360°

2 Dos ángulos de un triángulo valen $13^\circ 26'$ y $49^\circ 45'$. Calcula el valor del tercer ángulo.

$116^\circ 49'$

3 Tres ángulos de un cuadrilátero valen 25° , $102^\circ 42'$ y $70^\circ 30'$. Calcula el valor del cuarto ángulo.

$161^\circ 48'$

4 Calcula el valor de los siguientes ángulos de la circunferencia. Haz un dibujo para cada uno.

- a) Un ángulo central que abarca un arco de 60° .
 b) Un ángulo inscrito que abarca un arco de 60° .

c) Un ángulo interior cuyos lados abarcan dos arcos de 50° y 110° .

d) Un ángulo exterior cuyos lados abarcan dos arcos de 50° y 110° .

- a) 60° b) 30° c) 80° d) 30°

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Calcula el valor de los siguientes ángulos en la circunferencia. Haz un dibujo para cada uno.

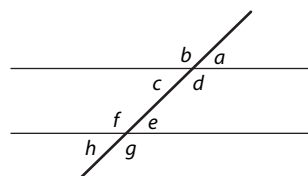
- a) Un ángulo semiinscrito cuyo arco vale 210° .
 b) Un ángulo circunscrito cuyos lados abarcan arcos de 120° y 240° .

- a) 105° b) 60°

2 Un empleado tenía que trabajar 8 horas pero salió 35 minutos antes de tiempo. Expresa en forma compleja cuánto tiempo trabajó.

7 h 25 min

3 El ángulo a de la figura vale $23^\circ 46'$. Calcula el valor de los demás ángulos.

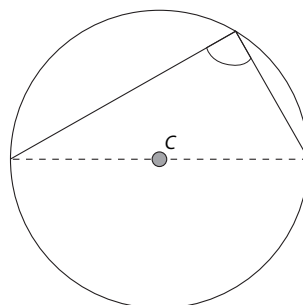


$$a = c = e = h = 23^\circ 46'$$

$$b = d = f = g = 156^\circ 14'$$

4 Observa el ángulo de la figura y responde a estas preguntas:

- a) ¿Qué clase de ángulo es en la circunferencia?
 b) ¿Cuántos grados mide el arco que abarca?
 c) Calcula la medida del ángulo.



- a) Inscrito b) 180° c) 90°

5 Pedro ha dedicado 4 h 25 min de la tarde del sábado a estudiar y ha repartido este tiempo a partes iguales entre cinco asignaturas. ¿Cuánto tiempo dedicó a cada una?

53 minutos

SEMEJANZA. TEOREMA DE PITÁGORAS 10

<http://www.McGraw-Hill.es>

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

1 Un rectángulo mide 6 cm de largo y 2 cm de ancho. Otro rectángulo mide 9 cm de largo y 3 cm de ancho.

Calcula la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ en cada rectángulo y comprueba que forman una proporción. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? Haz un dibujo.

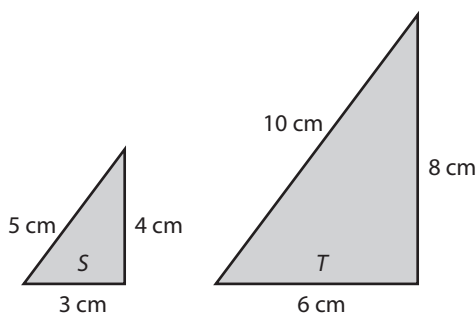
$$\frac{\text{ancho}}{\text{largo}} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3}. \text{ La constante de proporcionalidad es 3.}$$

2 Escribe con tus propias palabras qué es un triángulo rectángulo.

¿Cómo se llama el lado opuesto al ángulo recto? ¿Qué nombre reciben los otros dos lados?

Teoría.

3 Observa los dos triángulos rectángulos de la figura. Calcula estas tres razones y comprueba que forman proporción.



- El cateto menor en S al cateto menor en T.
- El cateto mayor en S al cateto mayor en T.
- La hipotenusa en S a la hipotenusa en T.

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

10.1 FIGURAS SEMEJANTES

ACTIVIDADES

1 La base de un rectángulo R mide 8 cm y la altura 5 cm. Escribe tú las dimensiones de un rectángulo que sea semejante a R y las dimensiones de otro que no sea semejante a R. Haz un dibujo.

Rectángulo semejante a R: 16 cm de base y 10 cm de altura. Rectángulo no semejante a R: 16 cm de base y 9 cm de altura.

2 Dos pentágonos son semejantes y la razón de semejanza (del grande al pequeño) vale 4.

- ¿Cuánto vale la razón de los perímetros?
- ¿Y la razón de las áreas?
- Un lado del pentágono pequeño vale 12 cm; calcula su homólogo en el grande.
- El perímetro del pequeño vale 100 cm; calcula el perímetro del grande.
- El área del grande vale 600 cm²; calcula el área del pequeño.

- 4
- 16
- 48 cm
- 400 cm
- 37,5 cm²

3 Dos triángulos son semejantes y la razón de semejanza vale 3. Los lados del triángulo pequeño valen 15, 17 y 19 cm. Calcula los lados del triángulo grande.

45 cm, 51 cm y 57 cm

4 Dos pentágonos son semejantes y la razón de semejanza vale $\frac{1}{3}$. Los lados del pentágono grande miden 15, 21, 27, 30 y 36 cm. Calcula los lados del pentágono pequeño.

5, 7, 9, 10 y 12 cm

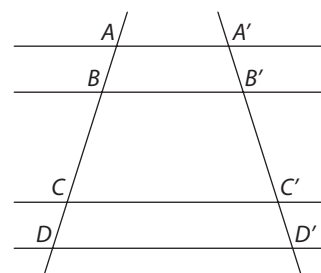
5 Dos polígonos son semejantes y dos lados homólogos valen respectivamente 15 cm y 60 cm. ¿Cuánto vale la razón de semejanza?

La razón de semejanza es $\frac{1}{4}$.

10.2 TEOREMA DE TALES. CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

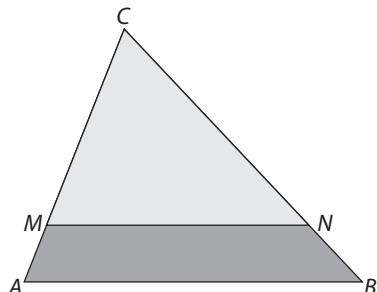
ACTIVIDADES

1 Observa las rectas paralelas cortadas por dos secantes en la figura. Sabiendo que $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 4$ cm y $B'C' = 7$ cm, calcula las medidas de $A'B'$, $C'D'$ y $A'D'$.



$A'B' = 4,2$ cm; $C'D' = 5,6$ cm; $A'D' = 16,8$ cm

■ **2** Observa los dos triángulos semejantes situados en posición de Tales en la figura. Sabiendo que $CM = 12$ cm, $CA = 15$ cm y $NB = 5$ cm, calcula CN y CB .

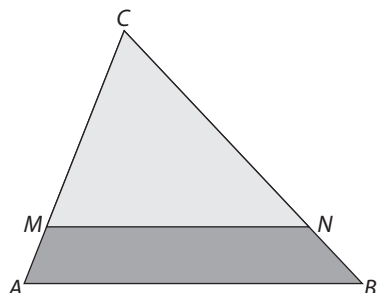


$CN = 20$ cm; $CB = 25$ cm

■ **3** Escribe con tus propias palabras los tres criterios de semejanza de triángulos: *dos triángulos son semejantes si:*

Teoría.

■ **4** Observa los dos triángulos semejantes situados en posición de Tales de la figura:



- Indica las tres parejas de ángulos homólogos.
- Indica las tres parejas de lados homólogos.
- Sabiendo que $CM = 12$ cm, $CA = 15$ cm y $MN = 16$ cm, calcula AB .

- Los ángulos M y A ; N y B ; C y C
- Los lados AC y MC ; BC y NC ; AB y MN
- $AB = 20$ cm

10.3 APLICACIONES DE LA SEMEJANZA

ACTIVIDADES

■ **1** Dibuja un segmento de 4 cm y divídelo en cinco partes iguales.

Teoría.

■ **2** Construye un cuadrilátero semejante al de la figura y mayor que él, con razón de semejanza 2. Recuerda que debes tomar un punto B' tal que $AB' = 2 \cdot AB$, trazar por B' una paralela a BC y después, otra a CD . Colorea en rojo el contorno del nuevo cuadrilátero.

Seguir las instrucciones del enunciado.

■ **3** Un parque infantil tiene forma rectangular de dimensiones 15 m por 12 m, y queremos representarlo a escala 1:200. Calcula qué dimensiones tendrá en el dibujo.

7,5 cm por 6 cm

■ **4** En un plano, realizado a escala 1:750, una plaza cuadrada tiene 3 cm de lado. ¿Cuánto mide en la realidad el lado de la plaza?

22,5 m

■ **5** En el plano de una gran ciudad, dos edificios que distan 2 km están a una distancia de 4 cm. ¿A qué escala está hecho el plano?

1:50 000

10.4 TEOREMA DE PITÁGORAS. APLICACIONES

ACTIVIDADES

■ **1** En un triángulo rectángulo, los catetos miden 5 cm y 12 cm. Haz un dibujo y calcula la hipotenusa.

13 cm

■ **2** En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos, 9 cm. Calcula el otro cateto.

12 cm

■ **3** Las dimensiones de un rectángulo son 16 cm y 12 cm. ¿Cuánto vale su diagonal? Haz un dibujo.

20 cm

■ **4** El lado de un cuadrado mide 10 cm. Calcula la medida de la diagonal. Si no resulta un valor exacto, redondea con dos decimales.

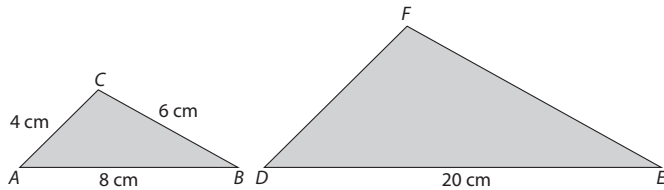
Diagonal = 14,14 cm

■ **5** Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 12 cm. Haz un dibujo.

Altura = 10,39 cm

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Los dos triángulos de esta figura son semejantes porque $\hat{A} = \hat{D}$ y $\hat{B} = \hat{E}$.



Calcula:

a) Los dos lados desconocidos.

b) La razón de los perímetros y la razón de las áreas.

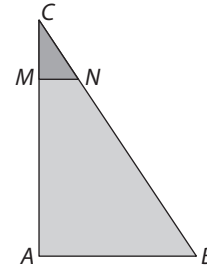
a) $DF = 10$ cm; $FE = 15$ cm

b) Razón de los perímetros = $\frac{2}{5}$; razón de las áreas = $\frac{4}{25}$.

2 La habitación de Cristina mide 4 m por 3,5 m, y su armario ropero mide 2 m de largo por 60 cm de fondo. Quiere dibujar un plano de la habitación, señalando la posición del armario, a escala 1:50. Calcula las dimensiones que ambos tendrán en el plano y haz un dibujo.

Habitación: 8 cm por 7 cm. Armario: 4 cm por 1,2 cm

3 Observa los dos triángulos rectángulos de la figura, ABC y MNC.



a) Explica por qué son semejantes.

b) Sabiendo que $AC = 12$ cm, $MC = 3$ cm y $AB = 8$ cm, calcula MN .

a) Están en posición de Tales. b) $MN = 2$ cm

4 Calcula la diagonal de:

a) Un cuadrado de lado 15 cm.

b) Un rectángulo de dimensiones 18 cm y 10 cm.

a) 21,21 cm

b) 20,59 cm

5 La base de un triángulo isósceles mide 10 cm y cada uno de los dos lados iguales, 13 cm. Haz un dibujo y calcula la altura y el área del triángulo.

Altura = 12 cm. Área = 60 cm²

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

1 Escribe las fórmulas del área del triángulo, del cuadrado y del rectángulo. Después, halla el perímetro y el área de estos polígonos:

Triángulo equilátero: 30 cm (perímetro), $25\sqrt{3}$ cm² (área).

Cuadrado: 80 cm (perímetro), 400 cm² (área).

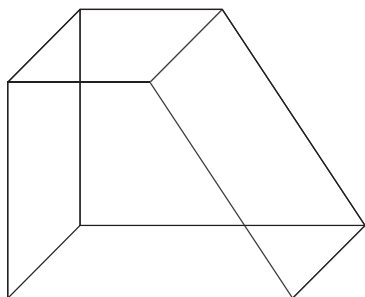
Rectángulo: 90 cm y 450 cm².

Hexágono regular: 72 cm y $216\sqrt{3}$ cm².

11.1 RECTAS, PLANOS Y ÁNGULOS EN EL ESPACIO

INVESTIGA

Este cuerpo geométrico tiene 6 caras. Encuentra:



Cuántos diedros tiene.

Cuántos son rectos.

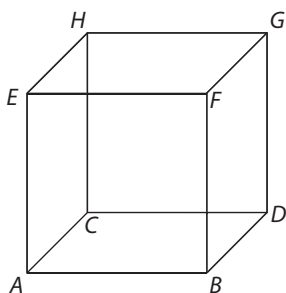
Cuántos son agudos.

Cuántos son obtusos.

Tiene 12 diedros: 8 son rectos, 3 son agudos y 1 es obtuso.

ACTIVIDADES

1 Este dibujo representa una caja de disquetes de ordenador. La cara de la base, $ABDC$, y la cara de la tapa, $EFGH$, están en planos paralelos. Rellena tú las caras que faltan en estas frases:



a) La cara $ABFE$ es paralela a la cara ...

b) La cara ... es paralela a la cara $BDGF$.

a) La cara $ABFE$ es paralela a la cara $CDGH$.

b) La cara $ACHE$ es paralela a la cara $BDGF$.

<http://www.McGraw-Hill.es>

2 En el mismo poliedro de la actividad anterior señala todas las aristas que sean paralelas a:

a) La arista EH .

b) La arista EF .

c) La arista EA .

a) Paralelas a EH : FG , BD , AC .

b) Paralelas a EF : HG , AB , CD .

c) Paralelas a EA : FB , GD , HC .

3 En el poliedro del ejercicio 1 señala tres pares de aristas que se corten en un punto y otros tres pares que se crucen.

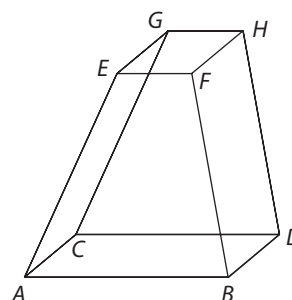
a) Se cortan.

b) Se cruzan.

a) Se cortan EH y EF ; AC y AB ; FG y GD .

b) Se cruzan EH y AB ; AC y FB ; EF y BD .

4 En este cuerpo geométrico nombra:



a) Cuatro aristas que sean paralelas al plano de la base.

b) Cuatro aristas que corten al plano de la base.

c) Nombra y dibuja dos segmentos que estén contenidos en el plano de la base.

a) EG , GH , FH y EF

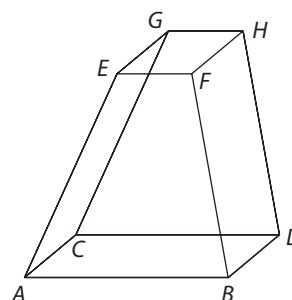
b) AE , BF , DH y CG

c) AD y BC

11.2 POLIEDROS. POLIEDROS REGULARES

ACTIVIDADES

1 En el poliedro de la figura:



a) Cuenta el número de caras, de aristas y de vértices que tiene.

- b) Comprueba que se cumple la fórmula de Euler.
 c) Calcula cuántos ángulos diedros tiene.
 d) Cuenta el número de ángulos poliedros que tiene.
 e) ¿Cuántas caras concurren en cada vértice?
 f) ¿Cuántas diagonales tiene?
 g) Nombra y dibuja todas sus diagonales (por ejemplo la diagonal AH)

- a) 6 caras, 12 aristas, 8 vértices.
 b) $6 + 8 = 12 + 2$ c) 12 ángulos diedros
 d) 8 ángulos poliedros e) 3 caras
 f) 4 diagonales g) AH; BG; DE; CF

2 Consulta tu libro de texto y cuenta en cada uno de los cinco poliedros regulares el número de caras, de aristas y de vértices, y comprueba que se cumple la fórmula de Euler.

Poliedro	Caras	Aristas	Vértices	Fórmula de Euler
Tetraedro				
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Teoría.

3 Dibuja un tetraedro, un cubo y un octaedro. Cuenta, en cada uno, cuántas aristas y cuántas caras concurren en cada vértice.

En el tetraedro y en el cubo concurren 3 caras y 3 aristas. En el octaedro, 4 caras y 4 aristas.

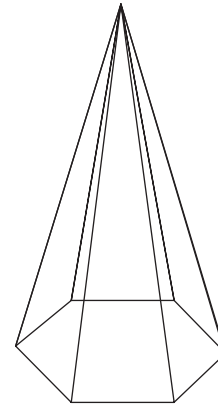
11.3 PRISMAS Y PIRÁMIDES

ACTIVIDADES

1 Representa un ladrillo, apoyado sobre una de sus dos caras mayores. Recuerda que debes dibujar la base en perspectiva. Responde a estas preguntas.

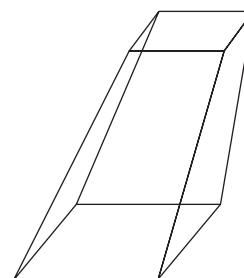
- a) ¿Qué clase de paralelogramos son sus bases?
 b) ¿Qué clase de paralelogramos son las caras laterales?
 c) Explica si se trata de un prisma recto u oblicuo.
 d) Explica si es un prisma regular o irregular.
 a) y b) Rectángulo; c) Prisma recto; d) Irregular.

2 En este dibujo está representada una pirámide hexagonal regular.



- a) ¿Cuántas caras laterales tiene?
 b) ¿Qué clase de triángulos son sus caras laterales?
 c) Dibuja con color rojo la altura de la pirámide.
 d) Dibuja con color verde la altura de una de las caras laterales. ¿Qué nombre recibe esta altura en la pirámide?
 e) Si se corta la pirámide con un plano paralelo a la base, ¿qué dos nuevos cuerpos se forman?
 a) 6 caras laterales.
 b) Triángulo isósceles.
 c) La perpendicular desde el vértice a la base.
 d) Apotema.
 e) Una pirámide y un tronco de pirámide.

3 Una pirámide cuadrangular oblicua ha sido cortada por un plano paralelo a la base, originando este tronco de pirámide.



- a) Dibuja con color rojo la altura del tronco de pirámide.
 b) ¿Qué clase de polígonos son las bases?
 c) ¿Qué clase de cuadriláteros son las caras laterales?
 d) Dibuja con color verde la altura de una de las caras laterales.
 a) La perpendicular entre las bases.
 b) Cuadrados.
 c) Trapecios.
 d) Dibuja la altura del trapecio frontal.

11 POLIEDROS

11.4 MEDIDAS

ACTIVIDADES

■ **1** Calcula el área total y el volumen de un cubo de arista 9 cm.

$$\text{Área total} = 486 \text{ cm}^2; \text{Volumen} = 729 \text{ cm}^3$$

■ **2** La altura de un prisma cuadrangular regular mide 25 cm y el lado de la base 12 cm. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.

$$\text{Área lateral} = 1200 \text{ cm}^2; \text{Área total} = 1488 \text{ cm}^2; \text{Volumen} = 3600 \text{ cm}^3$$

■ **3** La apotema de una pirámide hexagonal regular mide 30 cm y la arista de la base mide 14 cm. Calcula el área lateral y el área total de la pirámide.

$$\text{Área lateral} = 1260 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área de la base} = 294\sqrt{3} \approx 509,22 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = 1769,22 \text{ cm}^2$$

■ **4** Una pirámide regular tiene base cuadrada de lado 50 cm y su altura vale 75 cm. Se corta por un plano paralelo a la base a 30 cm del vértice, formándose un cuadrado de lado 20 cm. Calcula el volumen de:

- a) la pirámide grande,
- b) la pirámide pequeña,
- c) el tronco de pirámide.

- a) 62 500 cm³
- b) 4 000 cm³
- c) 58 500 cm³

ACTIVIDADES DE REFUERZO

■ **1** Una caja tiene forma de ortoedro, de dimensiones 75 cm, 60 cm y 50 cm. Queremos forrarla de terciopelo, incluida la base. ¿Cuántos cm² de terciopelo se necesitan? Si el precio de la tela es de 12 €/m², ¿cuánto gastaremos? Haz un dibujo.

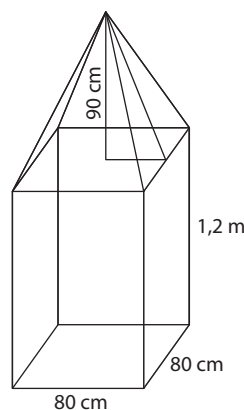
$$\text{Área total} = 2,25 \text{ m}^2. \text{ Precio} = 27 \text{ euros.}$$

<http://www.McGraw-Hill.es>

■ **2** Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular; su altura vale 12 m y la arista de la base 8 m. ¿Cuántos m³ de agua puede contener? ¿Cuánto pesa toda el agua que cabe en el depósito? Recuerda que 1 L de agua pesa 1 kg. Haz un dibujo.

$$\text{Volumen} = 1152\sqrt{3} \approx 1995,32 \text{ m}^3 \text{ de agua cuyo peso es } 1995,32 \text{ toneladas.}$$

■ **3** Un monumento está formado por un prisma de base cuadrada de lado 80 cm y altura 1,2 m; y sobre el prisma, una pirámide de 90 cm de altura. ¿Cuántos m³ de piedra se han necesitado para su construcción? Observa el dibujo y presta mucha atención a las unidades.



$$\text{Volumen del prisma} = 0,768 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen de la pirámide} = 0,192 \text{ m}^3$$

Se han necesitado 0,960 m³ de piedra.

■ **4** Se desea recubrir el monumento de la actividad anterior con una fina capa metálica. Calcula cuántos m² de chapa se necesitarán. Si el precio de la chapa metálica es de 120 €/m², calcula el precio total del recubrimiento.

Área lateral del prisma = 3,84 m²; apotema de la pirámide = 98,49 cm; área lateral de la pirámide = 1,58 m². Se necesitan 5,42 m² de chapa; el precio es 650,4 euros.

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

1 Escribe la fórmula del área del trapecio y calcula el área del trapecio rectángulo de la figura.

$$A = \frac{(B + b)h}{2} = 100 \text{ m}^2$$

2 Escribe con tus propias palabras qué es un triángulo rectángulo y haz un dibujo.

Teoría.

3 En un triángulo rectángulo, ¿cómo se llama el lado opuesto al ángulo recto? ¿Y los otros dos lados?

Teoría.

4 Calcula el área de un círculo de radio:

a) 10 m

b) 12 m

a) $A = 3,14 \cdot 10^2 = 314 \text{ m}^2$

b) $A = 452,16 \text{ m}$

5 Dibuja tres circunferencias y colorea de rojo respectivamente:

a) El círculo.

b) Un semicírculo.

c) Un sector circular de 120° .

Teoría.

12.1 CILINDROS. ÁREA LATERAL, TOTAL Y VOLUMEN

ACTIVIDADES

1 Un rectángulo de dimensiones 6 cm por 10 cm gira alrededor del lado mayor.

a) ¿Qué cuerpo genera?

b) ¿Cuánto vale el radio?

c) ¿Y la altura?

d) Haz un dibujo.

a) Cilindro

b) Radio = 6 cm

c) Altura = 10 cm

2 Un cilindro tiene 4 cm de radio y 10 cm de altura. Haz un dibujo de su desarrollo plano y coloca sobre él las siguientes medidas:

a) El radio de las dos circunferencias.

b) La base y la altura del rectángulo.

a) El radio de las circunferencias vale 4 cm.

b) La base del rectángulo vale $8\pi \approx 25,12 \text{ cm}$ y la altura 10 cm.

3 En un cilindro, el radio de la base mide 6 cm y la altura 12 cm. Calcula:

a) El área lateral.

b) El área total.

c) El volumen.

a) $A_{\text{lateral}} = 144\pi \text{ cm}^2$ b) $A_{\text{total}} = 216\pi \text{ cm}^2$ c) $V = 432\pi \text{ cm}^3$

4 Un depósito de agua de una comunidad de vecinos tiene forma cilíndrica de radio 3 m y altura 4 m.

a) ¿Cuántos m^3 de agua contiene?

b) ¿Cuántos L de agua contiene?

a) $Volumen = 36\pi \text{ m}^3$ de agua;

b) Contiene $36\,000\pi \approx 113\,040 \text{ L}$ de agua.

5 En el depósito de agua de la actividad anterior se quiere recubrir el exterior con una capa de material aislante, sin contar el fondo ni la tapa.

a) ¿Cuántos m^2 de lámina aislante se necesitan?

b) ¿Y si también se quiere recubrir la tapa?

a) $\text{Área lateral} = 24\pi \approx 75,36 \text{ m}^2$

b) $33\pi \approx 103,62 \text{ m}^2$

12.2 CONOS. ÁREA LATERAL, TOTAL Y VOLUMEN

ACTIVIDADES

1 Un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 cm y 6 cm gira alrededor del cateto mayor.

a) ¿Qué cuerpo genera?

b) Calcula el valor del radio, de la altura y de la generatriz del cuerpo generado. Haz un dibujo.

a) Cono.

b) Radio = 6 cm; altura = 8 cm; generatriz = 10 cm.

2 Un cono tiene 9 cm de radio y 12 cm de altura. Haz un dibujo de su desarrollo plano y calcula:

a) La generatriz del cono.

b) El radio del sector circular que resulta en el desarrollo plano y la longitud de su arco.

a) $\text{Generatriz del cono} = 15 \text{ cm}$

b) $\text{Radio del sector circular} = 15 \text{ cm}$

$\text{longitud del arco} = 18\pi = 56,52 \text{ cm}$.

3 El radio de la base de un cono vale 8 cm y la altura 12 cm. Calcula:

a) El área lateral.

b) El área total.

c) El volumen.

$\text{Generatriz} = \sqrt{208} \approx 14,42 \text{ cm}$

a) $\text{Área lateral} = 362,23 \text{ cm}^2$

b) $\text{Área total} = 563,19 \text{ cm}^2$

c) $\text{Volumen} = 256\pi = 803,84 \text{ cm}^3$

■ **4** La generatriz de un cono vale 15 m y su altura 12 m. Calcula:

a) El radio.

b) El área lateral.

c) El área total.

d) El volumen.

a) $\text{Radio} = 9 \text{ m}$

b) $\text{Área lateral} = 135\pi = 423,9 \text{ m}^2$

c) $\text{Área total} = 216\pi = 678,24 \text{ m}^2$

d) $\text{Volumen} = 324\pi = 1017,36 \text{ m}^3$

■ **5** Un embudo con forma de cono empleado en una obra tiene 4 m de diámetro de la base y 3 m de altura. Haz un dibujo y calcula:

a) ¿Cuántos m^3 de gravilla puede contener?

b) Si se desea pintar su parte externa, ¿cuántos m^2 se deben pintar?

$\text{Generatriz} = \sqrt{13} \approx 3,61 \text{ m}$

a) $\text{Volumen} = 4\pi = 12,56 \text{ m}^3$ de gravilla

b) $\text{Área lateral} = 22,67 \text{ m}^2$

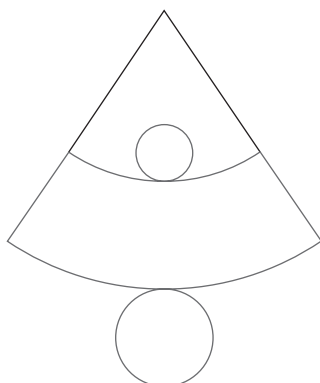
12.3 TRONCOS DE CONO Y OTROS CUERPOS DE REVOLUCIÓN

ACTIVIDADES

■ **1** Dibuja un tronco de cono. Señala en él el radio mayor, el radio menor, la altura y la generatriz.

Teoría.

■ **2** En un cono, el radio de la base mide 3 cm, la altura 4 cm y la generatriz 5 cm. Al cortarlo por un plano paralelo a la base resulta un tronco de cono y otro cono más pequeño. El radio del cono pequeño vale 0,75 cm, la altura 1 cm y la generatriz 1,25 cm. Fijate en el desarrollo plano del tronco de cono; es una figura plana que se llama trapecio circular (está señalado con color rojo).



Dibuja los dos conos y después, calcula y coloca estas medidas en el desarrollo plano:

a) Radio de la base menor del cono.

b) Radio de la base mayor del cono.

c) Arco menor del trapecio circular.

d) Arco mayor del trapecio circular.

e) Generatriz del tronco de cono.

a) $\text{Radio de la base menor del tronco de cono} = 0,75 \text{ cm}$

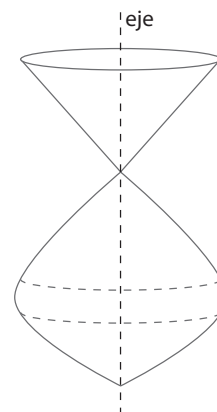
b) $\text{Radio de la base mayor} = 3 \text{ cm}$

c) $\text{Arco menor del trapecio circular} = 1,5\pi \text{ cm}$

d) $\text{Arco mayor} = 6\pi \text{ cm}$

e) $\text{Generatriz del tronco de cono} = 3,75 \text{ cm}$.

■ **3** Dibuja el cuerpo de revolución generado al girar esta figura plana alrededor del eje.



12.4 ESFERAS. ÁREA Y VOLUMEN. LA ESFERA TERRESTRE

ACTIVIDADES

■ **1** Calcula el área y el volumen de una esfera de radio 10 cm.

$$\text{Área} = 400\pi \text{ cm}^2; \text{Volumen} = \frac{4000\pi}{3} = 4186,67 \text{ cm}^3.$$

■ **2** Un globo esférico tiene 6 m de diámetro. Haz un dibujo y calcula:

a) ¿Cuántos m^3 de aire contiene?

b) ¿Cuántos m^2 de tela se han gastado para hacerlo?

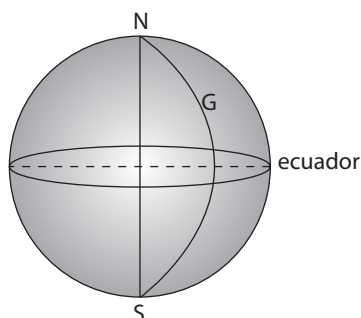
a) Contiene $36\pi \text{ m}^3$ de aire.

b) Se han gastado $36\pi \text{ m}^2$ de tela.

■ **3** Para construir una lámpara necesitamos un globo de vidrio transparente con muy poco espesor cuyo diámetro valga 40 cm. Si nos cobran 0,5 euros por cm^2 de vidrio, ¿cuánto debemos pagar?

$\text{Área} = 1600\pi = 5024 \text{ cm}^2$. Debemos pagar 2512 euros.

4 En esta esfera terrestre representada en la figura:



- Dibuja un paralelo en el hemisferio norte y otro en el hemisferio sur; un meridiano que esté al este del meridiano de Greenwich y otro que esté al oeste.
- Dibuja otra esfera terrestre con el eje norte sur, el ecuador y el meridiano cero. Después señala aproximadamente un punto que tenga latitud 70° norte y longitud 60° oeste.

Teoría.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Una tienda de campaña tiene forma cónica, de radio de la base 1 m y altura 2 m. Calcula el precio de la tela (sin contar la base) si cuesta 22 euros el m^2 .

Generatriz = $\sqrt{5} \approx 2,24$ m; Área lateral = $7,03$ m^2 de tela; precio = 154,66 euros.

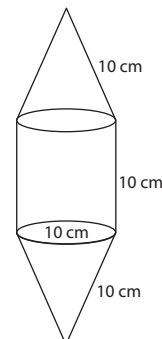
2 En un cilindro de radio 1 m y altura 2 m se introduce una esfera de 2 m de diámetro. Calcula el volumen del cilindro, el de la esfera y el del hueco que queda entre ellos. Haz un dibujo.

$$\text{Volumen del cilindro} = 2\pi \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4\pi}{3} \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen del hueco} = \frac{2\pi}{3} \text{ m}^3$$

3 El cuerpo de esta figura está formado por un cilindro rematado por dos conos iguales, uno en cada base.



Calcula:

- El volumen del cuerpo.
- El área exterior del cuerpo.

$$\text{a) Volumen del cilindro} = 250\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Altura del cono} = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ cm}$$

$$\text{Volumen de los dos conos} = 453,21 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen del cuerpo} = 1\,238,21 \text{ cm}^3$$

$$\text{b) Área lateral del cilindro} = 100\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral de los dos conos} = 100\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área exterior del cuerpo} = 200\pi \text{ cm}^2$$

4 El radio de la base de un cono mide 9 cm y la altura 12 cm. Hemos cortado el cono por un plano paralelo a la base a 4 cm del vértice. Utilizando la semejanza de triángulos, calcula el radio de la base del cono pequeño. Después, calcula el volumen del:

- Cono mayor.
- Cono menor.
- Tronco de cono.

$$\text{Radio de la base del cono pequeño} = 3 \text{ cm}$$

$$\text{a) Volumen cono mayor} = 324\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{b) Volumen cono menor} = 12\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{c) Volumen tronco de cono} = 312\pi \text{ cm}^3$$

5 En un cilindro de 20 cm de radio y 30 cm de altura que estaba lleno de agua hemos metido una pelota de 12 cm de radio. Calcula:

- El peso del agua que había en el cilindro.
- El peso del agua que ha desalojado la pelota.
- El peso del agua que aún queda en el cilindro.

$$\text{a) Volumen cilindro} = 12\pi \text{ dm}^3; \text{Peso del agua} = 12\pi \text{ kg}$$

$$\text{b) Volumen esfera} = 2,304\pi \text{ dm}^3; \text{Peso del agua} = 2,304\pi \text{ kg}$$

$$\text{c) Peso del agua que queda en el cilindro} = 9,696\pi \text{ kg}$$

¿RECUERDAS QUÉ ES...?

1 Dibuja una circunferencia y divídela en tres sectores iguales. ¿Cuántos grados mide el arco de cada sector? ¿Y cada ángulo central?

El arco de cada sector mide 120° , lo mismo que su ángulo central.

2 Hemos dividido una circunferencia en tres arcos. Uno de ellos mide $120^\circ 35'$ y otro mide $96^\circ 40'$. Calcula la medida del tercer arco.

$142^\circ 45'$

3 Divide 360° en partes directamente proporcionales a 1, 3 y 5. Después, dibuja en una circunferencia tres sectores circulares cuyos arcos midan los resultados que has obtenido.

40° , 120° y 200°

13.1 ESTUDIOS ESTADÍSTICOS. TABLAS DE FRECUENCIAS

ACTIVIDADES

1 Escribe con tus propias palabras:

- Qué es frecuencia absoluta de un valor de la variable.
- Qué es frecuencia relativa de un valor de la variable.
- Cómo se calcula el porcentaje de un valor de la variable.

Teoría.

2 En 2.º B de ESO de un centro escolar hay 24 estudiantes. Se les ha preguntado si en su casa hay algún horno microondas; 18 alumnos han contestado que sí y el resto que no.

- Indica cuál es la población y cuántos individuos tiene.
- ¿Cuál es la pregunta o variable estadística que se ha hecho?
- ¿Se trata de una variable estadística cuantitativa o cualitativa?
- Completa la tabla de frecuencias.
 - La población es el conjunto de los alumnos de 2.º B; tiene 24 individuos.
 - ¿Tienes horno microondas en casa?
 - Cualitativa.

<http://www.McGraw-Hill.es>

d)

Valores de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje %
Sí	18	0,75	75
No	6	0,25	25
Total:	24	1	100

3 En 2.º A de ESO de un centro escolar hay 25 alumnos. Se les ha preguntado cuántos aparatos de televisión hay en su casa, y se han recogido las siguientes respuestas: 1, 1, 2, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 3.

a) Indica cuál es la población y cuántos individuos tiene.

b) ¿Qué tipo de variable es?

c) Completa la tabla de frecuencias.

a) La población es el conjunto de los alumnos de 2.º A; tiene 25 individuos.

b) Cuantitativa.

c)

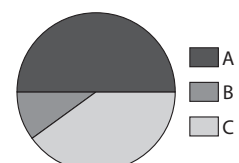
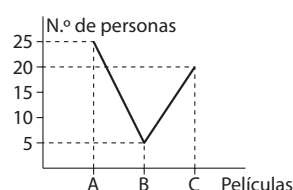
Valores de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje %
0	2	0,08	8
1	11	0,44	44
2	7	0,28	28
3	5	0,20	20
Total:	25	1	100

13.2 GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

ACTIVIDADES

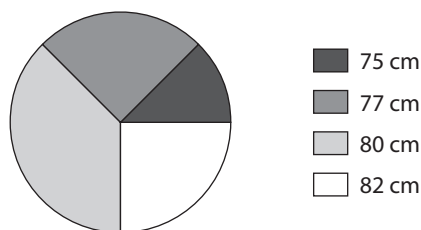
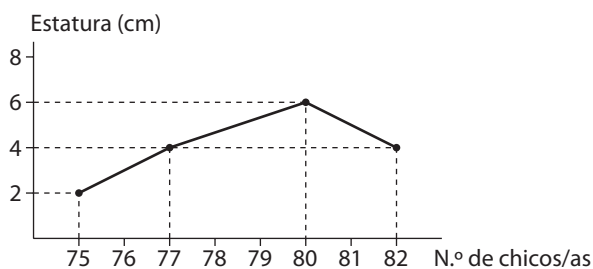
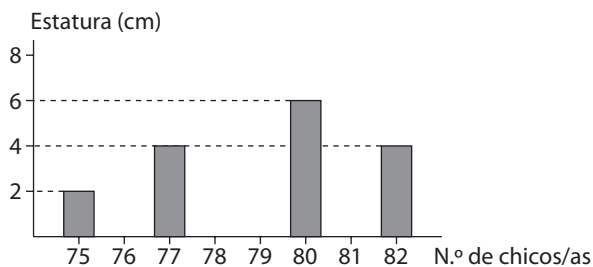
1 Un público de 50 personas ha visto tres películas, que denotamos por A, B y C. Se les ha preguntado cuál es su favorita. Las repuestas están recogidas en esta tabla. Completa la tabla y dibuja el diagrama de barras y el de sectores.

Valor (película)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%	Número grados
A	25	0,5	50	180
B	5	0,1	10	36
C	20	0,4	40	144
Total:	50	1	100	360



2 En un aula de preescolar hay 16 niños/as y sus estaturas (en cm) están recogidas en esta tabla de frecuencias. Completa la tabla y dibuja el diagrama de barras, el polígono de frecuencias y el diagrama de sectores.

Estatuta (cm)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%	Número grados
75	2	0,125	12,5	45
77	4	0,250	25	90
80	6	0,375	37,5	135
82	4	0,250	25	90
Total:	16	1	100	360



13.3 PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN

ACTIVIDADES

1 Escribe con tus propias palabras cómo se calcula la media aritmética de una serie de 12 datos.

Teoría.

2 ¿Qué nombre recibe el valor de la variable que se repite mayor número de veces en la serie de datos?

Moda.

3 Antonio ha sacado a lo largo del curso estas notas en Matemáticas: 4, 6, 5, 7, 6, 6, 4, 5, 6, 7. Calcula la media

aritmética de las notas. Halla también la moda y la mediana.

Media aritmética = 5,6; Moda = 6; Mediana = 6.

4 Lidia y Manuel están haciendo un estudio estadístico en un grupo de 15 amigos. La variable estadística que han elegido es: ¿cuántos viajes has realizado en avión a lo largo de tu vida? Las respuestas han sido: 3, 1, 2, 2, 4, 3, 1, 1, 2, 0, 3, 1, 1, 1, 2.

a) Calcula la media aritmética.

b) ¿Cuál es la moda?

c) Ordena los datos de menor a mayor y halla la mediana.

Media = 1,8; Mo = 1; Me = 2.

5 En una tertulia de 8 amigos han querido comparar sus sueldos mensuales, que son: 900 €, 1 050 €, 1 525 €, 715 €, 980 €, 1 100 €, 900 €, y 1 200 €. Calcula la media aritmética, la moda y la mediana.

Media = 1 046,25 euros; Mo = 900; Me = 1 015 euros.

13.4 PARÁMETROS DE DISPERSIÓN

ACTIVIDADES

1 Cinco hermanos han tenido respectivamente el siguiente número de hijos: 2, 4, 1, 3 y 2.

a) Comprueba que la media aritmética vale 2,4.

b) Halla el rango.

c) Calcula la desviación media. Recuerda que debes seguir estos pasos:

Datos: 1, 2, 2, 3, 4.

Cada dato menos la media:

Valores absolutos:

Suma de los valores absolutos:

$$DM = \frac{\text{Suma de los valores absolutos}}{5} =$$

Media = 2,4 hijos; rango = 3; DM = 0,88 hijos.

2 Para realizar un estudio estadístico cuatro amigos de segundo de ESO se han colocado durante seis domingos seguidos en un semáforo de su calle y han contado el número de bicicletas que pasaron entre las 10 y las 11 de la mañana. Han obtenido estos resultados: 20, 25, 17, 22, 20 y 19.

a) ¿Cuál es el valor del rango en esta serie de datos?

b) Halla la media aritmética.

c) Calcula la desviación media.

Rango = 8 bicicletas; Media = 20,5; DM = 2 bicicletas.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Ana y Jaime deben hacer un estudio estadístico. Eligen medir el retraso, respecto a su hora oficial de llegada, de un cierto autobús de largo recorrido. Durante 10 días consecutivos recogen los siguientes datos: 5, 0, 5, 10, 5, 10, 15, 10, 5 y 15 minutos de retraso (observa que ningún día llegó antes de la hora).

a) Calcula la media aritmética de la serie de datos.

b) Halla la moda y la mediana.

c) Calcula el rango y la desviación media.

Media = 8 minutos; Mo = 5; Me = 7,5; rango = 15; DM = 4 minutos.

2 Con los datos de la actividad anterior realiza estas tareas:

a) Forma la tabla de frecuencias con las columnas de la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa, el porcentaje y el número de grados.

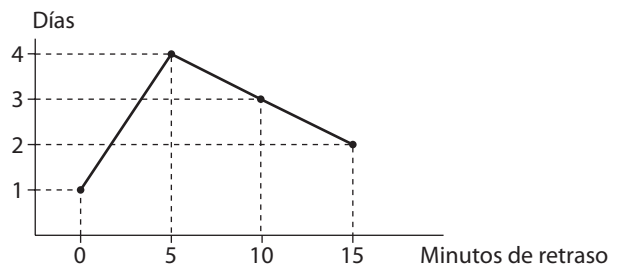
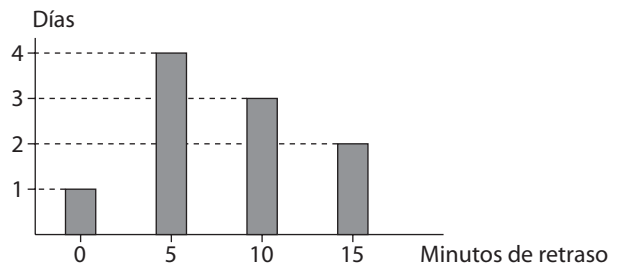
b) Dibuja el diagrama de barras y el polígono de frecuencias.

c) Dibuja el diagrama de sectores.

a)

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%	Número grados
0	1	0,1	10	36
5	4	0,4	40	144
10	3	0,3	30	108
15	2	0,2	20	72
Total:	10	1	100	360

b)



c)

