

Autoevaluación

Página 242

1 Dados los vectores $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y $\vec{v}(0, -2)$, calcula:

- a) $|\vec{u}|$ b) $-2\vec{u} + 3\vec{v}$ c) $2\vec{u} \cdot (-2\vec{v})$

$$\vec{u}\left(\frac{1}{2}, -1\right) \quad \vec{v}(0, -2)$$

$$a) |\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$b) -2\vec{u} + 3\vec{v} = -2\left(\frac{1}{2}, -1\right) + 3(0, -2) = (-1, 2) + (0, -6) = (-1, -4)$$

$$c) 2\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = 2 \cdot (-2) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = -4\left(\frac{1}{2} \cdot 0 + (-1) \cdot (-2)\right) = -8$$

2 Determina el valor de k para que los vectores $\vec{a}(1, 3)$ y $\vec{b}(6, k)$ sean ortogonales.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3) \cdot (6, k) = 6 + 3k = 0 \rightarrow k = -2$$

3 Dados los vectores $\vec{u}(-1, 0)$ y $\vec{v}(1, 2)$:

a) Calcula $\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v}$.

b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Da las coordenadas del vector $\vec{w}(4, 6)$ en la base $B(\vec{u}, \vec{v})$.

$$a) \text{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = |\vec{v}| \cos \alpha = \frac{|\vec{v}| \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$b) \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 116^\circ 33' 54''$$

$$c) \vec{w} = k\vec{u} + s\vec{v} \rightarrow (4, 6) = k(-1, 0) + s(1, 2) = (-k + s, 2s) \rightarrow \begin{cases} -k + s = 4 \\ 2s = 6 \end{cases} \rightarrow s = 3, k = -1$$

$$\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$$

4 Determina el valor de y para que los puntos $A(0, 1)$, $B(-1, 4)$ y $C(3, y)$ estén alineados.

Para que A , B y C estén alineados, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ deben tener la misma dirección, es decir, deben ser proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-1, 3) \\ \overrightarrow{BC}(4, y-4) \end{array} \right\} \frac{y-4}{3} = \frac{4}{-1} \rightarrow 4-y = 12 \rightarrow y = -8$$

5 Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, donde $A(2, 2)$, $B(3, 1)$ y $C(4, 2)$.

$$D = (x, y)$$

El vector $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ en un paralelogramo.

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1); \overrightarrow{DC} = (4-x, 2-y)$$

$$\begin{cases} 1 = 4-x \rightarrow x = 3 \\ -1 = 2-y \rightarrow y = 3 \end{cases} \rightarrow D = (3, 3)$$

- 6** Halla en las formas paramétrica e implícita la ecuación de la recta que pasa por $P(0, 3)$ y es perpendicular a la recta $s: \frac{x+1}{2} = 1 - y$.

$$s: \frac{x+1}{2} = 1 - y \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1}. \text{ Vector dirección de } s: \vec{v}(2, -1)$$

Un vector perpendicular a $\vec{v}$ es $\vec{u}(1, 2)$.

Buscamos una recta r que pasa por $P(0, 3)$ y tiene como vector dirección a $\vec{u}(1, 2)$:

— Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = t \\ t = \frac{y-3}{2} \end{array} \right\} x = \frac{y-3}{2} \rightarrow 2x = y - 3 \rightarrow 2x - y + 3 = 0$$

— Ecuación implícita: $2x - y + 3 = 0$

- 7** Se consideran las rectas $r: 2x + y - 1 = 0$ y $s: kx - y + 5 = 0$. Determina k en cada uno de los siguientes casos:

a) r y s son paralelas.

b) r y s se cortan en el punto $P(2, -3)$.

c) r y s son perpendiculares.

a) $r: 2x + y - 1 = 0$

$s: kx - y + 5 = 0$

r y s son paralelas si sus vectores de dirección $\vec{u}(2, 1)$ y $\vec{v}(k, -1)$, lo son:

$$\vec{v} = t\vec{u} \rightarrow (k, -1) = t(2, 1) \rightarrow \left. \begin{array}{l} k = 2t \\ -1 = t \end{array} \right\} t = -1, k = -2$$

b) Comprobamos que $P(2, -3)$ es un punto de $r \rightarrow 2 \cdot 2 - 3 - 1 = 0$

Buscamos ahora el valor de k para el que P también pertenece a s :

$$k \cdot 2 - (-3) + 5 = 0 \rightarrow 2k + 8 = 0 \rightarrow k = -4$$

c) Vectores de dirección de las rectas: $\vec{d}_r = (-1, 2)$, $\vec{d}_s = (1, k)$

Para que sean perpendiculares, el producto escalar de sus vectores de dirección tiene que ser cero.

$$\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = (-1, 2) \cdot (1, k) = -1 + 2k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

- 8** Halla la distancia entre las rectas r y s .

$$r: y = x + 2 \quad s: \begin{cases} x = t \\ y = t - 2 \end{cases}$$

Vectores de dirección de las rectas: $\vec{d}_r = (1, 1)$, $\vec{d}_s = (1, 1)$, luego son paralelas.

Sea $P \in s$, por ejemplo, $P = (0, -2)$.

$$r: y = x + 2 \rightarrow x - y + 2 = 0$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(P, r) = \left| \frac{-(-2) + 2}{\sqrt{2}} \right| = 2\sqrt{2}$$

- 9** Obtén la expresión analítica del haz de rectas al que pertenecen $r: 2x + y - 3 = 0$ y $s: x + y - 2 = 0$. Halla la recta de ese haz que pasa por $P(2, 3)$.

Expresión analítica del haz: $k(2x + y - 3) + t(x + y - 2) = 0$

Como la recta que buscamos ha de pasar por el punto $(2, 3)$,

$$k(2 \cdot 2 + 3 - 3) + t(2 + 3 - 2) = 0 \rightarrow 4k + 3t = 0$$

Cualquier par de valores de k y t que cumplan la igualdad anterior dan lugar a la misma recta.

Tomamos, por ejemplo, $k = 3$ y $t = -4$. Así:

$$3(2x + y - 3) - 4(x + y - 2) = 0 \rightarrow 6x + 3y - 9 - 4x - 4y + 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x - y - 1 = 0 \text{ es la recta del haz que pasa por el punto } (2, 3).$$

- 10** Solo una de estas ecuaciones corresponde a una circunferencia. Justifica cuál es y determina su centro y su radio:

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 2xy + 6y + 6 = 0$$

$$C_3: x^2 + y^2 - 3x + 5x + 18 = 0$$

$$C_1: r = \sqrt{1 + 9 - 6} = 2 \rightarrow \text{Circunferencia de centro } O = (-1, 3) \text{ y radio } r = 2.$$

$$C_2: \text{No es una circunferencia porque tiene término en } xy.$$

$$C_3: r^2 = 4 - 18 < 0 \rightarrow \text{No es circunferencia porque } r^2 < 0.$$

- 11** Escribe la ecuación de una elipse de centro $(0, 0)$ y focos en el eje de abscisas, sabiendo que su excentricidad es igual a $4/5$ y que uno de sus focos es $F(8, 0)$.

$$\text{La ecuación debe ser de la forma } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \bullet F(8, 0) = (c, 0) \rightarrow c = 8$$

$$exc = \frac{4}{5} = \frac{c}{a} \quad \bullet exc = \frac{4}{5} = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{8}{a} = \frac{4}{5} \rightarrow a = 10$$

$$F(8, 0) = (c, 0) \quad \bullet a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$$

$$\text{Por tanto, la ecuación buscada es: } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

- 12** Sin resolver el sistema formado por sus ecuaciones, estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $C: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ y la recta $r: 3x - 4y - 1 = 0$.

Calculamos la distancia de la recta al centro de la circunferencia, $C(1, -2)$:

$$\text{dist}(r, C) = \frac{3 \cdot 1 - 4(-2) - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Esta distancia coincide con el radio de la circunferencia. Por tanto, son tangentes.

- 13** Determina las coordenadas de un vector unitario $\vec{a}(x, y)$ sabiendo que forma un ángulo de 60° con el vector $\vec{u}(2, 0)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 60^\circ \rightarrow 2x = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$|\vec{a}| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + y^2 = 1 \rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Existen, por tanto, dos soluciones: } \vec{a}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } \vec{a}\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- 14** Sean $\vec{a}(-5, 5)$ y $\vec{b}(-1, 3)$. Expresa $\vec{a}$ como suma de dos vectores, uno con la misma dirección que $\vec{b}$ y otro perpendicular a $\vec{b}$.

Los vectores paralelos a $\vec{b}$ son de la forma $k(-1, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.

Los vectores perpendiculares a $\vec{b}$ son de la forma $s(3, 1)$, $s \in \mathbb{R}$.

$$\vec{a} = (-5, 5) = k(-1, 3) + s(3, 1) \rightarrow \begin{cases} -k + 3s = -5 \\ 3k + s = 5 \end{cases} \rightarrow s = -1, k = 2$$

Por tanto, $\vec{a} = (-2, 6) + (-3, -1)$

- 15** Halla el simétrico del punto $A(0, 0)$ respecto a la recta $r: x + y - 2 = 0$.

- Buscamos la ecuación de la recta s que pasa por A y es perpendicular a r :

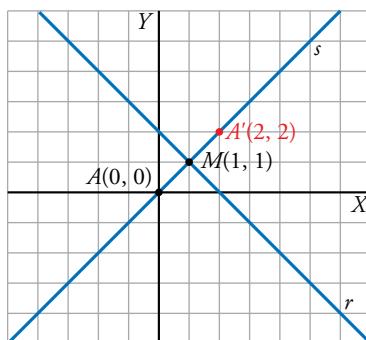
$$s: x - y = 0$$

- Punto de intersección de r y s :

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2 \rightarrow x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow M(1, 1)$$

- El punto $A'(x, y)$ que buscamos es el simétrico de A respecto a M :

$$\left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+0}{2} \right) = (1, 1) \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow A'(2, 2)$$



- 16** Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $r: 2x - y + 1 = 0$ y $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2}$ y forma un ángulo de 45° con la recta r .

Hallamos el punto de intersección de r y s :

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} \end{cases} \rightarrow \text{Resolviendo el sistema obtenemos el punto } P(1, 3).$$

La pendiente de r es 2.

$$1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{2-m}{1+2m} \right| \begin{cases} 2-m = 1+2m \rightarrow m = \frac{1}{3} \\ 2-m = -1-2m \rightarrow m = -3 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$$t: y - 3 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$t': y - 3 = -3(x - 1)$$

17 Halla los puntos de la recta $y = 0$ que distan 3 unidades de la recta $3x - 4y = 0$.

Los puntos de la recta $y = 0$ son de la forma $P(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$r: 3x - 4y = 0$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|3x - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x|}{5} = 3$$

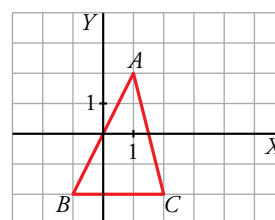
$$|3x| = 15 \begin{cases} 3x = 15 \rightarrow x = 5 \\ 3x = -15 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

Hay dos puntos que cumplen la condición pedida: $P(5, 0)$ y $P'(-5, 0)$.

18 En el triángulo ABC de la figura, calcula:

a) El ortocentro.

b) El área del triángulo.



a) Ortocentro: $R = h_A \cap h_B \cap h_C$, donde h_A , h_B y h_C son las alturas del triángulo desde A , B y C , respectivamente.

$$A(1, 2) \quad B(-1, -2) \quad C(2, -2)$$

Calculamos las ecuaciones de dos de las alturas:

$$h_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} = (3, 0) \rightarrow \vec{a} = (0, 3) \\ A(1, 2) \in h_A \end{cases} \rightarrow h_A: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases} \rightarrow h_A: x = 1$$

$$h_B \begin{cases} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC} = (1, -4) \rightarrow \vec{b} = (4, 1) \\ B(-1, -2) \in h_B \end{cases} \rightarrow h_B: \begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = t - 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{x+1}{4} \\ t &= y+2 \end{aligned} \right\} \frac{x+1}{4} = y+2 \rightarrow x+1 = 4y+8 \rightarrow x-4y-7 = 0$$

$$h_B: x - 4y - 7 = 0$$

Calculamos ahora $h_A \cap h_B$:

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 \\ x - 4y - 7 &= 0 \end{aligned} \right\} 1 - 4y - 7 = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

$$R = h_A \cap h_B = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$$

b) Área del triángulo $ABC = \frac{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AM}|}{2}$, donde $M = h_A \cap r_{BC}$ y r_{BC} es la recta que contiene al lado BC .

$$\left. \begin{aligned} h_A: x &= 1 \\ r_{BC}: y &= -2 \end{aligned} \right\} h_A \cap r_{BC} = (1, -2) = M$$

$$\overrightarrow{BC} = (3, 0) \rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3$$

$$\overrightarrow{AM} = (0, -4) \rightarrow |\overrightarrow{AM}| = 4$$

$$\text{Área del triángulo } ABC = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ u}^2$$

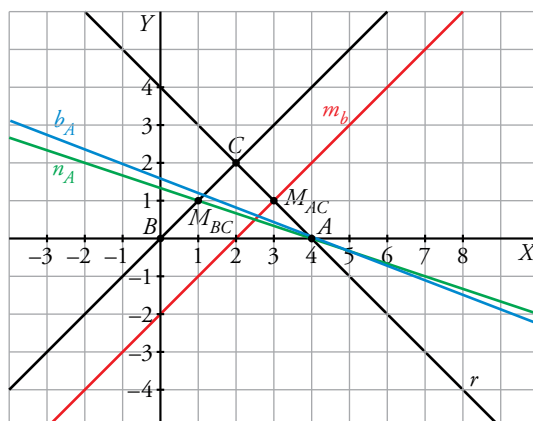
19 Considera el triángulo formado por la bisectriz del primer cuadrante, b , el eje de abscisas y la recta $r: y = -x + 4$. Obtén:

- La mediatriz del lado contenido en la recta r .
- La bisectriz del ángulo que forman r y el eje OX .
- La mediana relativa al lado contenido en b .

Lado AB , eje de abscisas: $y = 0$

Lado BC , bisectriz del primer cuadrante: $y = x$

Lado AC , recta $r: y = -x + 4$



Vértices:

$$A \rightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 4, y = 0 \rightarrow A = (4, 0)$$

$$B \rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 0 \rightarrow B = (0, 0)$$

$$C \rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x + 4 \end{cases} \rightarrow x = 2, y = 2 \rightarrow C = (2, 2)$$

- a) La mediatriz pasa por M_{AC} y es perpendicular a $\overrightarrow{AC} = (-2, 2)$

$$M_{AC} = (3, 1)$$

$$\text{Luego } m_b: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2}$$

- b) Sea $X = (x, y)$ un punto genérico de la bisectriz, entonces cumple:

$$\frac{|x+y-4|}{\sqrt{2}} = |y| \rightarrow \begin{cases} \frac{x+y-4}{\sqrt{2}} = y \rightarrow x + (1-\sqrt{2})y - 4 = 0 \\ \frac{x+y-4}{\sqrt{2}} = -y \rightarrow x + (1+\sqrt{2})y - 4 = 0 \end{cases}$$

La bisectriz del ángulo A es $b_A: x + (1 + \sqrt{2})y - 4 = 0$ porque debe tener pendiente negativa como se observa en el dibujo.

- c) La mediana pasa por A y M_{BC} .

$$M_{BC} = (1, 1)$$

$$\overrightarrow{M_{BC}A} = (3, -1)$$

$$\text{Luego } n_A: \frac{x-4}{3} = \frac{y}{-1}$$

20 Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:

a) $2y^2 - 12x = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 = 16$

c) $25x^2 + 4y^2 = 100$

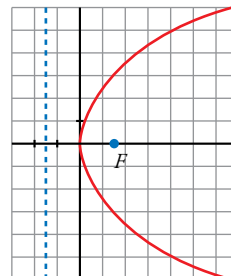
d) $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

a) $2y^2 - 12x = 0 \rightarrow y^2 = 6x$

Es un parábola.

Foco $\rightarrow F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$; recta directriz $\rightarrow r: x = -\frac{3}{2}$

Vértice $\rightarrow (0, 0)$

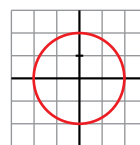


b) $4x^2 + 4y^2 = 16 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$

Es una circunferencia.

Centro $\rightarrow (0, 0)$

Radio $\rightarrow r = 2$



c) $25x^2 + 4y^2 = 100 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

Es una elipse con los focos en el eje Y.

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

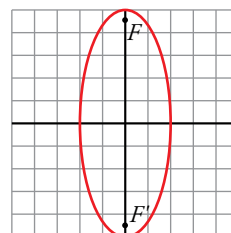
$a = 5$; $b = 2$; $c = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

Focos: $F(0, \sqrt{21})$ y $F'(0, -\sqrt{21})$

Semieje mayor: 5

Semieje menor: 2

Excentricidad: $exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0,92$



d) $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

Es una hipérbola.

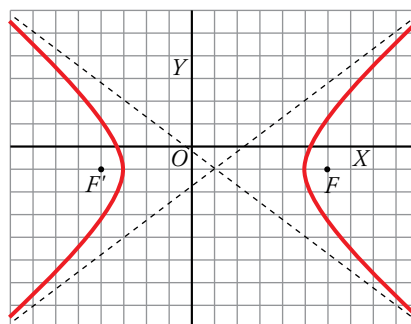
Centro: $(1, -1)$

$a = 4$; $b = 3$; $c^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow c = 5$

$exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1,25$

Asíntotas: $\begin{cases} r: y = \frac{3}{4}(x-1) - 1 \\ r': y = -\frac{3}{4}(x-1) - 1 \end{cases}$

Focos: $F(6, -1)$ y $F'(-4, -1)$



21 Halla la ecuación de la parábola de vértice $V(-1, -1)$ y directriz $r: x = -3$.

Puesto que el vértice tiene que equidistar del foco y de la directriz, ha de ser $F(1, -1)$.

Los puntos $P(x, y)$ de la parábola han de cumplir:

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = |x+3|$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$(y+1)^2 + x^2 + 1 - 2x = x^2 + 6x + 9 \rightarrow (y+1)^2 = 8x + 8 \rightarrow (y+1)^2 = 8(x+1)$$

La ecuación de la parábola es $(y+1)^2 = 8(x+1)$.

22 Dado un segmento AB de longitud 4, halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano que verifican:

$$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$$

* Toma como eje X la recta que contiene al segmento, y como eje Y la mediatriz de AB .

Tomamos como eje X la recta que contiene al segmento AB , y como eje Y , la mediatriz de AB .

En este caso, será $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico del plano que verifica:

$$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$$

$$2\left(\sqrt{(x+2)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-2)^2 + y^2}\right)^2 = 18$$

$$2(x^2 + 4x + 4 + y^2) + (x^2 - 4x + 4 + y^2) = 18$$

$$2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 18$$

$$3x^2 + 3y^2 + 4x + 12 = 18$$

La ecuación pedida es: $3x^2 + 3y^2 + 4x - 6 = 0$.

