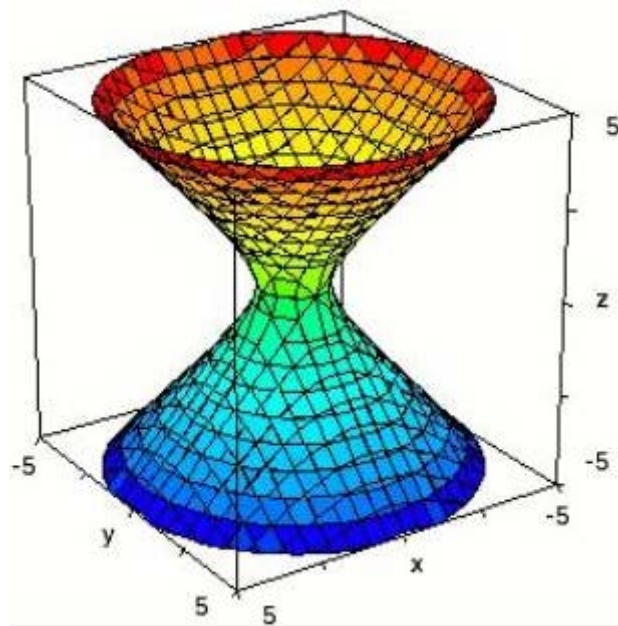


MATEMÁTICAS I

1º Bachillerato CC.NN.



Alumno: _____ 1º Bach. _____

ÍNDICE

1. REPASO N° REAL, POLINOMIOS, ECUACIONES e INECUACIONES	
Ejercicios propuestos.....	1
Binomio de Newton (Teoría y ejercicios)	21
2. TRIGONOMETRÍA	
Repaso de Trigonometría elemental.....	25
Ampliación de las razones trigonométricas a cualquier cuadrante.....	32
Relaciones entre las razones de ciertos ángulos.....	34
Resolución de triángulos oblicuángulos.....	40
Área del triángulo.....	43
Ejercicios propuestos	45
3. VECTORES	
Definiciones.....	57
Operaciones.....	59
Módulo de un vector.....	64
Producto escalar.....	65
Ejercicios propuestos	68
Ejercicios resueltos... ..	78
4. RECTAS	
Ecuaciones de la recta.....	83
Posición relativa de dos rectas.....	87
Puntos y rectas notables de un triángulo.....	89
Ángulo de dos rectas.....	91
Distancia punto-recta.....	93
Área del triángulo.....	94
Ejercicios propuestos	95
Ejercicios resueltos... ..	107
5. COMPLEJOS	
Necesidad de los números complejos.....	124
Operaciones con complejos en forma binómica.....	126
Representación gráfica de complejos.....	128
Operaciones en forma polar.....	131
Ejercicios propuestos.....	135
Ejercicios resueltos... ..	147

6. FUNCIONES

Concepto de función. Definiciones.....	153
Gráfica de una función.....	154
Cálculo del dominio de las funciones más habituales.....	155
Propiedades que se deducen de la gráfica de una función.....	156
Transformaciones de funciones.....	160
Algunos casos particulares de funciones.....	161
Composición de funciones. Función inversa.....	163
Cónicas.....	164
Ejercicios propuestos	167
Ejercicios resueltos... ..	177

7. LOGARITMOS

Función exponencial de base a	184
Función logarítmica de base a	186
Cálculo logarítmico.....	189
Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.....	191
Cambio de base.....	193
Ejercicios propuestos	194
Ejercicios resueltos... ..	203

8. LÍMITES y CONTINUIDAD

Idea intuitiva de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	212
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Asíntota vertical.....	214
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. Asíntota horizontal.....	215
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Ramas infinitas.....	216
Propiedades de los límites.....	216
Límites infinitos e indeterminaciones.....	217
Cálculo de límites indeterminados.....	218
Continuidad.....	221
Ejercicios propuestos.....	225

9. DERIVADAS

Derivada de una función en un punto.....	233
Función derivada $f'(x)$	234
Derivadas de las funciones elementales.....	235
Recta tangente a una curva en un punto.....	240
Intervalos de crecimiento y decrecimiento. M y m	241
Representación gráfica de funciones.....	246

Ejercicios propuestos	249
73 derivadas (con soluciones).....	253
82 derivadas (con soluciones).....	255

10. ESTADÍSTICA UNIDIMENSIONAL

Introducción. Definiciones.....	258
Frecuencias y tablas.....	259
Representaciones gráficas elementales.....	261
Medidas de tendencia central.....	265
Medidas de dispersión.....	269
Ejercicios propuestos	273

11. ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL

Introducción. Definiciones.....	277
Frecuencias y gráficos.....	278
Nube de puntos.....	281
Ajuste de una nube de puntos: recta de regresión.....	282
Correlación.....	286
Ejercicios propuestos	289

TABLAS

Fórmulas de Trigonometría.....	294
Fórmulas de vectores.....	296
Resumen de rectas.....	297
Fórmulas de Complejos.....	298
Transformaciones de funciones.....	299
Gráficas más representativas.....	300
Fórmulas de logaritmos.....	302
Fórmulas de Estadística.....	303
Tabla de derivadas elementales.....	304
Fórmulas de derivabilidad.....	305
Símbolos matemáticos.....	306



97 ejercicios de repaso de NÚMERO REAL, POLINOMIOS, ECUACIONES e INECUACIONES

Repaso número real. Intervalos:

1. Separar los siguientes números en racionales o irracionales, indicando, de la forma más sencilla posible, el porqué:

$$\frac{1}{8} \quad \frac{\pi}{3} \quad \sqrt{5} \quad 2,6 \quad 0 \quad -3 \quad -\frac{25}{3} \quad \sqrt[3]{13} \quad 0,1 \quad 6,\hat{4} \quad 534 \quad 1,414213562\dots$$

(Soluc: $\mathbb{Q}; \mathbb{I}; \mathbb{I}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q}; \mathbb{I}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q}; \mathbb{I}$)

2. a) Representar sobre la recta real (no necesariamente todos en la misma recta) los siguientes racionales:

$$\frac{3}{2} \quad -3 \quad 0,\hat{6} \quad \frac{5}{6} \quad -\frac{3}{4} \quad \frac{11}{5} \quad 2,25 \quad \frac{19}{6} \quad 3,\hat{9}$$

b) A la vista de lo anterior, ordenarlos de menor a mayor.

- c) Construir $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ y $\sqrt{10}$ sobre la recta real (no necesariamente sobre la misma), mediante regla y compás, y la aplicación del teorema de Pitágoras.

3. Completar (en este cuaderno):

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
1		$[-1,3]$	
2			
3			
4		$[-2,1)$	
5			$\{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 5\}$
6			
7			$\{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$
8		$(0,\infty)$	
9			
10		$(-1,5)$	
11			$\{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
12		$[2/3, \infty)$	
13			$\{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 2\}$
14			$\{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$
15			$\{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$
16			
17		$[-1, 1]$	
18			$\{x \in \mathbb{R} / x < -1\}$
19			
20		$(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$	
21		$(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$	
22			$\{x \in \mathbb{R} / x \leq 5\}$
23		$[-2, 2]$	
24			

Repaso fracciones, potencias y raíces:

4. Operar, simplificando en todo momento:

$$\frac{5}{4} - \frac{3}{5} : \left[2 + \frac{3}{5} \left(\frac{6}{9} : \frac{3}{4} \right) \right]$$

$$\frac{5}{4} : \frac{3}{5} \left(2 + \frac{3}{5} : \frac{6}{9} \right) - \frac{3}{4}$$

(Sol: 462/2413)

5. a) Completar (en este cuaderno):

$a^m \cdot a^n =$

$\frac{a^m}{a^n} =$

$(a^m)^n =$

$(a \cdot b)^n =$

$\left(\frac{a}{b} \right)^n =$

$a^0 =$

$a^{-n} =$

$\left(\frac{a}{b} \right)^{-n} =$

$1^n =$

$(-1)^{\text{par}} =$

$(-1)^{\text{impar}} =$

$(\text{base negativa})^{\text{par}} =$

$(\text{base negativa})^{\text{impar}} =$

Añadir estas fórmulas al formulario matemático de este curso.

b) Utilizando las propiedades anteriores, simplificar la siguiente expresión (en este cuaderno):

$$\frac{(2^0 \cdot 2^{-1} \cdot 2^3)^3}{\left[\frac{(1/3)^{-2}}{3} + 1\right]^3} =$$

(Sol: 1)

6. a) Completar (en este cuaderno):

Definición de raíz n-ésima	$\sqrt[n]{a}=x \Leftrightarrow$
Casos particulares de simplificación	$\sqrt[n]{x^n} =$
	$(\sqrt[n]{x})^n =$
Equivalencia con una potencia de exponente fraccionario	$\sqrt[n]{x^m} =$
Simplificación de radicales/índice común	$\sqrt[n \cdot p]{x^{m \cdot p}} =$
Producto de raíces del mismo índice	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} =$
Cociente de raíces del mismo índice	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} =$
Potencia de una raíz	$(\sqrt[n]{a})^m =$
Raíz de una raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} =$
Introducir/Extraer factores	$x \cdot \sqrt[n]{a} =$

Añadir estas fórmulas al formulario matemático de este curso.

b) Utilizando las propiedades anteriores, simplificar la siguiente expresión (en este cuaderno):

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot (\sqrt{a^3})^3}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a^3}} =$$

(Sol: $\sqrt[3]{a^{13}}$)

7. a) Extraer factores y simplificar (en este cuaderno):

$$5 \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{\frac{4}{81}} =$$

Sol: $\frac{5}{3} \sqrt[3]{2}$

b) Sumar, reduciendo previamente a radicales semejantes:

$$5\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{27} - 4\sqrt{3} - \sqrt{300}$$

Sol: $-\frac{17}{2}\sqrt{3}$

c) Racionalizar y simplificar (en este cuaderno, si hay espacio):

$$\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{125}} =$$

Sol: $\frac{8\sqrt{5}}{25}$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{1296}} =$$

Sol: $\frac{\sqrt[3]{36}}{36}$

$$\frac{17-9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5} - \frac{9}{\sqrt{3}} =$$

(Sol: 2)

Notación científica:

8. Pasar a notación científica los siguientes números (en este cuaderno):

a) 300.000.000=

b) 456=

c) 0,5=

d) 0,0000000065=

e) -18.400.000.000=

f) 0,000001=

g) -78986,34=

h) 0,0000093=

i) 1.230.000.000.000=

j) 14 billones €=

k) 14 billones \$=

l) 14 billones £=

m) 150 millones \$=

n) 150 millones €=

o) 1,5 millardos=

p) 7,3=

q) 73=

r) -0,00010001=

s) $14 \cdot 10^3 =$

t) 10=

u) 1=

v) 0,011001=

w) 16.730.000=

x) -345,45

RECORDAR:

CANTIDAD	DEFINICIÓN	EQUIVALENCIA	ÁMBITO
1 millardo	mil millones	10^9	España, Francia, Alemania...
1 billón	un millón de millones	10^{12}	
	mil millones	10^9	EEUU y Reino Unido
1 trillón	un millón de billones	10^{18}	España, Francia, Alemania...
	un millón de millones	10^{12}	EEUU y Reino Unido
etc.			



9. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas:

- Sin calculadora, aplicando sólo las propiedades de las potencias.
- Utilizando la calculadora científica (para comprobar el resultado obtenido anteriormente).

a) $2,5 \cdot 10^7 + 3,6 \cdot 10^7 =$

b) $4,6 \cdot 10^{-8} + 5,4 \cdot 10^{-8} =$

c) $1,5 \cdot 10^6 + 2,4 \cdot 10^5 =$

d) $2,3 \cdot 10^9 + 3,25 \cdot 10^{12} =$

e) $3,2 \cdot 10^8 - 1,1 \cdot 10^8 =$

f) $7,28 \cdot 10^3 - 5,12 \cdot 10^{-3} =$

g) $4,25 \cdot 10^7 - 2,14 \cdot 10^5 =$

h) $(2 \cdot 10^9) \cdot (3,5 \cdot 10^7) =$

i) $\frac{8,4 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^7} =$

j) $\frac{(3,2 \cdot 10^{-3})(4 \cdot 10^5)}{2 \cdot 10^{-8}} =$

k) $(2 \cdot 10^5)^2 =$

RECORDAR: En las calculadoras científicas la tecla $\boxed{\text{EXP}}$ sirve para expresar en cualquier momento un número en notación científica. Pero es más recomendable, mediante la tecla $\boxed{\text{MODE}}$, poner la calculadora en modo SCI (scientific), con lo cual trabajará siempre en notación científica. Además, la calculadora suele pedir el número de cifras significativas con las que queremos trabajar.

- 10.** La estrella más cercana a nuestro sistema solar es α -Centauri, que está a una distancia de tan sólo 4,3 años luz. Expresar, en km, esta distancia en **notación científica**. (Datos: velocidad de la luz: 300 000 km/s; 1 año $\cong$ 365,25 días) ¿Cuántos años tardaría en llegar una sonda espacial viajando a 10 km/s?
(Sol: $4,071 \cdot 10^{13}$ km; $\cong 128\,907$ años)

Repaso polinomios y fracciones algebraicas:

11. Dados $P(x) = 4x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1$ y $Q(x) = 4x^3 - 4x^2 + 2x$, se pide:

a) Extraer el máximo factor común de $Q(x)$

b) $P(x) - 2x \cdot Q(x)$

(Sol: $4x^5 - 16x^4 + 10x^3 - 2x^2 + 1$)

c) $Q(x) \cdot Q(x)$

(Sol: $16x^6 - 32x^5 + 32x^4 - 16x^3 + 4x^2$)

d) $P(x) : Q(x)$, y comprobarlo.

(Sol: $C(x) = x^2 - x - 1$; $R(x) = 2x + 1$)

12. Simplificar: $\frac{x^4 - 5x^2 - 36}{x^2 - 9}$

(Sol: $x^2 + 4$)

13. Operar y simplificar: a) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} - \frac{12}{x^2-4}$

(Sol: $\frac{2x+3}{x+2}$)

b) $(a^2 + x^2 + a\sqrt{2}x)(a^2 + x^2 - a\sqrt{2}x)$

(Sol: $x^4 + a^4$)

Repaso ecuaciones, sistemas e inecuaciones:

14. Resolver (se recomienda hacer también la comprobación):

a) $3\left(\frac{11x}{6} - x\right) - 4 = 2x - 3\left(1 - \frac{x}{6}\right)$

[Sol: $\exists$ soluc.]

b) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{20x+7}{9} - \frac{4x+y}{2} = 2 \\ \frac{7x+1}{4} - \frac{2x-2y}{6} = x \end{array} \right.$ (POR REDUCCIÓN)

(Sol: $x=1$, $y=-2$)

c) $\frac{(2x^2+3)(2x^2-3)}{2} - \frac{(2x-3)^2}{3} = 4x - \frac{41}{6}$

(Sol: $x=\pm 1$)

d) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$

(Sol: $x=114$)

e) $\frac{x-2}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-3x+2} = \frac{x-1}{x-2}$

(Sol: $x=-3$)

f) $\left\{ \begin{array}{l} x+y=1 \\ x^2-2x+3y=-1 \end{array} \right.$

(Sol: $x_1=4$, $y_1=-3$; $x_2=1$, $y_2=0$)

g) $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{5x+6}{6} < \frac{(x+3)(x-3)}{3} + 6$

[Sol: $x \in (0, 7)$]

h)
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5-3x}{4} - 3(x+4) \leq \frac{3(x+2)}{2} + 2 \\ \frac{2(2x+1)-(x-1)}{3} - \frac{2x+1}{5} < 2 \end{array} \right\}$$

[Sol: $x \in [-3, 2]$]

i)
$$\frac{x+3}{x-7} \leq \frac{1}{2}$$

[Sol: $x \in [-13, 7]$]

j)
$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{7}$$

[Sol: $x = (14/9)^3$]

k)
$$k^2 - 6 = \frac{1}{4}$$

(Sol: $k = \pm 5/2$)

l)
$$x^2 - 6x + 3 - a = 0$$

(Sol: $x = 3 \pm \sqrt{6+a}$)

m)
$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 9 \\ 2x - y + z = -3 \\ -3x + y - 2z = 4 \end{array} \right\}$$

(Sol: $x=1, y=3, z=-2$)

Miscelánea (I):

15. Indicar cuál es el menor conjunto numérico al que pertenecen los siguientes números ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$); en caso de ser $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$, razonar el porqué:

$$\frac{\pi}{2} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{4} \quad 0,0015 \quad -10 \quad \frac{5}{6} \quad 2,\hat{3} \quad 2,020020002\dots$$

(Soluc: $\mathbb{I}; \mathbb{I}; \mathbb{N}; \mathbb{Q}; \mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q}; \mathbb{I}$)

16. Representar en la recta real los siguientes intervalos y definirlos empleando desigualdades:

a) $[2, 4]$

d) $(-1, 3)$

g) $(-\infty, 3]$

j) $(-\infty, -2]$

b) $(1, 6)$

e) $(-2, 2)$

h) $[-3, 3]$

c) $[1, 5)$

f) $(0, \infty)$

i) $(5/3, \infty)$

17. Operar, simplificando en todo momento:

a)
$$\frac{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}{2} : \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} : \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}}$$

(Sol: $24/25$)

b)
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-4 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{25 - \frac{25}{2}}}{25 - \frac{25}{2}}$$

(Sol: -2)

c)
$$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left[(-2)^3\right]^2 + (-3)^3 \cdot (-3)^2}$$

(Sol: $-4/179$)

d)
$$\frac{\sqrt{2 \sqrt[3]{2} \sqrt{4 \sqrt{2}}}}{(\sqrt[8]{2})^2}$$

(Sol: $\sqrt[24]{2^{25}}$)

18. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

- a) El valor numérico de $P(x)$ para $x=-2$ (Sol: -1)
 b) La factorización de $R(x)$ (Sol: Polinomio irreducible)
 c) $P(x)+Q(x)+R(x)$ (Sol: $6x^3+13x^2-5x+11$)
 d) $P(x)-Q(x)-R(x)$ (Sol: $2x^3-x^2+x-5$)
 e) $P(x)+3Q(x)-2R(x)$ (Sol: $10x^3-8x^2-x+22$)
 f) $P(x) : (x+2)$ por Ruffini, y comprobar. (Sol: $C(x)=4x^2-2x+2$; $R(x)=-1$)

19. Operar y simplificar (en este cuaderno):

$$\frac{\frac{x^3 - x}{2x^2 + 6x}}{\frac{5x^2 - 5x}{2x + 6}} = \quad \left(\text{Sol: } \frac{x+1}{5x} \right)$$

20. Resolver:

a) $\frac{1+96\frac{1}{480}}{96x} = \frac{1}{1600}$ (Sol: $x=20$)

b)
$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 6 \\ 2x + y - 3z = -9 \\ -x + 2y + z = -2 \end{array} \right\}$$
 (Sol: $x=1, y=-2; z=3$)

c) $\frac{3x^2+1}{6x+1} = \frac{6x-1}{3x^2-1}$ (Sol: $x=0; x=\pm 2$)

d) $2\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 4$ (Sol: $x=5; x=13/9$)

e) $\frac{\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}x - \frac{x}{\sqrt{2}}$ (Sol: $x=\pm\sqrt{2}$)

f)
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x^2 + 3xy = 0 \end{array} \right\}$$
 (Sol: $x_1=0, y_1=-1; x_2=3/7, y_2=-1/7$)

g) $\frac{(3x+1)(3x-1)}{6} + 4x - 5 \geq \frac{(x+2)(x-2)}{2} + \frac{11}{6}$ [Sol: $x \in (-\infty, -5] \cup [1, \infty)$]

h)
$$\left. \begin{array}{l} 2x - 10 > -x + 2 \\ 12 - 4x > -3x + 2 \\ 3(x+2) \geq 2(x+6) \end{array} \right\}$$
 [Sol: $x \in [6, 10]$]

i) $\frac{1}{x} \leq x$ (Intentar resolverlo también gráficamente) [Sol: $x \in [-1, 0) \cup [1, \infty)$]

21. Señalar cuáles de los siguientes números son racionales o irracionales, indicando el porqué:

- | | | |
|--------------------|-------------------|-------------------|
| a) 3,629629629.... | c) 5,216968888... | e) 7,129292929... |
| b) 0,130129128... | d) 0,123456789... | f) 4,101001000... |

(Soluc: $\mathbb{Q}; \mathbb{I}; \mathbb{Q}; \mathbb{I}; \mathbb{Q}; \mathbb{I}$)

22. Representar en la recta real los siguientes conjuntos numéricos y nombrarlos –siempre que se pueda– empleando intervalos:

a) $\{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} / x > -3\}$

j) $\{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 4\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 3\}$

h) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 5\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} / |x| = 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} / |x| > 4\}$

i) $\{x \in \mathbb{R} / |x| < 5\}$

23. Operar, simplificando en todo momento (en este cuaderno):

a)
$$\frac{\frac{4}{3} : \frac{7}{4} + \left(7 + \frac{2}{5}\right) : \frac{7}{3}}{\frac{4}{3} + \frac{7}{4} \left(7 - \frac{2}{5}\right) \frac{7}{3}}$$

(Sol: 236/1697)

b)
$$\frac{\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} \left(\frac{5}{2^3}\right)^{-1}}{\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}} + (-4)^{-3}}{1 + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}{4^{-3}}}$$

(Sol: -1/64)

c)
$$\frac{(\sqrt{125})^3}{\sqrt{5\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{25}}}$$

(Sol: $\sqrt[12]{5^{41}}$)

24. Dados $P(x) = 6x^4 + 11x^3 - 28x^2 - 15x + 18$ y $Q(x) = 3x - 2$, se pide:

a) Factorizar $P(x)$, por Ruffini.

[Sol: $(3x-2)(2x-3)(x+1)(x+3)$]

b) $Q^5(x)$, por Tartaglia.

(Sol: $243x^5 - 810x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32$)

c) $P(x) \cdot Q(x) - 2x^2 Q(x)$

(Sol: $18x^5 + 21x^4 - 112x^3 + 15x^2 + 84x - 36$)

d) $P(x) : Q(x)$

[Sol: $C(x) = 2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$; $R(x) = 0$]

25. Operar y simplificar:

$$\frac{1}{x^2 - 9x + 20} - \frac{1}{x^2 - 11x + 30} + \frac{1}{x^2 - 10x + 24}$$

(Sol: $\frac{x-7}{x^3 - 15x^2 + 74x - 120}$)

26. Resolver y comprobar:

a)
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + 3z = 13 \\ -x + y + 4z = 9 \end{cases}$$

(Sol: $x=2$, $y=-1$; $z=3$)

b)
$$\frac{5}{x+2} = \frac{3}{2} - \frac{x}{x+3}$$

(Sol: $x_1=3$; $x_2=-4$)

c)
$$\begin{cases} y^2 = 2ax \\ x^2 = ay \end{cases} \text{ donde } a \in \mathbb{R}$$

(Soluc : $x = a \cdot \sqrt[3]{2}$, $y = a \cdot \sqrt[3]{4}$)

d) $1 - \frac{3x-7}{5} > \frac{5x+4}{15} - \frac{x-1}{3}$ (Sol: $x < 3$)

e) $3x^2 + 15x + 21 < 0$ (Sol: $\nexists$ soluc.)

f) $3x^2 + 15x + 21 > 0$ (Sol: $\forall x \in \mathbb{R}$)

g) $\frac{(x+2)(x-2)}{4} - \frac{x^2}{2} < \frac{(x^2-2x)(x^2+2x)}{4} - 2$ [Sol: $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$]

h) $(x^2-4)(x^2-1) > 0$ [Sol: $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$]

i) $(x^2-4)(x^2+4) < 0$ [Sol: $x \in (-2, 2)$]

j) $\frac{4}{(2x+2)^2} = 1$ (Sol: $x_1 = 0; x_2 = -2$)

27. Separar los siguientes números en racionales e irracionales, indicando el porqué:

$\frac{1}{2}$ π $\sqrt{13}$ $\frac{2,6}{2}$ $\sqrt{169}$ $0,7$ $\frac{3}{5}$ $0,494949\dots$ $\sqrt{7}$ $3,75$ -13 $6,24$ $1,732050\dots$

(Soluc: $\mathbb{Q}; \mathbb{I}; \mathbb{I}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q}; \mathbb{I}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q}; \mathbb{Q}; \mathbb{I}$)

28. Hallar la $\cup$ e $\cap$ de los siguientes intervalos:

a) $A = [-2, 5)$ $B = (1, 7)$	c) $E = (-\infty, 0]$ $F = (-3, \infty)$	e) $I = (-\infty, 0)$ $J = [0, \infty)$	g) $M = [-3, -1)$ $N = (2, 7]$
b) $C = (0, 3]$ $D = (2, \infty)$	d) $G = [-5, -1)$ $H = (2, 7/2]$	f) $K = (2, 5)$ $L = (5, 9]$	h) $O = (-3, 7)$ $P = (2, 4]$

29. Calcular, aplicando, siempre que sea posible, las propiedades de las potencias, y simplificando en todo momento. Cuando no sea ya posible aplicar las propiedades de las potencias, debido a la existencia de una suma o resta, pasar la potencia a número y operar:

$$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]^2 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \left[\left(\frac{4}{9}\right)^2\right]^{-1} \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{3^4} 2^{-1}}$$

(Sol: $-608/81$)

30. Dados $P(x) = x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$ y $Q(x) = x^2 - 9$, se pide:

a) Factorizar $P(x)$, por Ruffini [Sol: $(x+1)(x-1)(x+3)^2(x^2+1)$]

b) $Q^4(x)$, por Tartaglia (Sol: $x^8 - 36x^6 + 486x^4 - 2916x^2 + 6561$)

c) $P(x) - Q(x) \cdot Q(x)$ (Sol: $x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 17x^2 - 6x - 90$)

d) $P(x) : Q(x)$ [Sol: $C(x) = x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 54x + 161$; $R(x) = 480x + 1440$]

31. Operar y simplificar:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-1}{x+1}$$

(Sol: $\frac{2x^3 - 2x^2 - 2x}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$)

32. Resolver:

a) $-x^2 - x = 0$	(Sol: $x_1=0, x_2=-1$)	g) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = 1$	(Sol: $x_1=-1, x_2=-3$)
b) $\sqrt{3} = \frac{2x}{1-x^2}$	(Sol: $x_1 = \sqrt{3}/3, x_2 = -\sqrt{3}$)	h) $x^6 - 16x^2 = 0$	(Sol: $x=0, x=\pm 2$)
c) $(x^2+1)^4 = 625$	(Sol: $x=\pm 2$)	i) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$	(Sol: $x=-1, x=2$)
d) $(x^2-1)^4 = 0$	(Sol: $x=\pm 1$)	j) $\sqrt[3]{x+5} = 2$	(Sol: $x=3$)
e) $\frac{x^4}{10} = 8x$	(Sol: $x_1 = 0, x_2 = 2\sqrt[3]{10}$)	k) $x^3 = 3x$	(Sol: $x_1=0, x_2=\sqrt[3]{3}, x_3=-\sqrt[3]{3}$)
f) $\frac{\sqrt{x}}{x} = 0$	(Sol: $\nexists$ soluc.)	l) $-7x \leq -7$	(Sol: $x \geq 1$)
		m) $x^2 < 9$	[Sol: $x \in (-3, 3)$]

33. ¿Verdadero o falso? Razonar la respuesta:

- a) Todo número real es racional.
- b) Todo número natural es entero.
- c) Todo número entero es racional.
- d) Siempre que multiplicamos dos números racionales obtenemos otro racional.
- e) Siempre que multiplicamos dos números irracionales obtenemos otro irracional.
- f) Entre dos números racionales existe siempre un racional.
- g) " " " irracionales " " irracional

NOTA: Lo que ya no es tan fácil de justificar es que: **Entre dos reales existen ∞ racionales.**

Entre dos reales existen ∞ irracionales.

Por tanto, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ se dice que **son conjuntos densos.**

34. Representar los siguientes intervalos e indicar su unión e intersección:

a) $[-2, 5)$ y $[3, \infty)$ b) $(0, 3)$ y $[9/2, \infty)$ c) $(-5, -1)$ y $[-1, 4]$ d) $(-1, 3)$ y $[3, \infty)$

Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

RECORDAR: Hay 3 casos posibles ($k > 0$ siempre):

$$|\text{expresión}| = k \begin{cases} \text{expresión} = k \\ \text{expresión} = -k \end{cases}$$

$$|\text{expresión}| < k \Rightarrow -k < \text{expresión} < k$$

$$|\text{expresión}| > k \Rightarrow \text{expresión} < -k \text{ o } \text{expresión} > k$$

35. Indicar para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones; en el caso de las desigualdades, indicar la solución mediante intervalos:

a) $ x =5$	i) $ x =0$	q) $ x-2 <5$ (Sol: $x \in (-3,7)$)
b) $ x \leq 5$	j) $ x <2$	r) $ x+3 \geq 7$ (Sol: $x \in (-\infty, -10] \cup [4, \infty)$)
c) $ x >5$	k) $ x \geq 2$	s) $ 2x <8$ (Sol: $x \in (-4,4)$)
d) $ x-4 =2$ (Sol: $x_1=2, x_2=6$)	l) $ x+1 =3$ (Sol: $x_1=-4, x_2=2$)	t) $ x >-3$ (Sol: $\forall x \in \mathbb{R}$)
e) $ x-4 \leq 2$ (Sol: $x \in [2,6]$)	m) $ x-2 \leq 3$ (Sol: $x \in [-1,5]$)	u) $ x =x$
f) $ x-4 >2$ (Sol: $x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$)	n) $ x =7$	v) $ x =-3$ (Sol: $\nexists$ soluc.)
g) $ x+4 >5$ (Sol: $x \in (-\infty, -9) \cup (1, \infty)$)	o) $ x \leq 6$	w) $ x^2-2x-3 =3$ (Sol: $x=0, x=2, x=1\pm\sqrt{7}$)
h) $ x =-2$	p) $ x >2$	

Una vez resuelto el ejercicio analíticamente, considerar la posibilidad de **resolverlo gráficamente** (método que, posiblemente, resulte más fácil...)

36. Razonar que $|\sin x - 2| = 2 - \sin x$.

Resolución gráfica de inecuaciones y sistemas:

RECORDAR:

TIPOS DE SISTEMAS (desde el p. de v. del nº de soluciones)	COMPATIBLE: Tiene solución	DETERMINADO: solución única
		INDETERMINADO: ∞ soluciones
	INCOMPATIBLE: No tiene solución	

37. Resolver **gráficamente** los siguientes sistemas de ecuaciones; resolverlos a continuación analíticamente (por el método deseado), y comprobar que se obtiene idéntico resultado:

a) $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=2 \end{cases}$ (Soluc: $x=7, y=5$)	f) $\begin{cases} x-2y=4 \\ 3x-6y=12 \end{cases}$ (Sol: ∞ soluc, sist. compat. indtdo.)
b) $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x-y=-2 \end{cases}$ (Soluc: $x=0, y=2$)	g) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ (Sol: $x=3, y=1$)
c) $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ (Soluc: $x=1, y=1$)	h) $\begin{cases} x-2y=4 \\ -2x+4y=6 \end{cases}$ (Sol: $\nexists$ soluc, sist. incompat.)
d) $\begin{cases} y=x^2-5x+6 \\ x+y=1 \end{cases}$ (Sol: $\nexists$ soluc, sist. incompat.)	i) $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ (Sol: $x=1, y=0$)
e) $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ (Sol: $x=2, y=-1$)	

¿Qué desventaja tiene este método?

38. Resolver **gráficamente** las siguientes inecuaciones de 2º grado; resolverlas a continuación analíticamente y comprobar que se obtiene idéntico resultado:

a) $x^2 - 6x + 8 \geq 0$	[Sol: $x \in (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$]	l) $x^2 + 6x + 9 > 0$	[Sol: $\forall x \in \mathbb{R} - \{-3\}$]
b) $x^2 - 2x - 3 < 0$	[Sol: $x \in (-1, 3)$]	m) $x^2 - 2x + 1 < 0$	[Sol: $\nexists$ soluc.]
c) $x^2 - 5x + 6 > 0$	[Sol: $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$]	n) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$	(Sol: $x = 1$)
d) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$	[Sol: $x \in [-2, 5]$]	o) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$	[Sol: $x = 2$]
e) $3x^2 - 10x + 7 \geq 0$	[Sol: $x \in (-\infty, 1] \cup [7/3, \infty)$]	p) $6x^2 - 5x - 6 < 0$	[Sol: $x \in (-2/3, 3/2)$]
f) $2x^2 - 16x + 24 < 0$	[Sol: $x \in (2, 6)$]	q) $x^2 - 4x + 7 < 0$	[Sol: $\nexists$ soluc.]
g) $x^2 - 4x + 21 \geq 0$	[Sol: $\forall x \in \mathbb{R}$]	r) $2x^2 - 8x + 6 < 0$	[Sol: $x \in (1, 3)$]
h) $x^2 - 3x > 0$	[Sol: $x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$]	s) $2x^2 + 10x + 12 \leq 0$	[Sol: $x \in [-3, -2]$]
i) $x^2 - 4 \geq 0$	[Sol: $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$]	t) $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$	[Sol: $x \in [1, 4]$]
j) $x^2 - 4x + 4 > 0$	[Sol: $x \in \mathbb{R} - \{2\}$]		
k) $x^2 + 6x + 9 \geq 0$	[Sol: $\forall x \in \mathbb{R}$]		

Miscelánea (II):

39. Si los lados de un cuadrado aumentan 2 cm, su área aumenta 28 cm². ¿Cuáles son las dimensiones del cuadrado originario? (Sol: Se trata de un cuadrado de lado 6 cm)

40. a) ¿Qué otro nombre recibe el intervalo $[0, \infty)$? ¿Y $(-\infty, 0]$?

b) ¿A qué equivale $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$? ¿Y $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$?

41. a) Simplificar, reduciendo previamente a radicales semejantes:

$$\sqrt{128} + 5\sqrt{12} - 2\sqrt{18} - 3\sqrt{27} - \sqrt{2} \quad \text{Sol: } \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

b) Racionalizar y simplificar:

$$\frac{3\sqrt{2} - 2}{3\sqrt{2} + 2} + \frac{6\sqrt{12}}{7\sqrt{6}} \quad \text{(Sol: } 11/7)$$

$$\frac{3 \sqrt[5]{9}}{2 \sqrt[3]{243}} \quad \text{Sol: } \frac{\sqrt[15]{3^{11}}}{6}$$

c) Operar y simplificar (o al revés...):

$$(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 (5 - \sqrt{21}) \quad \text{(Sol: } 8)$$

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}\right) \quad \text{(Sol: } 1)$$

$$\sqrt{125} - 2 \sqrt[4]{400} + \sqrt[6]{8000} \quad \text{Sol: } 3\sqrt{5}$$

42. Un grupo de estudiantes alquila un piso por el que tienen que pagar 420 € al mes. Uno de ellos hace cuentas y observa que si fueran dos estudiantes más, cada uno tendría que pagar 24 € menos. ¿Cuántos estudiantes han alquilado el piso? ¿Cuánto paga cada uno? (Sol: 5 estudiantes a 84 € cada uno)

43. Calcular el volumen aproximado (en m^3) de la Tierra, tomando como valor medio de su radio 6378 km, dando el resultado en **notación científica** con dos cifras decimales. (Volumen de la esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$)
(Sol: $1,08678 \cdot 10^{21} m^3$)

44. a) Un comerciante tiene dos clases de café: uno de 40 €/kg y otro de 60 €/kg. Si mezcla 3 kg del barato y 2 kg del caro, ¿cuánto costará el kg de la mezcla resultante? (Sol: 48 €)

b) ¿Cuántos kg tendrá que añadir de cada tipo para obtener 60 kg de mezcla a 50 € el kg? (Sol: 30 kg de cada clase)

45. Con dos tipos de barniz, de 3,50 €/kg y de 1,50 €/kg, queremos obtener un barniz de 2,22 €/kg. ¿Cuántos kilogramos tenemos que poner de cada clase para obtener 50 kg de la mezcla? (Ayuda: plantear un sistema de ecuaciones de primer grado) (Sol: 18 kg del barniz de 3,50 y 32 kg del de 1,50)

46. Racionalizar denominadores y simplificar:

a) $\frac{5 + \sqrt{5}}{10}$

Sol: $\frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$

Sol: $\sqrt[3]{243}$

c) $\frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3} + \frac{12}{\sqrt{3}}$

(Sol: 7)

d) $\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Sol: $\frac{1+\sqrt{6}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$

47. Dos árboles de 15 m y 20 m de altura están a una distancia de 35 m. En la copa de cada uno hay una lechuza al acecho. De repente, aparece entre ellos un ratoncillo, y ambas lechuzas se lanzan a su captura a la misma velocidad, llegando simultáneamente al lugar de la presa. ¿A qué distancia de cada árbol apareció el ratón? (Ayuda: Si se lanzan a la misma velocidad, recorren el mismo espacio, pues llegan a la vez; aplicar el teorema de Pitágoras, y plantear un SS.EE. de 2º grado) (Sol: a 15 m del árbol más alto)

48. En una balanza de precisión pesamos cien granos de arroz, obteniendo un valor aproximado de 0,0000277 kg. ¿Cuántos granos se estima que habrá en 1000 toneladas de arroz? Utilícese **notación científica**. (Sol: $\approx 3,61 \cdot 10^{12}$ granos)

49. Un almacenista de fruta compra un determinado número de cajas de fruta por un total de 100 €. Si hubiera comprado 10 cajas más y cada caja le hubiera salido por 1 € menos, entonces habría pagado 120 €. ¿Cuántas cajas compró y cuánto costó cada caja? (Sol: 20 cajas a 5 €)

- 50.** Calcular, aplicando, siempre que sea posible, las propiedades de las potencias, y simplificando en todo momento. Cuando no sea ya posible aplicar las propiedades de las potencias debido a la existencia de una suma o resta, pasar la potencia a número y operar:

a)
$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-10} + \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^{-1}}{\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} : \frac{1}{3^{-1}}} \cdot (-1)^{-7} \cdot (-7)^{-1}$$
 (Sol: 1/7)

b)
$$\frac{\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3} : \frac{1}{6}\right)^{-50} \cdot (-1 - 3^{-1})}{\left[(-1)^{-9} + (-9)^{-1}\right] \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-17}\right]^3}$$
 (Sol: 2/5)

c)
$$\frac{11^{-1} - 1^{-11}}{\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^{-6}\right]^5 : \left(\frac{25}{9}\right)^{-14} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^{-1} + 1}$$
 (Sol: -25/11)

- 51.** Simplificar:

a)
$$\sqrt{5 \cdot \sqrt[3]{5}} + \sqrt[3]{3125} + (\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt{5} \cdot \sqrt[6]{5}$$
 Sol : $8\sqrt[3]{25}$

b)
$$\sqrt{4 \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[6]{2} - (\sqrt[3]{2})^4 + \frac{\sqrt[6]{1024}}{\sqrt[3]{2}}$$
 Sol : $\sqrt[3]{16}$

c)
$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} - (\sqrt[3]{2})^2 + \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3}$$
 Sol : $\sqrt{2}$

d)
$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}(2 - \sqrt{3})}$$
 Sol : $\sqrt[3]{32} + \sqrt[6]{432}$

- 52.** La luz del sol tarda 8 minutos y 20 segundos en llegar a la Tierra. Calcular la distancia Tierra-Sol, empleando **notación científica**. (Sol: $1,5 \cdot 10^8$ km)

- 53.** Hallar dos números positivos sabiendo que su cociente es $2/3$ y su producto 216 (Sol: 12 y 18)

- 54. TEORÍA:** a) ¿Qué es el discriminante de una ecuación de 2º grado? ¿Qué indica? Sin llegar a resolverla, ¿cómo podemos saber de antemano que la ecuación $x^2 + x + 1$ carece de soluciones?
b) Inventar una ecuación de 2º grado con raíces $x_1 = 2/3$ y $x_2 = 2$, y cuyo coeficiente cuadrático sea 3
c) Sin resolver y sin sustituir, ¿cómo podemos asegurar que las soluciones de $x^2 + 5x - 300 = 0$ son $x_1 = 15$ y $x_2 = -20$?
d) Calcular el valor del coeficiente **b** en la ecuación $x^2 + bx + 6 = 0$ sabiendo que una de las soluciones es 1. Sin necesidad de resolver, ¿cuál es la otra solución?

- 55.** Un rectángulo tiene 300 cm^2 de área y su diagonal mide 25 cm. ¿Cuánto miden sus lados? (Sol: 20 x 15 cm)

56. Resolver:

a) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

(Sol: $x=1, x=-2$)

b) $x^6 - 64 = 0$

(Sol: $x=\pm 2$)

c)
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + y = 3 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

(Sol: $x_1=1; y_1=2; x_2=2/5; y_2=1/2$)

d) $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x-9} = \sqrt{x-1}$

(Sol: $x=5$)

e) $x > \frac{x}{2}$

[Sol: $x \in (0, \infty)$]

f)
$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - 2z = 4 \\ 4x + y - z = 7 \\ x + 4y - 4z = 0 \end{array} \right.$$

(Sol: Sistema incompatible i.e. no tiene soluc.)

57. Un frutero ha comprado manzanas por valor de 336 €. Si el kilo de manzanas costara 0,80 € menos, podría comprar 48 kg más. Calcular el precio de las manzanas y la cantidad que compró.

(Sol: 120 kg a 2,80 €/kg)

58. a) Resolver la ecuación $4x^3 - 6x^2 - x = -\frac{3}{2}$, sabiendo que una de sus raíces es $1/2$

(Sol: $x=\pm 1/2, 3/2$)

b) Ídem con $2x^3 - 3x^2 = -\frac{1}{2}$, sabiendo que una de sus raíces es $1/2$

Sol: $x = \frac{1}{2}, x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

59. Una persona compra una parcela de terreno por 4800 €. Si el m^2 hubiera costado 2 € menos, por el mismo dinero habría podido comprar una parcela 200 m^2 mayor. ¿Cuál es la superficie de la parcela que ha comprado? ¿Cuánto cuesta el m^2 ? (Sol: 600 m^2 ; 8 €)

60. Resolver: a) $\sqrt[3]{x-2} = -x$ (Sol: $x=1$)



b) $\sqrt[3]{x+6} = x$ (Sol: $x=2$)

61. El área de un triángulo rectángulo es 30 m^2 y la hipotenusa mide 13 m. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos? (Sol: 12 m y 5 m)

62. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x} = 2\sqrt{x} - 1$ (Ayuda: aplicar Tartaglia y Ruffini) (Sol: $x=1$)

63. Calcular dos números naturales impares consecutivos cuyo producto sea 195 (Sol: 13 y 15)

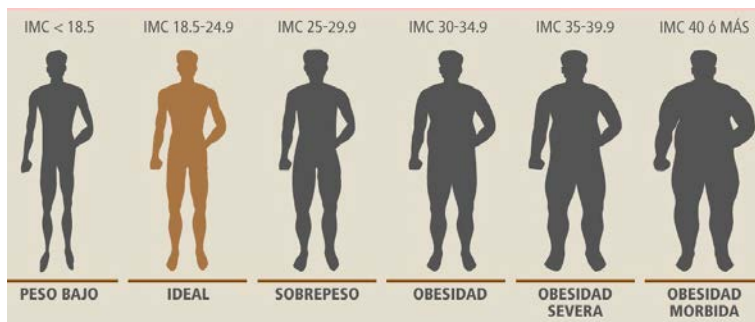
64. Un comerciante tiene dos clases de aceite: el normal, que cuesta 5 €/l, y el de calidad superior, a 9 €/l. ¿Cuántos kg deberá mezclar de cada uno para obtener 4 kg a 6 €/l? (Sol: 3 l y 1 l, respectivamente)

65. María tiene 24 años. Tiene el doble de edad que tenía su hermano cuando ella tenía la edad que su hermano tiene ahora. ¿Qué edad tiene su hermano? (Sol: 18 años)

66. Un problema de planteamiento de inecuaciones: Se define el Índice de masa corporal (IMC) de la siguiente forma:

$$\text{IMC} = \frac{\text{peso corporal (en kg)}}{\text{altura}^2 \text{ (en m)}}$$

Un peso normal oscila entre 18,5 y 24,9.
Hallar cuál es el peso máximo admisible
para un individuo de 1,89 m de altura
para poder estar en un peso normal.



67. Resolver:

a) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ y - x^2 = 1 \end{array} \right\} \quad (\text{Sol: } x=1, y=2)$

b) $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = \sqrt{x^3} \end{array} \right\} \quad (\text{Sol: } x=1; y=1)$

c) $\left\{ \begin{array}{l} y + x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x - y + 9 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{Sol: } \nexists \text{ soluc.})$

d) $\left\{ \begin{array}{l} x \cdot y = 10 \\ 9(x - y)^2 = x^2 \end{array} \right\} \quad \text{Sol: } x_1 = \sqrt{15}, y_1 = 2\sqrt{15}/3; \\ x_2 = \sqrt{30}/2, y_2 = 2\sqrt{30}/3)$

e) $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - 2z = 4 \\ 4x + y - z = 7 \\ x + 4y - 4z = -2 \end{array} \right\} \quad (\text{Sol: Sist. compat. indtdo. i.e. } \infty \text{ soluc.; p. ej. } x=2, y=z-1, \forall z)$

f) $\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 9 \\ \sqrt{x+y} + y = x \end{array} \right\} \quad (\text{Sol: } x=6, y=3)$

68. Si multiplicamos la tercera parte de cierto número por sus tres quintas partes, obtenemos 405. ¿Cuál es ese número? (Sol: 45)

69. a) Inventar una ecuación algebraica¹ de grado 3 que tenga únicamente por soluciones $x=-2$, $x=1$ y $x=3$

b) Inventar una ecuación algebraica de grado 4 que tenga únicamente como raíces 1 y 2

c) Un polinomio de grado 3, ¿cuántas raíces puede tener como mínimo? Razonar la respuesta. (Sol: 1 raíz)

70. Varios amigos alquilan un local por 800 €. Si hubieran sido tres más, habría pagado cada uno 60 € menos. ¿Cuántos amigos son? (Sol: 5 amigos)

71. Determinar el polinomio de grado 3 que verifica: $P(-1)=P(2)=P(-3)=0$ y $P(-2)=18$

72. Uno de los lados de un rectángulo es doble que el otro y el área mide 50 m^2 . Calcular las dimensiones del rectángulo. (Sol: $5 \times 10 \text{ m}$)

73. Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{y}{1-y} + 1} \quad (\text{Sol: } y)$

¹ Es decir, una ecuación polinómica.



b) $\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1}\right)$

Sol: $\frac{1}{x}$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a+b}{a-b}\right) \frac{a+b}{ab}$

Sol: $-\frac{2}{a-b}$

d) $\frac{xy}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{y} + \frac{y}{x-y}$

Sol: $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$



e) $2\left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x+2}\right)$

Sol: $\frac{3x+2}{2x^2+2x}$

74. Un campo rectangular de 4 ha de superficie tiene un perímetro de 10 hm. Calcular, en metros, su longitud y su anchura. (Recordar: 1 ha=100 a; 1 a=100 m²) (Sol: 100 m x 400 m)

75. Demostrar que: a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$ b) $\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = a \cdot b$

76. Las diagonales de un rombo están en la relación de 2 a 3. El área es de 108 cm². Calcular la longitud de las diagonales y el lado del rombo. (Sol: d=12 cm; D=18 cm; l=10,81 cm)

77. Operar y simplificar:

a) $x + \frac{2}{x - \frac{4}{x}} - \frac{x-1}{x-2}$

Sol: $\frac{x^2+x-1}{x+2}$

b) $\frac{x^4+x^3-9x-81}{x^2-9}$

Sol: x^2+x+9

c) $\frac{x+1}{x^2-16} : \frac{x+1}{3x-4} - \frac{1}{x-4}$

Sol: $\frac{2}{x+4}$



d) $1 + \frac{1}{x^2-9} : \frac{x+3}{4}$

Sol: $\frac{x+1}{x-3}$

78. El diámetro de la base de un cilindro es igual a su altura. El área total es 169,56 m². Calcular sus dimensiones. (Sol: d=h=6 m)

79. a) Factorizar $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 20x^2 - 27x + 18$ [Sol: (2x-1)(x+3)(x-3)(x+2)]

b) Operar y simplificar el resultado: $\frac{2}{x-2} : \frac{x+2}{x^2+4} - \frac{x+2}{x-2}$

Sol: $\frac{x-2}{x+2}$

c) Desarrollar y simplificar: $(x^2-2)^4$ (Sol: $x^8 - 8x^6 + 24x^4 - 32x^2 + 16$)

80. Transformar en potencias de exponente fraccionario la siguiente expresión, operar y simplificar (en este cuaderno):

$$\sqrt{3 \sqrt[3]{3 \sqrt[4]{3}}} =$$

81. Despejar x y simplificar:

$$x^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1$$

$$(Sol: x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5})$$

82. Demostrar que son ciertas las siguientes igualdades:

a) $2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

b) $2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

c) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$

d) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + 1\right)^2 \cdot a} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + 1\right)^2 \cdot b}$

83. Calcular la velocidad y el tiempo que ha invertido un ciclista en recorrer una etapa de 120 km sabiendo que, si hubiera ido 10 km/h más deprisa, habría tardado una hora menos. (Sol: $v=30$ km/h; $t=4$ h)

84. Resolver:

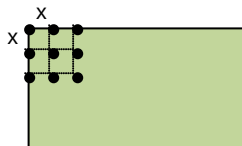
a) $|x^2 - 3x| = 4$

$$(Sol: x_1 = -1, x_2 = 4)$$

b) $|2x - 3| = |x + 4|$

$$(Sol: x_1 = -1/3; x_2 = 7)$$

85. En un terreno rectangular de lados 64 m y 80 m se quieren plantar 357 árboles formando una cuadrícula regular. ¿Cuál será el lado de esa cuadrícula? (Ayuda: En el lado menor, por ejemplo, hay $64/x$ cuadrículas, y un árbol más que el número de cuadrículas) (Sol: $x=4$ m)



86. Operar, racionalizando previamente:

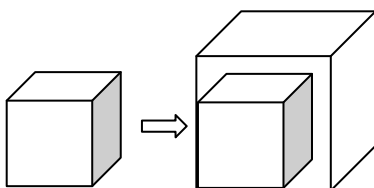
a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$$(Sol: \frac{5\sqrt{2}}{2})$$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}+5}$

$$(Sol: \frac{4\sqrt[3]{25} + \sqrt{5} - 5}{20})$$

87. Al aumentar en 1 cm la arista de un cubo su volumen aumenta en 271 cm^3 . ¿Cuánto mide la arista? (Ayuda: plantear una ecuación de 3º grado) (Sol: 9 cm)



88. Dos tinajas tienen la misma cantidad de vino. Si se pasan 37 litros de una a otra, ésta contiene ahora el triple que la primera ¿Cuántos litros de vino había en cada tinaja al principio? (Sol: 74 l)

89. Resolver:

a) $\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 4} \geq x$

[Sol: $x \in (-\infty, -2] \cup (4, \infty)$]

b) $\frac{x + 3}{x - 3} > 1$

[Sol: $x \in (3, \infty)$]

c) $\frac{(x+1)^2}{3} - \frac{2x^2 + 7x + 2}{6} \geq 1 - \frac{(x+2)(x-2)}{2}$

[Sol: $x \in (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$]

d) $1 + \frac{1}{x^2 - 9} : \frac{x+3}{4} \geq 0$

[Sol: $x \in (-\infty, -1] \cup (3, \infty)$]

e) $\frac{1}{x+2} \leq \frac{x}{x+2}$

[Sol: $x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$]

90. Un padre, preocupado por motivar a su hijo en Matemáticas, se compromete a darle 1 € por problema bien hecho, mientras que, si está mal, el hijo le devolverá 0,5 €. Después de realizar 60 problemas, el hijo ganó 30 €. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente? (Ayuda: Plantear un SS.EE. de 1^{er} grado)
(Sol: 40 problemas)

91. Tres hermanos se reparten un premio de 350 €. Si el mayor recibe la mitad de lo que recibe el mediano; y el mediano la mitad de lo que recibe el pequeño, ¿cuánto dinero tendrá cada hermano al final?
(Sol: 50 € el mayor, 100 € el mediano y 200 € el pequeño)

92. Resolver:

a)
$$\begin{cases} 4A - 4B - 4C = 20 \\ 6B - 2A - 2C = 20 \\ 7C - A - B = 20 \end{cases}$$

(Sol: $A=32,5$, $B=17,5$, $C=10$)

b) $(2+2t)^2 + (-t-2)^2 = (1+2t)^2 + (-t-3)^2$

(Sol: $t=1$)

c) $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1$

(Sol: $x=0$)

d) $\sqrt{x^2 + x + 1} = -x - 1$

Sol : $\nexists$ soluc.)

e) $(x+1)^3 = (x-1)^2 \cdot (x+1)$

(Sol: $x_1=0$; $x_2=-1$)

f) $\frac{a(a+1)^2}{2} + \frac{(a+1)^2}{2} - \frac{(a+1)^3}{3} = 36$ (Ayuda: hacer el cambio $a+1=t$)

(Sol: $a=5$)

93. Un ganadero decide repartir una manada de 456 caballos entre sus hijos e hijas. Antes del reparto se enfada con los dos únicos varones, que se quedan sin caballos. Así, cada hija recibe 19 cabezas más. ¿Cuántas hijas tiene el ganadero? (Sol. 6 hijas)

94. Una cuadrilla de vendimiadores tiene que vendimiar dos fincas, una de las cuales tiene doble superficie que la otra. Durante medio día trabajó todo el personal de la cuadrilla en la finca grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en la finca grande y la otra mitad trabajó en la pequeña. Durante esa tarde fueron terminadas las dos fincas, a excepción de un reducido sector de la finca pequeña, cuya vendimia ocupó el día siguiente completo a un solo vendimiador. ¿Con cuántos vendimiadores contaba la cuadrilla? (Ayuda: Llamar x al nº de vendimiadores y s a la superficie que vendimia una persona en media jornada, y plantear una ecuación, ¡no un sistema!) (Sol. 8 vendimiadores)

95. a) Comprobar que $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$ no tiene raíces $\in \mathbb{Z}$. Factorizarlo sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

b) Ídem con $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$ sabiendo que $-1/2$ y $1/3$ son raíces suyas.

96. Tres amigos echan una partida de cartas en la que convienen que el que pierda una partida pagará a los otros dos contrincantes la cantidad que tenga cada uno de ellos en ese momento. Después de tres manos, en las que cada uno pierde una partida, los tres acaban con la misma cantidad, 20 €. ¿Con cuántos € empezó cada uno? (Sol. 32,50 €, 17,50 € y 10 €)

97. a) Demostrar que la expresión $\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - 4\sqrt{x+2}$ es equivalente a $2x\sqrt{x+2} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+2)^3}$

b) Simplificar: $\frac{(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2}{p^2 + q^2}$ (Sol: $p^2 + q^2$)

$\frac{(n^2 - n) \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} - 1}$ (Sol: -1)

$\sqrt{\frac{c^2}{4}} + 1 + \frac{c}{2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{4}} + 1 + \frac{c}{2}}$ (Sol: c)

RECORDAR: ¿Cuándo desaparecen los denominadores?

Cuando **tenemos** una igualdad y **dos miembros**, y multiplicamos ambos por una misma cantidad:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3 \xrightarrow{\otimes x(x-2)} x - 2 - x = 3x(x-2)$$

¿Cuándo NO desaparecen los denominadores?

Cuando tenemos una operación, numérica o algebraica (es decir, **no tenemos dos miembros**):

$$\dots = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\dots = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

I) NÚMEROS COMBINATORIOS

«El **factorial de un número** $n \in \mathbb{N}$ se designa como $n!$ –se lee ¹ “n factorial” –, y es el producto de todos los enteros desde 1 hasta n ». Por ejemplo:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$7! = 7 \cdot 6! = 5040$$

Por definición ², $0! = 1$. He aquí una tabla de los primeros factoriales:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

“ “ “ “ “

El alumno puede comprobarlos con la calculadora. Vemos que los números de la serie factorial se van haciendo muy grandes. De hecho, las calculadoras convencionales dan error cuando se les pide, p. ej. $70!$.

Definición de número combinatorio:

$$\begin{array}{lcl} \text{índice} & \longrightarrow & \\ \text{orden} & \longrightarrow & \end{array} \boxed{\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! (m-n)!}} \quad \text{donde } m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \quad (1)$$

Observaciones:

1º) Se trata de una definición. Este nuevo objeto matemático se define así porque, como veremos en el próximo apartado, tiene gran utilidad. De hecho, los números combinatorios también se llaman **coeficientes binomiales**.

2º) $\binom{m}{n}$ se lee “m sobre n”. El resultado es siempre un número natural. Ver tabla anexa.

3º) ¡Cuidado! Puede comprobarse que $(m-n)!$ no es $m! - n!$

¹ La notación actual $n!$ fue usada por primera vez por el francés *Christian Kramp* en 1803.

² He aquí una justificación:

$$5! = 5 \cdot 4! \Rightarrow 4! = \frac{5!}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

$$4! = 4 \cdot 3! \Rightarrow 3! = \frac{4!}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{“ “ “} \quad 2! = \frac{3!}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{“ “ “} \quad 1! = \frac{2!}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{“ “ “} \quad 0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{C.Q.D.})$$

Ejemplo 1:

$$a) \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot \cancel{4!}} = 3 \cdot 5 = 15$$

Nótese cómo se ha operado: no hemos sustituido 6! por su valor, sino que hemos parado la serie factorial en el factorial del denominador, es decir, 4!. De esa forma, el cálculo es mucho más sencillo. Esto es particularmente relevante para números elevados:

$$b) \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cancel{5!}} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{4} = \frac{9 \cdot \cancel{4} \cdot 2 \cdot 7}{\cancel{4}} = 9 \cdot 2 \cdot 7 =$$

Propiedades de los números combinatorios:

$$1^\circ) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad (\text{Esta propiedad se debe al francés Pascal}); \quad \binom{n}{1} = n$$

$$2^\circ) \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \quad (\text{Propiedad de Stifel})$$

$$3^\circ) \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n} \quad (\text{Identidad de Pascal})$$

NOTA: Estas propiedades se probarán en los ejercicios.

Ejercicios final anexo: 1 a 4

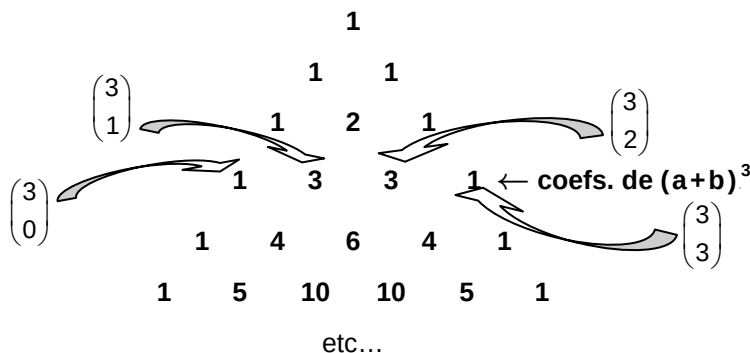
II) FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \quad (2)$$

Observaciones:

1º) Esta fórmula puede ser demostrada, por inducción.

2º) Los coeficientes, $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$, se llaman **coeficientes binomiales**. Ya hemos visto en el apartado anterior cómo se calculan. Su valor también puede obtenerse, como vimos el curso pasado, mediante el triángulo de Pascal:



Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}(x+3)^4 &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3 3 + \binom{4}{2}x^2 3^2 + \binom{4}{3}x 3^3 + \binom{4}{4}3^4 \\&= x^4 + 4x^3 3 + 6x^2 9 + 4x 27 + 81 \\&= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81\end{aligned}$$

Observación:

1º) La igualdad que hemos obtenido es válida $\forall x \in \mathbb{R}$. Por tanto, podemos comprobarla para cualquier valor de x , y lo lógico es elegir un valor que conduzca a cálculos sencillos. Por ejemplo, elijamos $x = -1$ y comprobemos que al sustituir dicho valor en ambos miembros se verifica la igualdad:

$$\begin{aligned}x = -1 \Rightarrow 2^4 &= (-1)^4 + 12(-1)^3 + 54(-1)^2 + 108(-1) + 81 \\16 &= 1 - 12 + 54 - 108 + 81 \\16 &= 16\end{aligned}$$

Compruébese, si se desea, para otros valores de x ...

Ejercicios final anexo: 4 y ss.

EJERCICIOS BINOMIO DE NEWTON

1. Calcular:

a) $\binom{6}{3}$ b) $\binom{6}{5}$ c) $\binom{5}{3}$ d) $\binom{6}{4}$ e) $\binom{7}{5}$ f) $\binom{100}{2}$ g) $\binom{8}{4}$ h) $\binom{18}{14}$ i) $\binom{25}{20}$ j) $\binom{3}{7}$ k) $\binom{15}{10}$
l) $\binom{9}{3}$ m) $\binom{5}{1}$ n) $\binom{10}{3}$ o) $\binom{6}{6}$ p) $\binom{12}{8}$

(Sol: a) 20; b) 6; c) 10; d) 15; e) 21; f) 4950; g) 70; h) 3060; i) 53130; j) $\frac{3}{7}$; k) 3003; l) 84; m) 5; n) 120; o) 1; p) 495)

2. Demostrar: a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ b) $\binom{n}{1} = n$

3. A la vista del ejercicio anterior, y sin efectuar ningún cálculo, decir el valor de los siguientes coeficientes binómicos:

$\binom{7}{0}$ $\binom{100}{100}$ $\binom{50}{1}$ $\binom{0}{0}$ $\binom{1}{1}$

4. Calcular: a) $\binom{10}{7}$ y $\binom{10}{3}$ b) $\binom{11}{5}$ y $\binom{11}{6}$ c) $\binom{7}{0}$ y $\binom{7}{7}$ ¿Qué conclusión podemos sacar?

5. Desarrollar: a) $(x+2)^7$ b) $(x^2+3)^6$ c) $(2x^3+5)^5$ d) $(2x^4+5x)^5$ e) $(2x^2+3y)^5$

6. Desarrollar: a) $(x-3)^5$ b) $(2x-4)^6$ c) $(x^2-3x)^4$ d) $(3x-2y)^5$

7. Desarrollar: a) $(\sqrt{2}+1)^6$ b) $(2+\sqrt{3})^5$ c) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^5$ d) $(\sqrt{5}-2)^4$ e) $(2\sqrt{3}-1)^3$ f) $(3\sqrt{2}-2)^5$
g) $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$ h) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^5$ i) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^5$ j) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})^6$ k) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^5$
l) $(3\sqrt{x}-2x)^5$ m) $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5$ n) $(\sqrt{2}+\sqrt{8})^4$ o) $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$ p) $\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5$
q) $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^6$ r) $\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$ s) $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5$ t) $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$

8. Desarrollar:

a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ b) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$ c) $\left(2x+\frac{y}{3}\right)^4$ d) $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ e) $\left(xy-\frac{1}{xy}\right)^4$ f) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-x\right)^5$ g) $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ h) $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$

9. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x} + 6 = x$ (Sol: $x=8$)

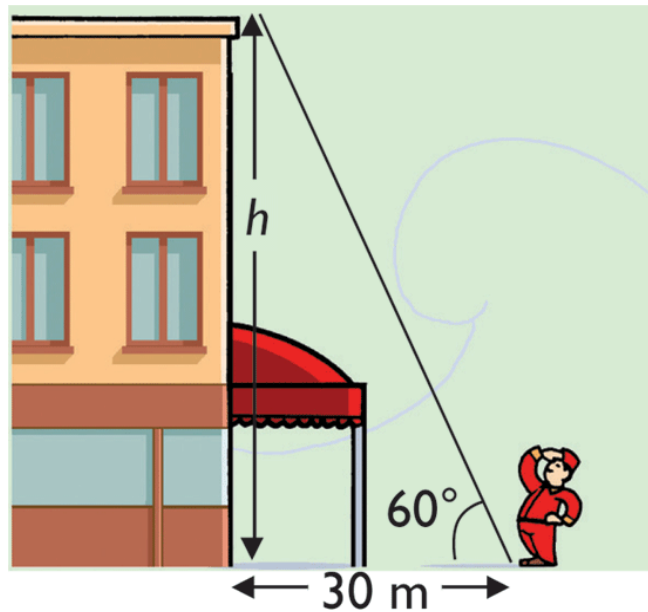
10. Calcular 11^5 por medio del binomio de Newton y comprobar el resultado.

Puede ser útil para el futuro memorizar que:

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ (A-B)^3 &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3\end{aligned}$$

TRIGONOMETRÍA

RESOLUCIÓN de TRIÁNGULOS



MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato CCNN

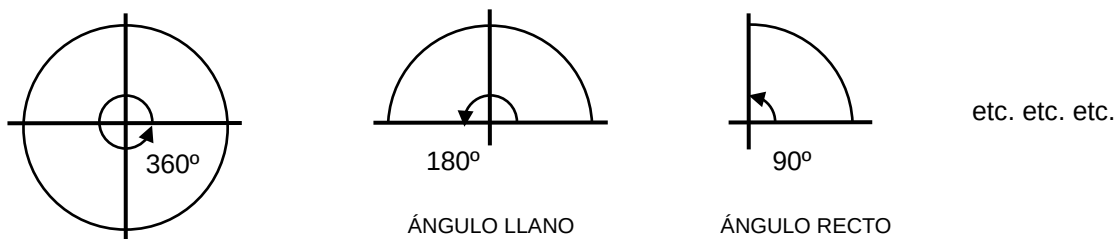
**Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas**



I) REPASO de TRIGONOMETRÍA¹ ELEMENTAL

I.1) Grados y radianes:

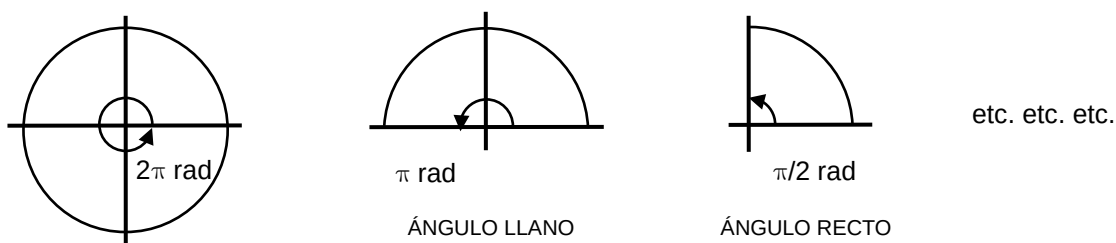
Sistema sexagesimal: Es el sistema que se hemos utilizado hasta ahora. En él, por definición, **una vuelta completa son 360°**. Por tanto:



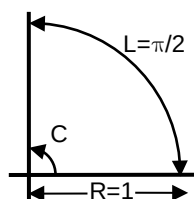
Este sistema ya lo utilizaban los babilonios hacia el 3 000 a.C. ¿Por qué eligieron 360°? Por practicidad, dado que es divisible por una gran cantidad de números: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120 y 180.

Nótese que las unidades de este sistema, los grados sexagesimales, se indican con el símbolo °, y que **éste no debe omitirse nunca**.

Radianes: Es el sistema que más se utiliza en Física (movimiento circular, etc.), pero también se emplea en Matemáticas, ya que, por ejemplo, como veremos en el tema 6, los radianes se emplean en las funciones trigonométricas. Por definición, **una vuelta completa son 2π rad**. Por tanto:



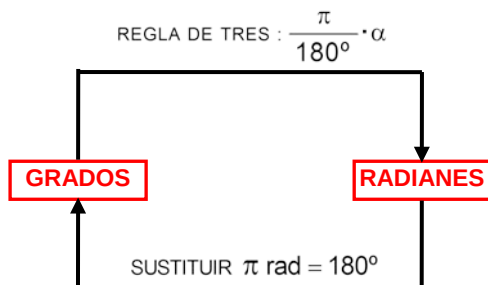
Este sistema se empezó a utilizar en Física en época relativamente reciente (siglo XVIII). ¿Por qué elegir 2π rad? De nuevo por comodidad. En efecto, supongamos una circunferencia de radio 1. Como la longitud o perímetro de la circunferencia viene dada por $L=2\pi R$, en este caso la longitud sería 2π , que es precisamente el valor del ángulo en radianes. Si fuera media circunferencia, la longitud del arco correspondiente sería π rad, que de nuevo es el valor del ángulo en radianes. Y así sucesivamente:



¹ La palabra *Trigonometría* (del griego *trigonon*, triángulo, y *metron*, medida) la introdujo el matemático y astrónomo germano *Bartolomäus Pitiscus* (1561-1613) en 1595. También construyó tablas trigonométricas detalladas.

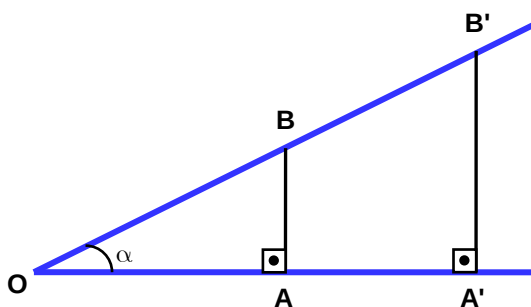
Es decir, «En una circunferencia de radio unidad, la medida de un ángulo en radianes coincide con la longitud del arco correspondiente». Una vez nos acostumbremos a ellos, los radianes resultan una forma muy útil y cómoda de medir ángulos.

Resumen:



Ejercicios final tema: 1

1.2) Definición de las razones trigonométricas:



Considerar la figura adjunta, formada por dos triángulos rectángulos en posición de Tales. Se define el «**seno de un ángulo**» como el cociente o razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa»:

$$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \dots \quad (1)$$

Th. de Tales

Nótese que $\text{sen } \alpha$ se puede expresar de infinitas formas equivalentes, debido al teorema de Tales.

Análogamente, se define el «**coseno de un ángulo**» como el cociente entre el cateto contiguo y la hipotenusa»:

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \dots \quad (2)$$

Th. de Tales

Finalmente, se define la «**tangente de un ángulo**» como el cociente entre el cateto opuesto y el cateto contiguo»:

$$\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \dots = \frac{\boxed{\text{sen } \alpha}}{\boxed{\cos \alpha}} \quad (3)$$

Th. de Tales

Nótese que de (1) y (2) se infiere fácilmente que la tangente es también el cociente entre seno y coseno. Esta es precisamente la primera identidad trigonométrica de una larga lista que veremos a lo largo del tema, y cuyo resumen podemos ver al final del libro. Estas tres razones así definidas, llamadas **razones trigonométricas directas**, se utilizan, como veremos en breve, para resolver triángulos.

Observaciones: 1) «Las razones trigonométricas dependen del ángulo pero no del triángulo».

Ello es debido, como ya se ha dicho, al teorema de Tales. Y esta es precisamente la gran aplicación de la Trigonometría al cálculo de distancias o longitudes inaccesibles o muy lejanas. Por ejemplo, en Astronomía permite, mediante triangulación, obtener distancias entre astros.

2) Las razones trigonométricas carecen de unidades, no así los ángulos.

Ello es obvio, ya que una razón es un cociente de medidas de la misma unidad.

3) Cada razón directa tiene su correspondiente razón trigonométrica inversa:

COSECANTE:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (4)$$

SECANTE:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (5)$$

COTANGENTE:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (6)$$

Estas tres razones inversas no se suelen utilizar para resolver triángulos, sino en los cálculos algebraicos con fórmulas trigonométricas, como veremos profusamente a lo largo del tema, y en el próximo curso.

1.3) Uso de la calculadora en Trigonometría. Razones recíprocas:



Vamos a explicarlo para una Casio fx-82 MS, uno de los modelos más extendidos entre los estudiantes². Para cualquier otro modelo se suele proceder de forma bastante análoga.

En primer lugar, tenemos que cerciorarnos de si la calculadora está trabajando en grados sexagesimales (en la parte superior de la pantalla aparecerá DEG, i.e. degrees) o en radianes (aparecerá RAD). Para ello hay que pulsar la tecla **MODE** varias veces y elegir 1=DEG o 2=RAD.

Ejemplo 1: ¿sen 23°? $\Rightarrow \boxed{\sin} 23 \boxed{=}$ $\Rightarrow 0,3907311285\dots$

Para introducir el ángulo en grados, minutos y segundos hay que utilizar la tecla **0° ' "**:

Ejemplo 2: ¿tg 103° 12' 25"? $\Rightarrow \boxed{\tan} 103 \boxed{0^{\circ} ' ''}$
 $12 \boxed{0^{\circ} ' ''}$
 $25 \boxed{0^{\circ} ' ''} \boxed{=}$ $\Rightarrow -4,261198564\dots$

Para obtener cualquiera de las tres razones inversas hay que invertir la razón correspondiente directa:

² Puede descargarse el manual en https://www.dropbox.com/s/nr5qlmhcupv7t8s/manual_casio_fx_82_ms.pdf

Ejemplo 3: $\angle \sec 35^\circ 30' \Rightarrow 1 \div \cos 35^\circ 30' = 1,228326911\dots$

Por otra parte está el problema inverso, es decir, si por ejemplo sabemos que $\sin \alpha = 0,85$, de qué ángulo α procede? Es decir, ¿cuál es el ángulo α tal que $\sin \alpha = 0,85$? Esto nos lleva a definir las **razones trigonométricas recíprocas**. Cada una de las seis razones anteriormente definidas (las tres directas y las tres inversas) tienen su correspondiente razón recíproca. En realidad sólo vamos a manejar las razones recíprocas de seno, coseno y tangente:

Definición: Si $\sin \alpha = x$, se dice que α es el **arcoseno** de x , es decir, el ángulo cuyo seno es x , y se indica de la siguiente forma:

$$\sin \alpha = x \Rightarrow \alpha = \arcsen x$$

arc = ángulo cuyo

Definición: Si $\cos \alpha = x$, se dice que α es el **arccoseno** de x , es decir, el ángulo cuyo coseno es x , y se indica de la siguiente forma:

$$\cos \alpha = x \Rightarrow \alpha = \arccos x$$

arc = ángulo cuyo

Definición: Si $\tan \alpha = x$, se dice que α es la **arcotangente** de x , es decir, el ángulo cuya tangente es x , y se indica de la siguiente forma:

$$\tan \alpha = x \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} x$$

arc = ángulo cuyo

Hay que tener siempre en cuenta que un arcsen, arccos o arctg es un ángulo, y por tanto hay que indicar siempre sus unidades.

Ejemplo 4: $\sin \alpha = 0,85 \Rightarrow \angle \alpha$?

$\sin \alpha = 0,85 \Rightarrow \alpha = \arcsen 0,85$ ¿Cómo se obtiene una razón recíproca con la calculadora? Hay que usar la tecla **SHIFT**:

$$\text{SHIFT} \sin 0,85 = 58,21166938\dots^\circ$$

Vemos que la calculadora da el ángulo en grados y décimas de grado, por lo que hay que pasarlo a grados, minutos y segundos con la tecla **0' ''**:

$$58,21166938\dots^\circ \text{0' ''} \Rightarrow 58^\circ 12' 42''$$

Por lo tanto, $\alpha = \arcsen 0,85 \cong 58^\circ 12' 42''$

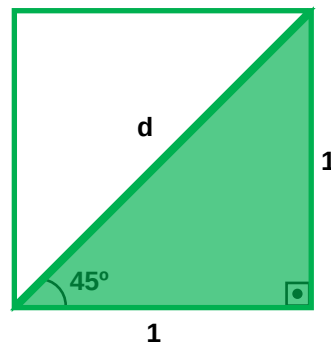
(NOTA: Puede comprobarse que, efectivamente, $\sin 58^\circ 12' 42'' = 0,85$)

Ejercicios final tema: 2

1.4) Razones trigonométricas de 30° , 45° y 60° :

Razones de 45° :

Considerar un cuadrado que, para simplificar los cálculos, tendrá lado 1 (ver figura). Si trazamos una diagonal obtenemos el triángulo rectángulo



sombreado de la figura, en el que vamos a obtener las razones de 45° . Para ello, previamente vamos a hallar por medio del teorema de Pitágoras la diagonal d:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

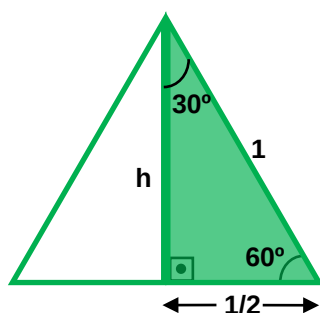
$$\boxed{\sin 45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (7)$$

$$\boxed{\cos 45^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (8)$$

$$\boxed{\text{tg } 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1} \quad (9)$$

NOTA: Si hubiéramos tomado otro lado del cuadrado distinto de 1 habríamos obtenido los mismos resultados, obviamente.

Razones de 30° y 60° :



Considerar un triángulo equilátero, de nuevo de lado 1 para simplificar los cálculos. Trazamos la altura h correspondiente a la base, con lo cual obtenemos el triángulo rectángulo sombreado de la figura, en el que aparece un ángulo de 30° y otro de 60° . Para obtener sus razones previamente vamos a hallar por medio del teorema de Pitágoras la altura h:

$$1^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\sin 30^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}} \quad (7) \text{ y } (8)$$

$$\boxed{\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}} \quad (7) \text{ y } (8)$$

$$\boxed{\cos 30^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (9) \text{ y } (10)$$

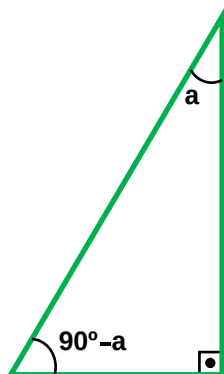
$$\boxed{\sin 60^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (9) \text{ y } (10)$$

$$\boxed{\text{tg } 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (11) \text{ y } (12)$$

$$\boxed{\text{tg } 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}} \quad (11) \text{ y } (12)$$

Todo esto se puede resumir en la siguiente tabla:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

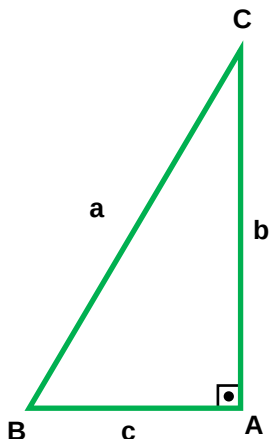


Observamos que $\text{sen} 30^\circ = \text{cos} 60^\circ$ y que $\text{cos} 30^\circ = \text{sen} 60^\circ$. Ello es debido a que ambos ángulos, 30° y 60° , son complementarios³ (es decir, suman 90°). Este resultado vamos a utilizarlo muy a menudo a lo largo del tema:

Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios (i.e. suman 90°). «Si dos ángulos son complementarios, entonces el seno de uno es el coseno del otro, y viceversa»:

$$\begin{aligned}\text{sen } \alpha &= \text{cos}(90^\circ - \alpha) \\ \text{cos } \alpha &= \text{sen}(90^\circ - \alpha)\end{aligned}\quad (13)$$

I.5) Relaciones entre las razones trigonométricas (Identidades trigonométricas):



Fórmula fundamental de la Trigonometría: $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ (14)

Demostración: Considerar el triángulo rectángulo de la figura:

$$\text{sen}^2 B + \text{cos}^2 B = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \quad (\text{C.Q.D.})$$

Th. de Pitágoras

De la relación fundamental de la Trigonometría se derivan otras dos fórmulas muy parecidas entre sí:

$$\begin{aligned}1 + \text{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = \text{sec}^2 \alpha \\ 1 + \text{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} = \text{cosec}^2 \alpha\end{aligned}\quad (15) \text{ y } (16)$$

Demostración: Vamos a demostrar (15) (la otra fórmula se demuestra análogamente). Para ello, partimos de la relación fundamental, y dividimos ambos miembros por $\text{cos}^2 \alpha$:

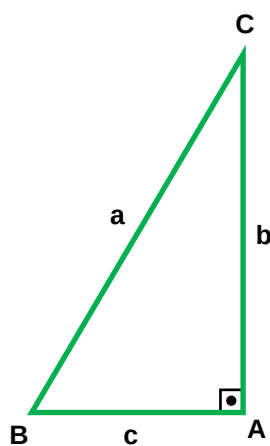
$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} + \frac{\text{cos}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} \Rightarrow \text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} \quad (\text{C.Q.D.})$$

³ Nótese que ello también ocurre con 45° y su complementario, 45° (él mismo).

NOTA: En la práctica apenas utilizaremos (16).

¿Cuál es la **utilidad** de estas identidades trigonométricas, que relacionan las distintas razones? Permiten, dada una razón trigonométrica, hallar las restantes.

I.6) Resolución de triángulos rectángulos:



Considerar el triángulo rectángulo de la figura⁴. Todo triángulo tiene 6 elementos: 3 ángulos y 3 lados. Siempre nos van a dar 3 de esos elementos (en el caso de un triángulo rectángulo hay un dato implícito, $\hat{A} = 90^\circ$), y **resolver un triángulo consiste en obtener los restantes 3 elementos**, mediante las siguientes herramientas matemáticas:

1º) $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$, es decir, dado uno de los dos ángulos agudos, el otro es su complementario.

2º) $a^2 = b^2 + c^2$, es decir, el teorema de Pitágoras, que nos permite, conociendo dos lados, hallar el tercero. De todas formas, por cuestiones didácticas vamos a procurar no utilizarlo en la medida de lo posible, ya que es más rápido y práctico lo siguiente:

3º) Las relaciones trigonométricas anteriormente definidas. En la práctica utilizaremos sólo las tres directas:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} = \cos C$$

$$\cos B = \frac{c}{a} = \operatorname{sen} C$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$$

Ejercicios final tema: 3 y 4

Reseña histórica: Los griegos de la época alejandrina (a partir del siglo IV a.C.) desarrollaron la Trigonometría esférica -la cual incluye ideas básicas de la Trigonometría plana- debido, sobre todo, a la idea de cuantificar la astronomía: predecir las posiciones de los cuerpos celestes, medir el tiempo, el calendario, la navegación y la geografía.

El primer gran astrónomo alejandrino fue **Aristarco** (ca. 310-230 a.C.), que utilizó la geometría para medir distancias y tamaños relativos entre cuerpos celestes. **Hiparco de Nicea** (ca. 190-120 a.C.) fue el primero en construir tablas trigonométricas, aplicándolas al estudio de la bóveda celeste. Se le considera el fundador de la Trigonometría.

Ptolomeo de Alejandría (ca. 100-170), responsable del modelo de sistema solar geocéntrico que estaría vigente durante muchos siglos, escribe hacia el año 150 el *Almagesto*, el libro más importante de Trigonometría de la antigüedad. Continuator de la obra de Hiparco y Menelao, en él se mezclan Trigonometría y Astronomía. Recoge, entre otras, las fórmulas del seno de la suma y de la resta de dos ángulos, así como la del seno del ángulo mitad. Ello le permite construir unas completas tablas trigonométricas. Este libro pone la Trigonometría en su forma definitiva, que perdurará alrededor de mil años.

Durante toda la Edad Media no se produce ningún avance sustancial en este campo. Como curiosidad, Roberto de Chester (s. XII) es el responsable de la actual palabra "seno", al traducir incorrectamente del árabe un cierto término, que él entendió como "sinus" (bahía o ensenada, en latín).

Hasta 1450 la Trigonometría sobre todo era esférica, pero a partir de esa fecha empezó a tener importancia la Trigonometría plana, de la mano de los alemanes. Johann Müller (1436-1476), más conocido como "**Regiomontano**", expone los conceptos fundamentales sobre magnitudes y razones, resuelve problemas de triángulos y aborda la Trigonometría esférica. Construyó tablas de senos y tangentes bastante exhaustivas. Tradujo directamente del griego.

El alemán **Georg Joachim Rheticus** (1514-1576), alumno de Copérnico, combinó los avances anteriores para construir detalladas tablas de funciones trigonométricas. A él se debe la noción actual de seno, y la utilización de las seis funciones trigonométricas. Posteriormente, figuras como el alemán Johannes Werner (1560-1622), el francés François Vieta (1540-1603) et al. reunirán y sistematizarán los conocimientos anteriores.

⁴ El criterio que se suele seguir es llamar **A** al ángulo recto, **B** y **C** a los dos ángulos agudos, y los lados con la letra minúscula del ángulo opuesto, es decir, **a** es la hipotenusa, y **b** y **c** los catetos.

II) AMPLIACIÓN de las RAZONES TRIGONOMÉTRICAS a CUALQUIER CUADRANTE

II.1) Ángulos positivos, negativos y $>360^\circ$:

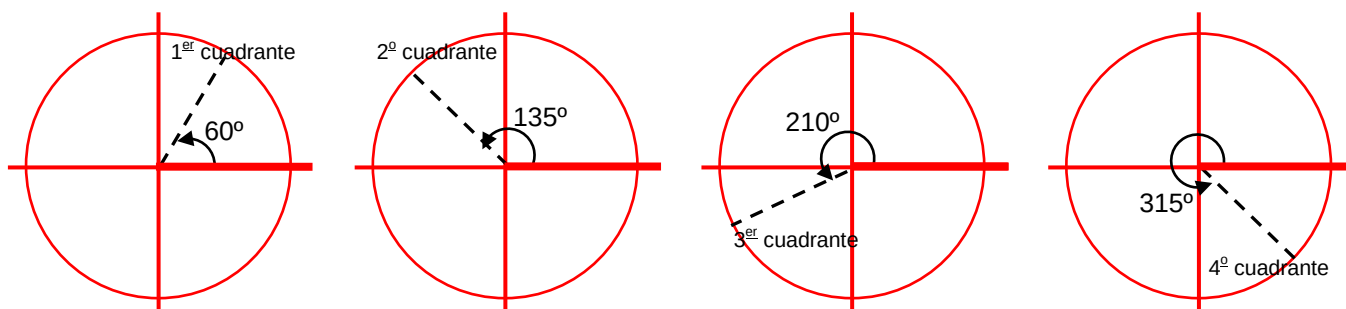
Puesto que hasta ahora nos ceñíamos a un triángulo, es obvio que cualquier ángulo no podía sobrepasar 180° . Sin embargo, como veremos a continuación, existen ángulos mayores, e incluso negativos. Para ello recurriremos a los ejes cartesianos, que nos dividen el plano en cuatro cuadrantes. Por definición:

1º) «Los ángulos comienzan siempre en la parte positiva del eje x».

2º) Por convenio: «un ángulo se considera positivo si va en sentido contrario a las agujas del reloj».

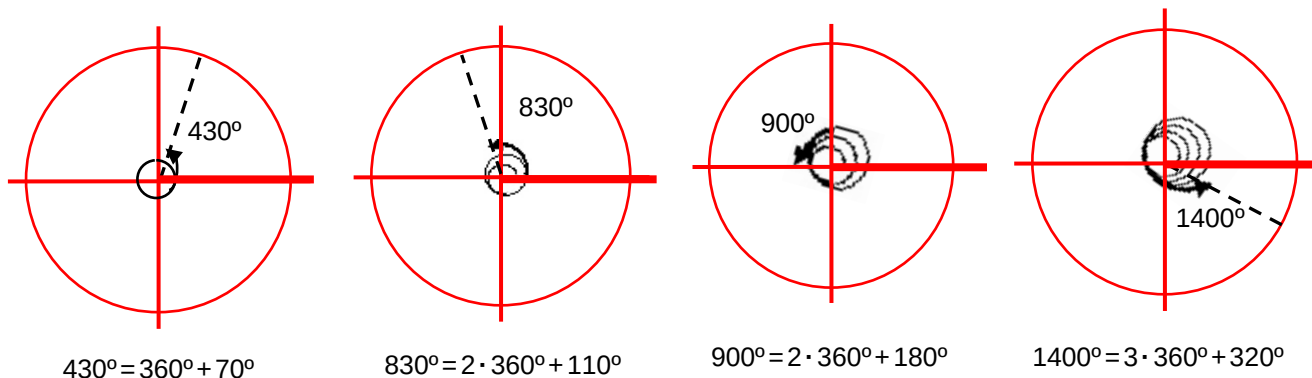
«un ángulo se considera negativo si va en el sentido de las agujas del reloj».

Ejemplo 5: ángulos positivos en los cuatro cuadrantes:

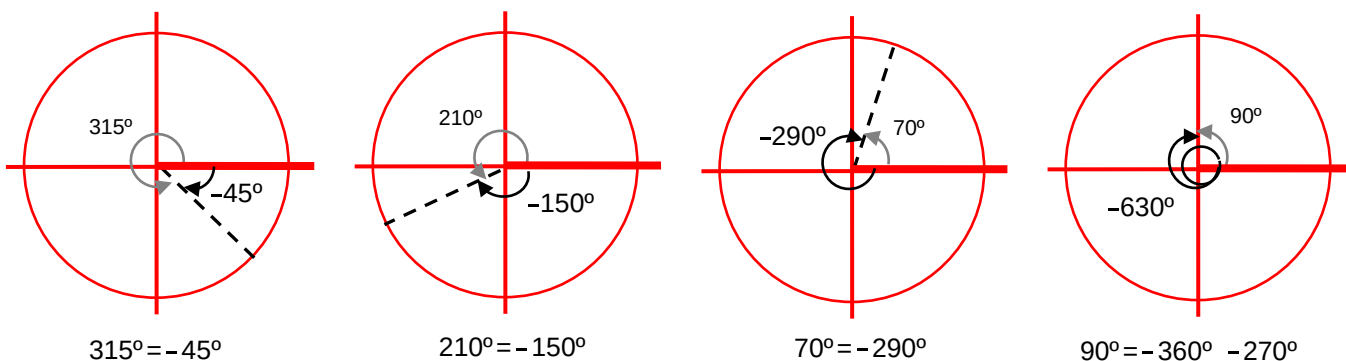


Nótese que el sentido del ángulo (i.e. el signo) lo indica la flecha.

Ejemplo 6: Como una vuelta completa son 360° , es obvio cómo podemos definir los **ángulos $>360^\circ$** :



Ejemplo 7: ángulos negativos:

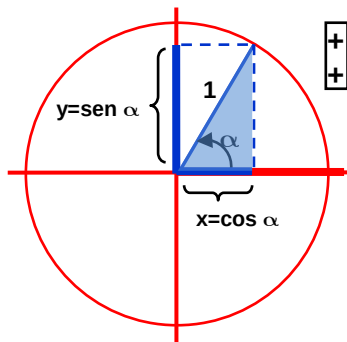


Ejercicios final tema: 5

II.2) Definición de seno y coseno en la circunferencia goniométrica:

Vamos a ampliar la definición de seno y coseno a los cuatro cuadrantes. Para ello utilizaremos la llamada circunferencia goniométrica, que es una circunferencia de radio 1. Esto último es para facilitar los cálculos. Veremos que hay senos y cosenos negativos:

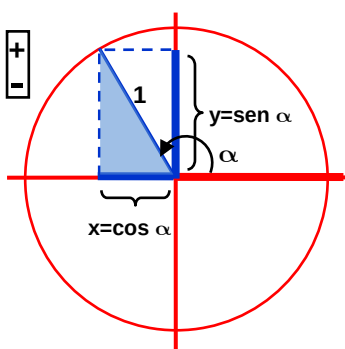
1^{er} cuadrante:



En el triángulo sombreado el $\cos \alpha$ sería el cociente entre cateto adyacente e hipotenusa, pero como esta es 1, el **cos α resulta ser** el segmento horizontal resaltado, es decir, **la abscisa**. Por tanto, **$\cos \alpha > 0$** .

Por lo que respecta al **sen α** , por la misma razón **resulta ser** el segmento vertical resaltado, es decir, **la ordenada**. Por tanto, **$\sen \alpha > 0$** .

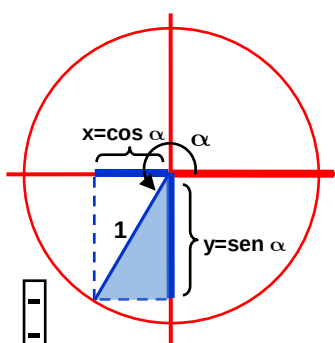
2^o cuadrante:



Ahora el $\cos \alpha$ de nuevo es la abscisa, i.e. el segmento horizontal resaltado que es negativo. Por tanto, **$\cos \alpha < 0$** .

$\sen \alpha$ es siempre la ordenada, i.e. el segmento vertical resaltado, que es positivo. Por tanto, **$\sen \alpha > 0$** .

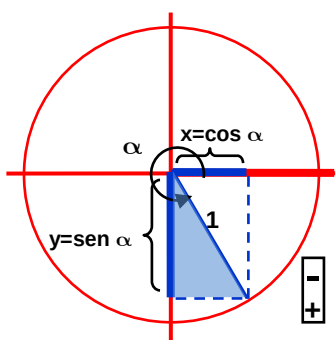
3^{er} cuadrante:



$\cos \alpha$ es siempre la abscisa, i.e. el segmento horizontal resaltado $\Rightarrow$ **$\cos \alpha < 0$** .

$\sen \alpha$ es siempre la ordenada, i.e. el segmento vertical resaltado $\Rightarrow$ **$\sen \alpha < 0$** .

4^o cuadrante:



$\cos \alpha = \text{abscisa} \Rightarrow$ **$\cos \alpha > 0$** .

$\sen \alpha = \text{ordenada} \Rightarrow$ **$\sen \alpha < 0$** .

Nótese que, obviamente, $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ están acotados: $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

Ejercicios final tema: 6

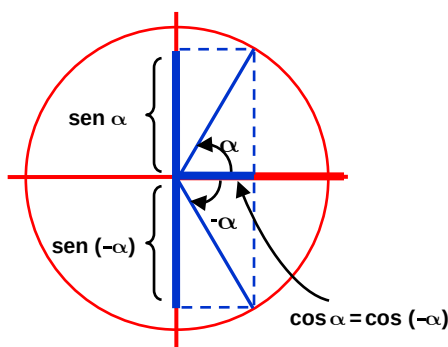
II.3) Gráficas de las funciones seno y coseno:

Es interesante realizar el **ejercicio 7 del final del tema**, que consiste en, mediante tabla de valores apropiada, dibujar las gráficas de $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ y $f(x)=\tan x$. Para ello hay que tener en cuenta que, habitualmente, se considera x en radianes. Dichas gráficas pueden verse en el anexo final del libro.

Ejercicios final tema: 8 a 18

III) RELACIONES ENTRE las RAZONES de CIERTOS ÁNGULOS

III.1) Ángulos opuestos (α y $-\alpha$):



Consideremos un ángulo α en la circunferencia goniométrica, que por simplicidad tomaremos en el 1^{er} cuadrante (ver figura). Su opuesto, $-\alpha$, recordemos que, por ser negativo, será en el sentido de las agujas del reloj (en el dibujo, el ángulo situado en el 4^o cuadrante).

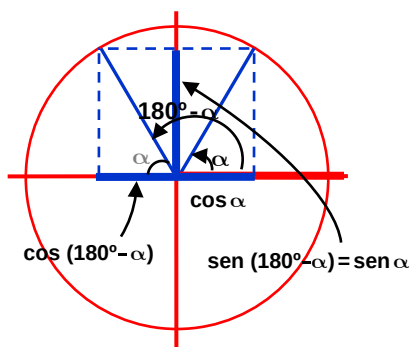
Vemos que $\cos \alpha$ y $\cos(-\alpha)$ comparten el mismo segmento horizontal. Por lo tanto, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

Por otra parte, vemos que $\sin \alpha$ y $\sin(-\alpha)$ son opuestos, es decir, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. En resumen:

$$\left. \begin{array}{l} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha} \quad (17)$$

Es decir, «Los ángulos opuestos tienen sus senos opuestos y sus cosenos iguales»

III.2) Ángulos suplementarios (α y $180^\circ - \alpha$):



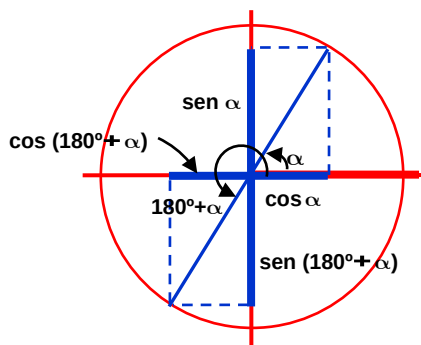
Supongamos α en el 1^{er} cuadrante (ver figura). Su suplementario⁵, $180^\circ - \alpha$, se obtendrá en el 2^o cuadrante prolongando la línea horizontal discontinua. Por tanto, vemos que α y $180^\circ - \alpha$ tienen sus senos iguales y sus cosenos opuestos:

$$\left. \begin{array}{l} \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha} \quad (18)$$

Es decir, «Los ángulos suplementarios tienen sus senos iguales y sus cosenos opuestos»

⁵ Recordar que dos ángulos eran suplementarios cuando sumaban 180° . Por ejemplo, 120° y 60° , o 90° y él mismo...

III.3) Ángulos que difieren 180° (α y $180^\circ + \alpha$):



Supongamos de nuevo α en el 1.º cuadrante, y le sumamos 180° . El ángulo $180^\circ + \alpha$ se obtendrá prolongando el segmento continuo que define a α , con lo cual estará en el 3.º cuadrante (ver figura). Por tanto, vemos que α y $180^\circ + \alpha$ tienen sus senos y cosenos opuestos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha \\ \text{cos}(180^\circ + \alpha) = -\text{cos } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{tg}(180^\circ + \alpha) = \text{tg } \alpha \quad (19)$$

III.4) Ángulos que difieren un nº entero de vueltas (α y $\alpha + k \cdot 360^\circ$):

En este caso no es necesario hacer un dibujo. Consideremos un α cualquiera, y le sumamos un número entero de vueltas, es decir, $\alpha + k \cdot 360^\circ$, donde $k \in \mathbb{Z}$. Es obvio que volverá al mismo punto de la circunferencia goniométrica, es decir, ambos ángulos son esencialmente el mismo. Por lo tanto ambos ángulos tendrán el mismo seno y coseno:

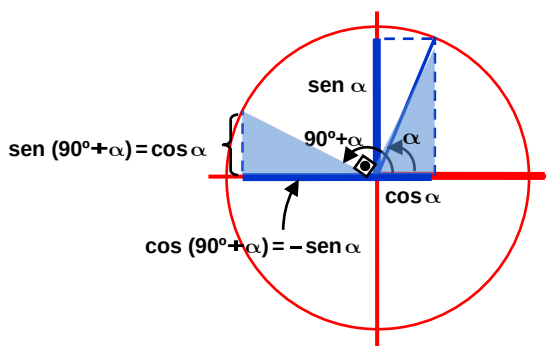
$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \text{sen } \alpha \\ \text{cos}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \text{cos } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{tg}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \text{tg } \alpha \quad (20)$$

III.5) Ángulos complementarios (α y $90^\circ - \alpha$):

En este caso tampoco es necesario el dibujo. Ya vimos en (13) (apdo. I.4) que si dos ángulos son complementarios (i.e. suman 90°), entonces el seno de uno es el coseno del otro, y viceversa:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(90^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha \\ \text{cos}(90^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} = \text{c tg } \alpha \quad (21)$$

III.6) Ángulos que difieren 90° (α y $90^\circ + \alpha$):



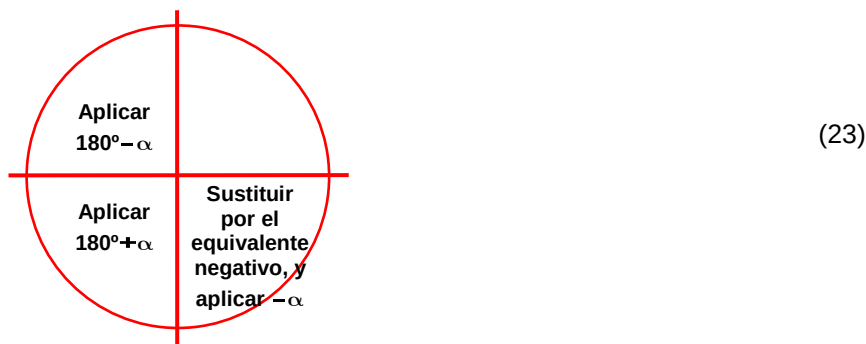
Supongamos un α en el 1.º cuadrante, y le sumamos 90° . Ello significa que el triángulo sombreado del 1.º cuadrante (ver figura) pasará a ser el triángulo sombreado semejante del 2.º cuadrante. Por tanto, $\text{sen}(90^\circ + \alpha)$ pasará a ser igual a $\text{cos } \alpha$. Y $\text{cos}(90^\circ + \alpha)$ pasará a ser igual a $\text{sen } \alpha$, pero negativo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(90^\circ + \alpha) = \text{cos } \alpha \\ \text{cos}(90^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{tg}(90^\circ + \alpha) = -\text{ctg } \alpha \quad (22)$$

Aplicación: Reducción al 1.º cuadrante:

Supongamos que nos dan una razón (seno, tangente, etc.) de un ángulo cualquiera, el cual no tiene por qué estar en el 1.º cuadrante; incluso puede ser un ángulo negativo, y/o de valor elevado. Se trata de obtener una

razón de un ángulo del 1.^{er} cuadrante que sea equivalente a la dada. Para ello, si el ángulo es muy elevado, es decir, supera 360° , hay que restarle las vueltas necesarias, hasta que sea $<360^\circ$. A continuación, y dependiendo de en qué cuadrante esté, hay que tener en cuenta el siguiente esquema:



Ejemplo 8: Reducir $\cos 1230^\circ$ al 1.^{er} cuadrante, y comprobar con la calculadora.

Solución: En primer lugar, tenemos que reducir vueltas a 1230° , para lo cual lo más práctico es dividir:

$$\begin{array}{c} 1230^\circ \\ \hline 360^\circ \\ \hline 150^\circ \end{array} \quad \begin{array}{c} D=d \cdot C+R \\ 3 \end{array} \Rightarrow 1230^\circ = 150^\circ + 3 \cdot 360^\circ \sim 150^\circ$$

Es decir, 1230° es equivalente a 150° . Como éste está en el 2.^o cuadrante, según el esquema (23) tenemos que aplicar las fórmulas de $180^\circ - \alpha$:

$$\begin{array}{l} \cos 1230^\circ = \cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \begin{array}{c} 150^\circ \in 2^\circ \text{ cuad.} \\ \Rightarrow \text{aplicar } 180^\circ - \alpha \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \end{array}$$

NOTA: Compruébese mediante calculadora la validez del resultado.

Ejercicios final tema (reducción al 1.^{er} cuadrante): 19 a 23

III.7) Razones trigonométricas de la suma y diferencia ($\alpha \pm \beta$):

$$\left. \begin{array}{l} \sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{array} \quad (24)$$

Observaciones: 1) Las dos primeras fórmulas pueden ser demostradas, pero ello excede las pretensiones del curso. No obstante, hay infinidad de demostraciones en Internet⁶. La de $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$ es fácil de demostrar:

⁶ Estas fórmulas fueron utilizadas, entre otros, por el suizo Jean Bernouilli (1667-1748) y el francés Thomas Fantet de Lagny (1660-1734) en tiempos modernos, si bien parece ser que Ptolomeo de Alejandría (ca. 100-170) ya las empleaba.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cancel{\cos \beta} + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cancel{\cos \alpha} \cancel{\cos \beta} - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}}{\frac{\cancel{\cos \alpha} \cancel{\cos \beta} - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cancel{\cos \alpha} \cancel{\cos \beta}}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (\text{C.Q.D.})$$

dividimos ambos términos de la fracción por $\cos \alpha \cos \beta$

2) También existen las análogas para la resta:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (25)$$

Su demostración es bastante sencilla, partiendo de las fórmulas precedentes. Por ejemplo, para $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)] = \operatorname{sen} \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \operatorname{sen}(-\beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \quad (\text{C.Q.D.})$$

$\cos(-\beta) = \cos \beta$
 $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen} \beta$

Las otras dos se demuestran análogamente. Pruébese.

Ejercicios final tema: 24 a 34

III.8) Razones trigonométricas del ángulo doble (2α):

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (26)$$

Estas fórmulas se demuestran trivialmente a partir de (24), sustituyendo $\beta = \alpha$. Se deja como ejercicio hacer la demostración de las tres identidades.

Ejercicios final tema: 35 a 42

III.9) Razones trigonométricas del ángulo mitad ($\alpha/2$):

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (27)$$

Observaciones: 1) Vamos a demostrar la primera de las identidades⁷. Para ello partimos de la fórmula fundamental de la Trigonometría, (14), y de la fórmula del coseno del ángulo doble, (26.2), que sumaremos miembro a miembro:

⁷ Estas fórmulas fueron empleadas en primer lugar por el griego *Ptolomeo de Alejandría* (ca. 100-170).

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$$



sumamos ambas igualdades
miembro a miembro

$$\frac{2\cos^2 a}{2\cos^2 a} = \frac{1 + \cos 2a}{2\cos^2 a} \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \Rightarrow \cos a = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (\text{C.Q.D.})$$

hacemos el cambio $a = \alpha/2$

La segunda expresión se demuestra de manera similar, pero restando al principio.
En cuanto a la tercera, su obtención es trivial.

- 2) El signo + o - se debe escoger en función de en qué cuadrante se encuentre $\alpha/2$, lo cual a su vez depende de en cuál esté α :

$$\alpha \in 1^{\text{er}} \text{ cuad.} \Rightarrow 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \Rightarrow 0^\circ \leq \alpha/2 \leq 45^\circ \Rightarrow \alpha/2 \in 1^{\text{er}} \text{ cuad.}$$

$$\alpha \in 2^\circ \text{ cuad.} \Rightarrow 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \Rightarrow 45^\circ \leq \alpha/2 \leq 90^\circ \Rightarrow \alpha/2 \in 1^{\text{er}} \text{ cuad.}$$

$$\alpha \in 3^{\text{er}} \text{ cuad.} \Rightarrow 180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ \Rightarrow 90^\circ \leq \alpha/2 \leq 135^\circ \Rightarrow \alpha/2 \in 2^\circ \text{ cuad.}$$

$$\alpha \in 4^\circ \text{ cuad.} \Rightarrow 270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \Rightarrow 135^\circ \leq \alpha/2 \leq 180^\circ \Rightarrow \alpha/2 \in 2^\circ \text{ cuad.}$$

(28)

Ejemplo 9: Hallar las razones de 15° , y comprobar con la calculadora.

Solución:

$$\sin 15^\circ = \sin \frac{30^\circ}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \cos \frac{30^\circ}{2} = + \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{tg} 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}}{\sqrt{4 - (\sqrt{3})^2}} = 2 - \sqrt{3}$$

Nótese que en las fórmulas de $\sin \alpha/2$ y $\cos \alpha/2$ hemos elegido el signo + delante del símbolo radical, pues $15^\circ \in 1^{\text{er}}$ cuadrante. Puede comprobarse con la calculadora la validez de estos resultados.

Ejercicios final tema: 43 a 56

III.10) Transformaciones de sumas (o restas) en productos:

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

(29)

Observaciones: 1) Vamos a demostrar la primera de las identidades⁸. Para ello partimos de las fórmulas de $\sin(\alpha + \beta)$ y $\sin(\alpha - \beta)$, [(24.1) y (25.1)], las cuales sumaremos miembro a miembro:

$$\begin{array}{rcl} \sin(\alpha + \beta) & = & \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha - \beta) & = & \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \oplus \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{sumamos ambas igualdades} \\ \text{miembro a miembro} \end{array}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cos\beta$$

Hacemos el cambio $\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{array} \right\}$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2} \quad (\text{C.Q.D.})$$

Las restantes expresiones se demuestran de manera similar, pero partiendo de la pareja de fórmulas apropiada. Demuéstrense como ejercicio.

2) También existen las transformaciones de productos en sumas:

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2} \\ \cos x \cos y &= \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2} \\ \sin x \cos y &= \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2} \end{aligned} \quad (30)$$

Estas fórmulas no serán utilizadas este curso, no así el siguiente. La tercera, por ejemplo, prácticamente ya fue obtenida en el primer paso de la demostración anterior. Las otras dos se demuestran análogamente (**ejercicio 60**).

Ejercicios final tema: 57

Identidades y ecuaciones trigonométricas:

«Una **identidad trigonométrica** es una igualdad en la que la variable o incógnita está en una razón trigonométrica, y que se verifica siempre, sea cual sea el valor de dicha variable». Ya hemos visto un gran número de identidades trigonométricas, la mayoría de las cuales hemos demostrado.

Ejemplo: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ es una identidad trigonométrica, pues se verifica $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pero existen infinidad de identidades trigonométricas, que siempre demostraremos partiendo de las fórmulas precedentes, y haciendo además, habitualmente, determinadas manipulaciones algebraicas.

Ejercicios final tema: 58, 59 y 60

«Una **ecuación trigonométrica** es una igualdad en la que la variable o incógnita está en una razón trigonométrica, y que se verifica para algunos valores de dicha incógnita».

⁸ Estas fórmulas fueron empleadas por primera vez –cada uno separadamente– por el sacerdote y geógrafo alemán *Johannes Werner* (1560-1622) y el insigne matemático francés *François Viète* (1540-1603).

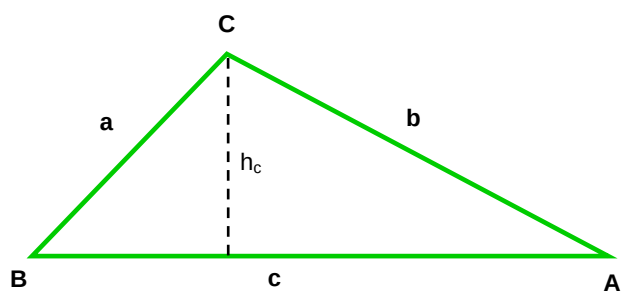
Ejemplo: $\sin^2 x - \sin x = 0$ es una ecuación trigonométrica, pues su solución, o mejor dicho sus ∞ soluciones son $x = k \cdot 180^\circ$; $x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$, donde $k \in \mathbb{Z}$ (ejercicio 62 g). Comprobar algunas soluciones.

Las ecuaciones trigonométricas se resuelven haciendo sustituciones mediante la aplicación de las fórmulas trigonométricas más habituales, seguidas de manipulaciones algebraicas, cambios de variable, etc. Algunas pueden requerir un arduo proceso.

Ejercicios final tema: 61, 62 y 63

IV) RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

IV.1) Teorema del seno:



Considerar el triángulo oblicuángulo (es decir, no rectángulo) de la figura. Se cumple que:

«Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos»

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (31)$$

Demostración: Trazamos una de las tres alturas, por ejemplo h_c , es decir, la correspondiente al lado c :

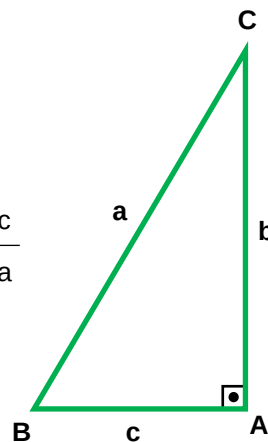
$$\left. \begin{array}{l} \sin A = \frac{h_c}{b}; h_c = b \sin A \\ \sin B = \frac{h_c}{a}; h_c = a \sin B \end{array} \right\} \Rightarrow b \sin A = a \sin B; \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad (\text{C.Q.D.})$$

La tercera expresión del teorema se obtiene análogamente.

Observaciones: 1) El teorema del seno se aplica habitualmente a triángulos oblicuángulos, pero nótese que también se cumple en un triángulo rectángulo (ver figura):

$$A = 90^\circ \Rightarrow \sin A = 1 \Rightarrow a = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \frac{b}{a}; \sin C = \frac{c}{a}$$

es decir, obtenemos las razones trigonométricas vistas en el apdo. I.6.



- 2) Recordar que a la hora de resolver un triángulo nos dan tres de sus elementos, es decir, tres letras, y hay que hallar los otros tres elementos. Pues bien, la expresión (31) **sólo tiene utilidad** lógicamente **cundo alguna de las tres letras está repetida**, pues en ese caso se puede aplicar una proporción con una sola incógnita.

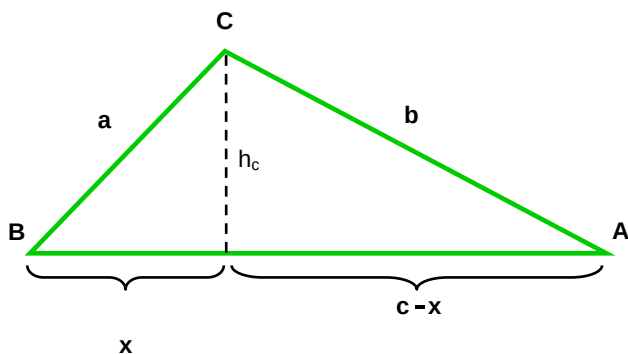
- 3) ¡Cuidado! Si utilizamos el teorema del seno para hallar un ángulo, recordar que hay dos arcosenos (que son suplementarios) y que uno de ellos puede que deba ser desechado. Por lo tanto se recomienda, **a la hora de hallar un ángulo, aplicar** siempre que sea posible **el teorema del coseno**.

Ejemplo 10: Dibujar el triángulo de datos $a=6\text{ m}$, $B=45^\circ$, $C=105^\circ$, y resolverlo. (**Ejercicio 64a**)

(Soluc: $A=30^\circ$, $b \approx 8,49\text{ m}$, $c \approx 11,59\text{ m}$)

Solución:

IV.2) Teorema del coseno:



En todo triángulo se cumple que:

«El cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido»

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \quad (32)$$

Demostración: Trazamos una de las tres alturas, por ejemplo h_c , es decir, la correspondiente al lado c , y aplicamos el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos en que nos queda dividido el triángulo original:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= h_c^2 + x^2 \\ b^2 &= h_c^2 + (c-x)^2 = h_c^2 + c^2 - 2cx + x^2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} a^2 - x^2 &= h_c^2 \\ b^2 - c^2 + 2cx - x^2 &= h_c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2cx = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad (\text{C.Q.D.})$$

$$\cos B = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cos B$$

Las otras dos expresiones se demuestran análogamente, sin más que considerar las otras dos alturas.

Observaciones: 1) El teorema del coseno se aplica habitualmente a triángulos oblicuángulos, pero nótese que también se cumple en un triángulo rectángulo. De hecho, es una generalización del teorema de Pitágoras (ver figura):

$$A = 90^\circ \Rightarrow \cos A = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

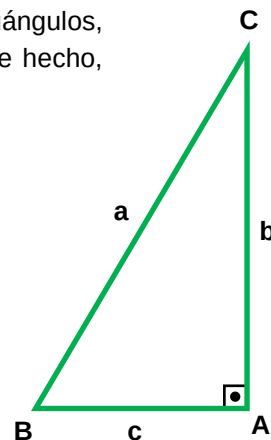
↪ sustituimos en (32.1)

Y si sustituimos esta expresión en (32.2):

$$\cancel{b^2} = \cancel{b^2} + c^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$\cancel{2ac} \cos B = \cancel{2c^2}$$

$$\cos B = \frac{c}{a}$$



Lo mismo ocurre con (32.3), es decir, obtenemos de nuevo las razones trigonométricas vistas en el apdo. I.6.

- 2) El teorema del coseno se utiliza sólo cuando los datos que nos dan son letras distintas (a diferencia del teorema del seno).
- 3) Ya hemos comentado que, **a la hora de hallar un ángulo, se recomienda aplicar el teorema del coseno**. De hecho, (31) se puede ver también de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned} \quad (33)$$

Ejemplo 11: Dibujar el triángulo de datos $a=10$ dam, $b=7$ dam, $C=30^\circ$, y resolverlo. (Ejercicio 64b)

(Soluc: $c \approx 5,27$ dam, $B \approx 41^\circ 38'$, $A \approx 108^\circ 22'$)

Solución:

4) ¿Cuándo aplicar uno u otro teorema? La siguiente tabla-resumen nos puede ayudar:

	DATOS:	¿EXISTENCIA de SOLUCIÓN?	RESOLUCIÓN:
UN LADO y 2 ÁNGULOS		Si $A+B < 180^\circ$	1º) $C = 180^\circ - (A+B)$ 2º) Los otros lados por th. del seno
DOS LADOS y el ÁNGULO COMPENDIDO		Siempre	Aplicar th. del coseno dos veces
DOS LADOS y el ÁNGULO OPUESTO a UNO de ELLOS (CASO DUDOSO)		Sale $\sin B > 1 \Rightarrow \nexists$ soluc.	Aplicar th. del seno dos veces
		Sale $\sin B = 1 \Rightarrow 1$ soluc. (es un triángulo rectángulo en B)	
		Sale $\sin B < 1 \Rightarrow$ puede haber 1 soluc., o 2 soluc (B_1 y B_2 suplementarios) (ver figura)	
TRES LADOS		Siempre que la suma de dos lados cualesquiera sea $>$ que el 3º lado	Aplicar th. del coseno dos veces

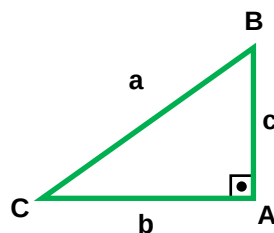
Ejercicios final tema: 64 hasta el final

V) ÁREA del TRIÁNGULO

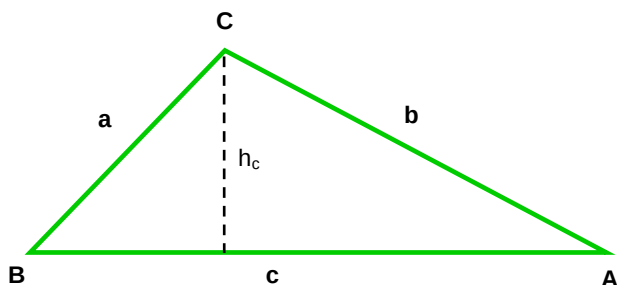
V.1) Triángulos rectángulos: Se recomienda la conocida fórmula:

$$A = \frac{1}{2} bc$$

(34)



V.2) Triángulos oblicuángulos: «El área del triángulo es igual al semiproducto de dos lados cualesquiera por el seno del ángulo comprendido»



$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} b c \operatorname{sen} A \\ A &= \frac{1}{2} a c \operatorname{sen} B \\ A &= \frac{1}{2} a b \operatorname{sen} C \end{aligned} \quad (35)$$

Demostración: Trazamos una de las tres alturas, por ejemplo h_c , es decir, la correspondiente al lado c , y aplicamos (34):

$$A = \frac{1}{2} c h_c = \frac{1}{2} b c \operatorname{sen} A \quad (\text{C.Q.D.})$$

$\operatorname{sen} A = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \operatorname{sen} A$

Las otras dos expresiones se demuestran análogamente, sin más que considerar las otras dos alturas.

Observaciones: 1) (35) es una generalización de (34). En efecto, si el triángulo es rectángulo, entonces $A=90^\circ$, con lo que $\operatorname{sen} A=1$, y (35.1) se convierte en (34).

2) También existe la conocida fórmula de Herón⁹ (ver demostración en Internet), que permite hallar cómodamente el área del triángulo, exclusivamente en función de sus lados:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad , \text{ donde } s \text{ es el semiperímetro, i.e. } s = \frac{a+b+c}{2} \quad (36)$$

⁹ Debida a *Herón de Alejandría*, matemático griego anterior al siglo I de nuestra era.

87 EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA

Repaso Trigonometría elemental:

1. Completar en el cuaderno la siguiente tabla:

Grados	105°		225°		320°		35°
Radianes		$4\pi/9$ rad		$\pi/15$ rad		1 rad	

2. Uso de la calculadora:

a) Hallar, con cuatro cifras decimales bien aproximadas, el valor de las siguientes razones trigonométricas:

sen 35° cos 70° tg 53° sen 26° 37' cos 78° 34' 8" tg 34° 12' 43"
 sec 12° cosec 23° ctg 54° sen 235° cos 105°

b) Dadas las siguientes razones trigonométricas, hallar el ángulo agudo α del que proceden:

sen $\alpha=0,25$ cos $\alpha=0,74$ tg $\alpha=3$ sec $\alpha=1,18$ ctg $\alpha=1,5$

 c) Dado cos $\alpha=0,2$, hallar, mediante calculadora, tg α , con cuatro decimales. (Soluc: $\approx 4,8990$)

d) Dado sen $\alpha=0,56$, hallar, mediante calculadora, cos α (Soluc: $\approx 0,8285$)

e) Dada tg $\alpha=2$, hallar, mediante calculadora, sen α (Soluc: $\approx 0,8944$)

f) Dada cosec $\alpha=3$, hallar, mediante calculadora, cos α (Soluc: $\approx 0,9428$)

g) Dada sec $\alpha=1,5$, hallar, mediante calculadora, tg α (Soluc: $\approx 1,1180$)

 h) Dada ctg $\alpha=3$, hallar, mediante calculadora, cosec α (Soluc: $\approx 3,1623$)

3. Resolver los siguientes **triángulos**, **rectángulos** en A, aplicando, siempre que sea posible relaciones trigonométricas (¡no el teorema de Pitágoras!); hallar también su área:

a) $a=320$ m, $B=47^\circ$ (Soluc: $C=43^\circ$; $b\approx 234,03$ m; $c\approx 218,24$ m; $S_{ABC}\approx 25537,64$ m²)

b) $a=42,5$ m, $b=35,8$ m (Soluc: $B\approx 57^\circ 23' 22''$; $C\approx 32^\circ 36' 38''$; $c\approx 22,90$ m; $S_{ABC}\approx 409,99$ m²)

c) $b=32,8$ cm, $B=22^\circ$ (Soluc: $C=68^\circ$; $a\approx 87,56$ cm; $c\approx 81,18$ cm; $S_{ABC}\approx 1331,40$ cm²)

d) $b=8$ mm, $c=6$ mm (Soluc: $B\approx 53^\circ 7' 48''$; $C\approx 36^\circ 52' 12''$; $a\approx 10$ mm; $S_{ABC}\approx 24$ mm²)

e) $a=8$ km, $b=6$ km (Soluc: $B\approx 48^\circ 35'$; $C\approx 41^\circ 25'$; $c\approx 5,30$ km; $S_{ABC}\approx 15,87$ km²)

f) $a=13$ m, $c=5$ m (Soluc: $B\approx 67^\circ 22' 48''$; $C\approx 22^\circ 37' 12''$; $b\approx 12$ m; $S_{ABC}\approx 30$ m²)

g) $c=42,7$ dam, $C=31^\circ$ (Soluc: $B=59^\circ$; $a\approx 82,91$ dam; $b\approx 71,06$ dam; $S_{ABC}\approx 1517,23$ dam²)

h) $c=124$ dm, $B=67^\circ 21'$ (Soluc: $C\approx 22^\circ 39'$; $a\approx 321,99$ dm; $b\approx 297,16$ dm; $S_{ABC}\approx 18423,9$ dm²)

4. Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45° y si se apoya sobre la otra forma un ángulo de 30° . Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza sobre cada fachada?

(Soluc: anchura $\approx 15,73$ m; altura 7,07 y 5 m respectivamente)

Razones trigonométricas en cualquier cuadrante:

5. Expresar los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo positivo menor de 360° o 2π rad (hacer el dibujo en el caso de los cinco primeros):

a) 1100° b) $19\pi/3$ rad c) 2970° d) -300° e) -1040° f) 10π rad g) $43\pi/4$ rad
h) 3500° i) $32\pi/3$ rad j) -2620° k) $63\pi/5$ rad l) $43\pi/6$ rad m) 4980° n) -1950°

(Soluc: a) 20° ; b) $\pi/3$ rad; c) 90° ; d) 60° ; e) 40° ; f) 0 rad; g) $3\pi/4$ rad; h) 260° ; i) $2\pi/3$ rad; j) 260° ; k) $3\pi/5$ rad; l) $7\pi/6$ rad; m) 300° ; n) 210°)

6. Sobre **papel milimetrado**, y para cada uno de los apartados que figuran a continuación, trazar una circunferencia de radio unidad (usar e indicar una escala conveniente), señalar en ella los ángulos en cuestión (utilizar para ello un transportador de ángulos) y trazar su seno y coseno, medir éstos aproximadamente, y comparar el resultado obtenido con la calculadora:

a) 30° y 150° b) 45° y 225° c) 90° , 180° y 270° d) 60° y 300° e) 0° , 60° y 120°

7. Utilizando la calculadora, construir una tabla de valores apropiada para representar, sobre **papel milimetrado**, las funciones $\sin x$, $\cos x$ y $\tan x$ (Pueden verse dichas gráficas en el anexo final de este libro)

8. Sabiendo que $\cos \alpha = -3/5$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, calcular las restantes razones trigonométricas mediante identidades trigonométricas (no usar decimales). Comprobar el resultado hallando α con la calculadora.

(Soluc: $\sin \alpha = -4/5$, $\tan \alpha = 4/3$; $\alpha \approx 233^\circ 7' 48''$)

9. Sabiendo que $\tan \alpha = -3/4$ y $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante, calcular las restantes razones trigonométricas, y comprobar.

(Soluc: $\sin \alpha = -3/5$, $\cos \alpha = 4/5$; $\alpha \approx 323^\circ 7' 48''$)

10. Ídem con $\sec \alpha = 2$ y $0 < \alpha < \pi/2$ (Soluc: $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$, $\cos \alpha = 1/2$, $\tan \alpha = \sqrt{3}$; $\alpha = 60^\circ$)

11. Ídem con $\tan \alpha = -3$ y $\pi/2 < \alpha < \pi$ (Soluc: $\sin \alpha = 3\sqrt{10}/10$, $\cos \alpha = -\sqrt{10}/10$)

12. Ídem con $\cos \alpha = 0,2$ y $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ (Soluc: $\sin \alpha = -2\sqrt{6}/5$, $\tan \alpha = -2\sqrt{6}$)

13. Ídem con $\sin \alpha = -0,3$ y $\pi < \alpha < 3\pi/2$ (Soluc: $\cos \alpha = -0,95$, $\tan \alpha = 0,31$; $\alpha \approx 197^\circ 27' 27''$)

14. Ídem con $\tan \alpha = 4/3$ y $\pi < \alpha < 3\pi/2$ (Soluc: $\sin \alpha = -4/5$, $\cos \alpha = -3/5$)

15. Calcular las restantes razones trigonométricas sabiendo que:

a) $\cos \alpha = 4/5$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$	e) $\sin \alpha = 1/4$	$\alpha \in 1^{\text{er}}$ cuad.	i) $\tan \alpha = 3/4$	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$
b) $\tan \alpha = 3/4$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	f) $\cos \alpha = -1/3$	$\alpha \in 2^\circ$ cuad.	j) $\sec \alpha = -\sqrt{2}$	$\alpha \in 3^{\text{er}}$ cuad.
c) $\sin \alpha = 3/5$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	g) $\operatorname{cosec} \alpha = -2$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	k) $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{5}$	$\alpha \in 2^\circ$ cuad.
d) $\operatorname{ctg} \alpha = -2$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	h) $\sec \alpha = 1$	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$		

(Soluc: a) $\sin \alpha = -3/5$, $\tan \alpha = -3/4$; b) $\sin \alpha = -3/5$, $\cos \alpha = -4/5$; c) $\cos \alpha = -4/5$, $\tan \alpha = -3/4$; d) $\sin \alpha = \sqrt{5}/5$, $\cos \alpha = -2\sqrt{5}/5$; g) $\sin \alpha = -1/2$, $\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$; j) $\sin \alpha = -\sqrt{2}/2$, $\tan \alpha = 1$; k) $\sin \alpha = \sqrt{5}/5$, $\cos \alpha = -2\sqrt{5}/5$)

16. Determinar los valores de $\sin \alpha$ y $\tan \alpha$ sabiendo que $\tan \alpha > 0$ y $\cos \alpha = -5/12$

17. Encontrar el ángulo α y las demás razones trigonométricas sabiendo que $\sin \alpha = 1/2$ y $\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$

18. Resolver las siguientes **ecuaciones trigonométricas** sencillas:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\operatorname{tg} x = 1$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\cos x = \frac{1}{2}$ f) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Reducción al 1^{er} cuadrante:

19. Hallar, **sin calculadora**: a) $\sin 570^\circ$ b) $\cos 14520^\circ$ c) $\sin (-120^\circ)$ d) $\cos (-240^\circ)$
e) $\operatorname{tg} 2565^\circ$ f) $\cos 15\pi/2$ rad g) $\sin 55\pi/6$ rad h) $\operatorname{tg} 79\pi$ rad

(Soluc: a) $-1/2$; b) $-1/2$; c) $-\sqrt{3}/2$; d) $-1/2$; e) 1 ; f) 0 ; g) $-1/2$; h) 0)

20. Ídem: a) $\cos 225^\circ$ b) $\cos(-60^\circ)$ c) $\operatorname{tg} 120^\circ$ d) $\sin (-1470^\circ)$ e) $\operatorname{tg} 900^\circ$
f) $\sin 19\pi/6$ rad g) $\cos 11\pi$ rad h) $\cos(-1950^\circ)$ i) $\operatorname{tg} 29\pi/4$ rad j) $\sin 11\pi/4$ rad
k) $\operatorname{tg} 22\pi/3$ rad

(Soluc: a) $-\sqrt{2}/2$; b) $1/2$; c) $-\sqrt{3}$; d) $-1/2$; e) 0 ; f) $-1/2$; g) -1 ; h) $-\sqrt{3}/2$; i) 1 ; j) $-\sqrt{2}/2$; k) $\sqrt{3}$)

21. Expresar las siguientes razones en función de la de un ángulo del 1^{er} cuadrante:

a) $\sin 1485^\circ$ b) $\cos 1560^\circ$ c) $\sin 1000^\circ$ a) $\sin 190^\circ$ (Soluc: $\sin 45^\circ$; $-\cos 60^\circ$; $-\sin 80^\circ$; $\sin 70^\circ$)

22. Ídem: a) $\sin 1300^\circ$ b) $\cos (-690^\circ)$ c) $\operatorname{tg} 170^\circ$ d) $\sin (-1755^\circ)$ e) $\sin (-120^\circ)$ f) $\operatorname{ctg} (-150^\circ)$
g) $\sin 2700^\circ$ h) $\sec (-25^\circ)$ i) $\cos (-30^\circ)$ j) $\operatorname{cosec} 4420^\circ$

(Soluc: a) $-\sin 40^\circ$; b) $\cos 30^\circ$; c) $-\operatorname{tg} 10^\circ$; d) $\sin 45^\circ$; e) $-\sin 60^\circ$; f) $\operatorname{ctg} 30^\circ$; g) 0 ; h) $\sec 25^\circ$; i) $\cos 30^\circ$; j) $\operatorname{cosec} 80^\circ$)

23. Expresar seno, coseno y tangente de 1755° en función de un ángulo del 1^{er} cuadrante. Comprobar el resultado con la calculadora.

Razones trigonométricas de adición y sustracción:

24. a) Hallar mediante las fórmulas trigonométricas correspondientes (sin calculadora, y sin utilizar decimales) el seno, coseno y tangente de 75° .

b) Utilizando los resultados anteriores, calcular, de la forma más rápida posible, (sin calculadora y sin utilizar decimales) el seno y la tangente de los siguientes ángulos:

i) 105° ii) 165° iii) 15° iv) 195° v) 135°

(Comprobar todos los resultados con la calculadora)

25. Si $\sin x = 12/13$ y $\sin y = 4/5$, siendo x e $y \in 1^{\text{er}}$ cuadrante, calcular:

a) $\sin (x+y)$ b) $\sin (x-y)$ c) $\cos (x+y)$ d) $\cos (x-y)$

(Soluc: a) $56/65$; b) $16/65$; c) $-33/65$; d) $63/65$)

26. Si $\operatorname{tg} a = 3/4$, hallar $\operatorname{tg} (a+30^\circ)$ y $\operatorname{tg} (45^\circ - a)$ Soluc: $\frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$; $\frac{1}{7}$

27. Dado $\alpha \in 4^\circ \text{cuad.}$ tal que $\cos \alpha = 1/2$, hallar $\operatorname{tg} (45^\circ + \alpha)$ (Soluc: $\sqrt{3} - 2$)

28. Hallar el seno y el coseno de 9° y 6° en función de $\cos 36^\circ$

29. Hallar, sin calculadora, $\frac{8 \sin 105^\circ}{\sin 45^\circ}$ (Soluc: $4+4\sqrt{3}$)

Razones trigonométricas de $-\alpha$, $180-\alpha$, $180+\alpha$, etc:

30. Siendo $\operatorname{tg} x = 2/3$ calcular: a) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ b) $\operatorname{tg}(\pi - x)$ c) $\operatorname{tg}(\pi + x)$ (Soluc: $3/2$; $-2/3$; $2/3$)

31. Sabiendo que $\operatorname{tg} a = 3/2$ y que $a \in 1^{\text{er}}$ cuadr., calcular:

a) $\cos(\pi + a)$ b) $\cos(2\pi - a)$ c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ d) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$

(Soluc: a) $-2\sqrt{13}/13$; b) $2\sqrt{13}/13$; c) $2\sqrt{13}/13$; d) $2\sqrt{13}/13$)

32. Expresar únicamente en función de las razones trigonométricas de α :

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ b) $\cos\left(\alpha - \frac{9\pi}{2}\right)$ c) $\operatorname{tg}(\alpha + 5\pi)$ d) $\sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$ e) $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)$

(Soluc: a) $\sin \alpha$; b) $\sin \alpha$; c) $\operatorname{tg} \alpha$; d) $-\cos \alpha$; e) $-\operatorname{tg} \alpha$)

33. Simplificar las siguientes expresiones: a) $\sin(\alpha + 5\pi) + \sin(\alpha - \pi) + \sin(\alpha + 2\pi) + \sin(\alpha + \pi)$

b) $\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ) + \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)$

(Soluc: a) $-2 \sin \alpha$; b) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$)

34. Calcular $\sin(5\pi - x)$ sabiendo que $\cos x = 0,5$ y $x \in 4^\circ$ cuadr. (Soluc: $-\sqrt{3}/2$)

Razones trigonométricas del ángulo doble:

35. Calcular el seno y el coseno de 20° en función de $\sin 10^\circ$, y comprobar el resultado con la calculadora.

36. Hallar $\sin 2x$, $\cos 2x$ y $\operatorname{tg} 2x$, siendo $x \in 1^{\text{er}}$ cuadrante, en cada uno de los siguientes casos:

a) $\sin x = 1/2$ b) $\cos x = 3/5$ c) $\sin x = 5/13$

(Soluc: a) $\sqrt{3}/2$; $1/2$; $\sqrt{3}$ b) $24/25$; $-7/25$; $-24/7$ c) $120/169$; $119/169$; $120/119$)

37. Dado $a \in 3^{\text{er}}$ cuadrante tal que $\operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, hallar las razones trigonométricas del ángulo $2a$.

(Soluc: $\sin 2a = \sqrt{3}/2$; $\cos 2a = 1/2$)

37b Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica (sin calculadora), el ángulo a del ejercicio anterior, y comprobar. (Soluc: $a = 210^\circ$)

38. Expresar $\sin 3a$ y $\cos 3a$ en función de $\sin a$ y $\cos a$ respectivamente

(Soluc: $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$; $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$)

39. Si $\cos \alpha = 1/5$ y $\alpha \in 1^{\text{er}}$ cuadrante, calcular las razones trigonométricas del ángulo $90^\circ - 2\alpha$

(Soluc: $-23/25$; $4\sqrt{6}/25$; $-23\sqrt{6}/24$)

40. Si $\operatorname{ctg} \alpha = 4/3$, hallar $\cos 2\alpha$ (Soluc: $7/25$)

41. Dada $\operatorname{tg} a = \sqrt{3}$ y $a \in 3^{\text{er}}$ cuadrante, hallar las razones de $2a$. (Soluc: $\operatorname{sen} 2a = \sqrt{3}/2$; $\operatorname{cos} 2a = -1/2$)

41b. Hallar el ángulo a del ejercicio anterior y comprobar, sin calculadora, el resultado anterior. (Soluc: $a = 240^\circ$)

42. Sabiendo que $\operatorname{tg} 2a = \sqrt{3}$, hallar $\operatorname{sen} a$ y $\operatorname{cos} a$, sabiendo que $a < 90^\circ$. ¿De qué ángulo a se trata?

(Soluc: $\operatorname{sen} a = 1/2$; $\operatorname{cos} a = \sqrt{3}/2$; $a = 30^\circ$)

Razones trigonométricas del ángulo mitad:

43. Calcular $\operatorname{tg} \pi/8$ (Soluc: $\sqrt{2} - 1$)

44. Dado $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante tal que $\sec \alpha = 2$, hallar $\operatorname{cos} \alpha/2$

Soluc: $\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)

44b. Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo α del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) el resultado anterior.

(Soluc: $\alpha = 300^\circ$)

45. Sea un ángulo a situado en el 2° cuadrante tal que $\operatorname{tg} a = -3/4$. Hallar las razones trigonométricas del ángulo $a/2$.

Soluc: $\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\operatorname{cos} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$)

45b. Comprobar con la calculadora el resultado del ejercicio anterior. (Soluc: $a \approx 143^\circ 7' 48''$)

46. Dado $a \in 3^{\text{er}}$ cuadrante tal que $\operatorname{sen} a = -1/2$, hallar las razones de $a/2$. ¿De qué ángulo a se trata?

Soluc: $\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $\operatorname{cos} \frac{a}{2} = \frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $a = 210^\circ$)

47. Volver a hacer el ejercicio 42, pero aplicando las fórmulas del ángulo mitad (Ayuda: para ello, plantear el cambio de variable $a = \alpha/2$).

48. Dado $a \in 4^\circ$ cuadrante con $\operatorname{tg} a = -\sqrt{3}$, hallar las razones de $a/2$

(Soluc: $\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$; $\operatorname{cos} \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)

48b. Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo a del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) los resultados anteriores.

(Soluc: $a = 300^\circ$)

49. Dado $\alpha \in 3^{\text{er}}$ cuadrante tal que $\operatorname{cos} \alpha = -1/2$, hallar, utilizando la fórmula correspondiente (resultados simplificados y racionalizados; no vale utilizar decimales), y **por este orden**:

a) $\operatorname{sen} 2\alpha$ (Soluc: $\sqrt{3}/2$)

b) $\operatorname{cos} \alpha/2$ (Soluc: $-1/2$)

c) $\operatorname{sen} (\alpha - 30^\circ)$ (Soluc: $-1/2$)

d) $\operatorname{tg} (\alpha + 60^\circ)$ (Soluc: $-\sqrt{3}$)

e) Razonar mediante la circunferencia goniométrica (no vale con calculadora) de qué α se trata, Comprobar.

(Soluc: 240°)

50. Ídem, dado $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante tal que $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$

a) $\operatorname{cos} (\alpha + 30^\circ)$ (Soluc: $\sqrt{3}/2$)

b) $\operatorname{tg} (\alpha - 45^\circ)$ (Soluc: $2 + \sqrt{3}$)

- c) $\sin(\alpha + 1650^\circ)$ (Soluc: $1/2$)
d) $\sin \alpha/2$ (Soluc: $1/2$)
e) $\cos 2\alpha$ (Soluc: $-1/2$)
f) Razonar (sin calculadora) de qué α se trata, y comprobar. (Soluc: 300°)

51. Ídem con $\alpha \in 3^{\text{er}}$ cuadrante tal que $\sec \alpha = -3$

- a) $\sin(\alpha - 60^\circ)$ (Soluc: $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})/6$)
b) $\tan(\alpha + 45^\circ)$ (Soluc: $-(9 + 4\sqrt{2})/7$)
c) $\cos(\alpha - 2640^\circ)$ (Soluc: $(1 - 2\sqrt{6})/6$)
d) $\cos \alpha/2$ (Soluc: $-\sqrt{3}/3$)
e) $\sin 2\alpha$ (Soluc: $4\sqrt{2}/9$)
f) Razonar, mediante calculadora y circunferencia trigonométrica, de qué α se trata. (Soluc: $\cong 250^\circ 31' 44''$)

52. Dado $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante tal que $\sin \alpha = -\sqrt{3}/2$ hallar, **mediante las correspondientes fórmulas trigonométricas** (resultados racionalizados y simplificados; no vale usar decimales):

- a) $\cos \alpha / 2$ (Soluc: $-\sqrt{3}/2$)
b) $\sin(1200^\circ - 2\alpha)$ (Soluc: $-\sqrt{3}/2$)

53. Sabiendo que $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y que $\pi \leq \alpha \leq 3\pi/2$, hallar **mediante identidades fórmulas trigonométricas** (resultados racionalizados y simplificados; no usar decimales):

- a) $\sin \alpha / 2$ Soluc: $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$
b) $\cos(2\alpha + 930^\circ)$ Soluc: 0

54. Dado $\alpha \in 2^\circ$ cuadrante tal que $\sin \alpha = \sqrt{2}/2$ hallar, **mediante las correspondientes fórmulas trigonométricas** (resultados racionalizados y simplificados; no vale usar decimales):

- a) $\sin(\alpha + 2010^\circ)$ (Soluc: $(\sqrt{2} - \sqrt{6})/4$)
b) $\tan 2\alpha$ Soluc: $\#$
c) $\cos \frac{\alpha}{2}$ Soluc: $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

55. Ídem con $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante tal que $\cotg \alpha = -1$:

- a) $\tan(2580^\circ - \alpha)$ (Soluc: $-2 - \sqrt{3}$)
b) $\cos 2\alpha$ (Soluc: 0)
c) $\sin \frac{\alpha}{2}$ Soluc: $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

56. Ídem con $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante y $\cos \alpha = 4/5$:

- a) $\tan(180^\circ - \alpha)$ (Soluc: $3/4$)
b) $\cos 2\alpha$ (Soluc: $7/25$)
c) $\sin \frac{\alpha}{2}$ (Soluc: $\sqrt{10}/10$)

Transformación de sumas en productos:

57. Transformar en producto y calcular (comprobar con la calculadora):

a) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$

b) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$

c) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

(Soluc: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{6}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Identidades trigonométricas:

58. Simplificar:

a) $\frac{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}$

(Soluc: $\tan 3\alpha$)

b) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$

(Soluc: $2 \cot \alpha$)

c) $\frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha}$

(Soluc: 1)

d) $2 \tan x \cos^2 \frac{x}{2} - \sin x$

(Soluc: $\tan x$)

e) $2 \tan \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha$

(Soluc: $\tan \alpha$)

f) $\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)}$

(Soluc: $\cot a$)

g) $\frac{1 + \cot \alpha \cdot \tan \beta}{\cot \alpha - \tan \beta}$

[Soluc: $\tan(\alpha + \beta)$]

h) $\frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$

(Soluc: $\cos x$)

59. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = 2 \tan^2 \alpha$

b) $\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha = \sin \alpha$

c) $\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) = \cos \beta$

d) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$

e) $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

f) $\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \operatorname{cosec} A - \cot A$

g) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \tan^2 \frac{\alpha}{2}$

h) $\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \alpha \sin \beta$

i) $\sin^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2A$

j) $\frac{2 \sin x}{\tan 2x} = \cos x - \sin x \cdot \tan x$

k) $\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \sin x$

l) $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} = \sec x + \tan x$

m) $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \tan^2 x$

60. Demostrar las siguientes fórmulas, llamadas **transformaciones de productos en sumas**:

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$$

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2}$$

Ecuaciones trigonométricas:

61. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas **elementales**:

- | | |
|---|--|
| a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Sol: $x=60^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=120^\circ+k\cdot 360^\circ$) | h) $\operatorname{cosec} x = -2$ (Sol: $x=210^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=330^\circ+k\cdot 360^\circ$) |
| b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Sol: $x=135^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=225^\circ+k\cdot 360^\circ$) | i) $\sec x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (Sol: $x=150^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=210^\circ+k\cdot 360^\circ$) |
| c) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ (Sol: $x=150^\circ+k\cdot 180^\circ$) | j) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ (Sol: $x=60^\circ+k\cdot 180^\circ$) |
| d) $\sin x = \frac{1}{3}$ ($x \cong 19^\circ 28' 16'' + k \cdot 360^\circ$; $x \cong 160^\circ 31' 44'' + k \cdot 360^\circ$) | k) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}$ (Sol: $\nexists$ soluc) |
| e) $\cos x = -\frac{4}{5}$ ($x \cong 143^\circ 7' 48'' + k \cdot 360^\circ$; $x \cong 216^\circ 52' 12'' + k \cdot 360^\circ$) | l) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (Sol: Se verifica $\forall x \in \mathbb{R}$) |
| f) $\sin x = 0$ (Sol: $x=k\cdot 180^\circ$) | m) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Sol: $x=10^\circ+k\cdot 120^\circ$; $x=110^\circ+k\cdot 120^\circ$) |
| g) $\cos x = -1$ (Sol: $x=(2k+1)\cdot 180^\circ$) | n) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ [Sol: $x=2k\pi$; $x=(4k+1)\cdot \pi/2$] |

62. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas **más elaboradas**:

- | | |
|--|--|
| a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ (Sol: $x=45^\circ+k\cdot 360^\circ$) | o) $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$ (Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$; $x=45^\circ+k\cdot 180^\circ$) |
| b) $\sin x - 2\cos 2x = -\frac{1}{2}$
(Sol: $30^\circ, 150^\circ, \cong 311^\circ 24' 35''$ y $\cong 228^\circ 35' 25''$) | p) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$ (Sol: $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=150^\circ+k\cdot 360^\circ$) |
| c) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ (Sol: $x=45^\circ+k\cdot 180^\circ$) | q) $4\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$ (Sol: $x=k\cdot 180^\circ$; $x=45^\circ+k\cdot 90^\circ$) |
| d) $\sin 2x = \cos x$
(Sol: $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=150^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$) | r) $4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$
(Sol: $x=36^\circ 52' 11,6'' + k \cdot 180^\circ$; $x=135^\circ + k \cdot 180^\circ$) |
| e) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$ (Sol: $x=k\cdot 360^\circ$; $x=120^\circ+k\cdot 360^\circ$) | s) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = \frac{1}{2}$ (Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$) |
| f) $2\cos^2 x - \sin^2 x + 1 = 0$ (Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$) | t) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$ (Sol: $x=k\cdot 360^\circ$) |
| g) $\sin^2 x - \sin x = 0$ (Sol: $x=k\cdot 180^\circ$; $x=90^\circ+k\cdot 360^\circ$) | u) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$
(Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$; $x=60^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=300^\circ+k\cdot 360^\circ$) |
| h) $2\cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$
(Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$; $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=330^\circ+k\cdot 360^\circ$) | v) $\cos 2x + 3\sin x = 2$ |
| i) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$ (Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$) | w) $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = 1$ |
| j) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ (Sol: $x=45^\circ+k\cdot 90^\circ$) | x) $\cos x \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ |
| k) $2\cos^2 x + \sin x = 1$
(Sol: $x=90^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=210^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=330^\circ+k\cdot 360^\circ$) | y) $2\sin x = \operatorname{tg} 2x$ |
| l) $3\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$
(Sol: $x=k\cdot 180^\circ$; $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=210^\circ+k\cdot 360^\circ$) | z) $\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$ |
| m) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2} \sin x = 0$ (Sol: $x=\pi/4+k\cdot \pi$) | α) $\sin 2x \cos x = 6\sin^3 x$ |
| n) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$
(Sol: $x=60^\circ+k\cdot 360^\circ$; $x=300^\circ+k\cdot 360^\circ$) | β) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x = 1$ |
| | γ) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$ (Sol: $x=150^\circ+k\cdot 360^\circ$) |

63. Resolver las siguientes ecuaciones, transformando las sumas y diferencias en productos:

a) $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$

b) $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$

c) $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$

d) $\sin 3x - \cos 3x = \sin x - \cos x$

Resolución de triángulos oblicuángulos:

64. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con * se indica el caso dudoso):

a) $a=6$ m, $B=45^\circ$, $C=105^\circ$ (Soluc: $A=30^\circ$, $b \approx 8,49$ m, $c \approx 11,59$ m, $S_{ABC} \approx 24,60$ m²)

b) $a=10$ dam, $b=7$ dam, $C=30^\circ$ (Soluc: $c \approx 5,27$ dam, $B \approx 41^\circ 38'$, $A \approx 108^\circ 22'$)

c) $b=35,42$ dm, $A=49^\circ 38'$, $B=70^\circ 21'$ (Soluc: $C=60^\circ 1'$, $a \approx 28,66$ dm, $c \approx 32,58$ dm, $S_{ABC} \approx 439,94$ dm²)

d) $a=13$ m, $b=14$ m, $c=15$ m (Soluc: $A \approx 53^\circ 7' 48''$, $B \approx 59^\circ 29' 23''$, $C \approx 67^\circ 22' 48''$, $S_{ABC} \approx 84$ m²)

* e) $a=42$, $b=32$, $B=40^\circ 32'$ (Soluc: $A_1 \approx 58^\circ 32'$, $C_1 \approx 80^\circ 56'$, $c_1 \approx 48,62$; $S_{ABC} \approx 663,55$
 $A_2 \approx 121^\circ 28'$, $C_2 \approx 18^\circ$, $c_2 \approx 15,22$; $S_{ABC} \approx 207,72$)

f) $a=15$, $b=22$, $c=17$ (Soluc: $A \approx 42^\circ 54'$, $B \approx 86^\circ 38'$, $C \approx 50^\circ 28'$)

g) $a=10$ mm, $b=7$ mm, $C=60^\circ$ (Soluc: $c \approx 8,89$ mm, $A \approx 76^\circ 59' 46''$, $B \approx 43^\circ 0' 14''$, $S_{ABC} \approx 30,31$ mm²)

h) $a=10$, $b=9$, $c=7$ (Soluc: $A \approx 76^\circ 14'$, $B \approx 60^\circ 56'$, $C \approx 42^\circ 50'$, $S_{ABC} \approx 30,59$)

* i) $a=60$ cm, $b=40$ cm, $A=42^\circ$ (Soluc: $B \approx 26^\circ 30'$, $c \approx 83,43$ cm, $C \approx 111^\circ 30'$, $S_{ABC} \approx 116,5$ cm²)

* j) $a=40$ cm, $b=60$ cm, $A=72^\circ$ (Soluc: $\nexists$ soluc)

* k) $a=50$, $b=60$, $A=42^\circ$ (Soluc: $B_1 \approx 53^\circ 25'$, $C_1 \approx 84^\circ 35'$, $c_1 \approx 74,39$
 $B_2 \approx 126^\circ 35'$, $C_2 \approx 11^\circ 25'$, $c_2 \approx 14,79$)

l) $A=30^\circ$, $B=45^\circ$, $b=\sqrt{2}$ m (Soluc: $C=105^\circ$, $a=1$ m, $c \approx 1,93$ m, $S_{ABC} \approx 0,68$ m²)

m) $b=3$ hm, $c=2$ hm, $A=60^\circ$ (Soluc: $a=\sqrt{7}$ hm, $B \approx 79^\circ$, $C \approx 40^\circ 54'$, $S_{ABC} \approx 3\sqrt{3}/2$ hm²)

n) $A=30^\circ$, $b=\sqrt{3}$, $c=1$ (Soluc: $a=1$; $B=120^\circ$, $C=30^\circ$, $S_{ABC} \approx 0,43$)

* o) $a=4$, $b=5$, $B=30^\circ$ (Soluc: $A \approx 23^\circ 34' 41''$, $C \approx 126^\circ 25' 19''$, $c \approx 8,05$, $S_{ABC} \approx 8,05$)

p) $a=1792$, $b=4231$, $c=3164$ (Soluc: $A \approx 22^\circ 41' 37''$, $B \approx 114^\circ 22' 14''$, $C \approx 42^\circ 56' 9''$, $S_{ABC} \approx 2582339,03$)

* q) $a=12$ hm, $b=57$ hm, $A=150^\circ$ (Soluc: $\nexists$ soluc)

r) $a=72$, $b=57$, $C=75^\circ 47'$

s) $c=3,78$, $A=105^\circ$, $B=38^\circ 47'$ (Soluc: $C \approx 36^\circ 13'$, $a \approx 6,18$, $b \approx 4,01$, $S_{ABC} \approx 37,60$)

* t) $a=40$, $b=60$, $A=12^\circ$ (Soluc: Hay dos soluciones)

* u) $a=60$, $b=40$, $A=82^\circ$ (Soluc: Hay una solución)

v) $a=8$ m, $B=30^\circ$, $C=105^\circ$ (Soluc: $b \approx 5,66$ m, $c \approx 10,93$ m, $S_{ABC} \approx 21,86$ m²)

w) $A=60^\circ$, $B=75^\circ$, $c=\sqrt{2}$ m

x) $a=4$ km, $B=45^\circ$, $C=60^\circ$

y) $a=4$ mm, $b=3$ mm, $c=6$ mm (Soluc: $A \approx 36^\circ 20' 10''$, $B \approx 26^\circ 23' 4''$, $C \approx 117^\circ 16' 47''$, $S_{ABC} \approx 5,33$ mm²)

z) $a=1$ cm, $c=2$ cm, $B=60^\circ$

α) $a=5$ dam, $b=3$ dam, $c=4$ dam

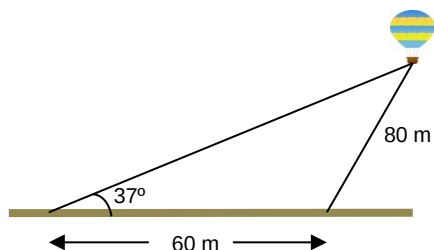
* β) $b=10$ dm, $c=9$ dm, $C=45^\circ$ (Soluc: Hay dos soluciones)

- γ) $A=30^\circ$, $b=10$ m, $C=75^\circ$ (Soluc: $B=75^\circ$, $a \approx 5,18$ m, $c=10$ m, $S_{ABC}=25$ m²)
 δ) $a=8$ m, $B=85^\circ$, $C=105^\circ$ (Soluc: $\nexists$ soluc)

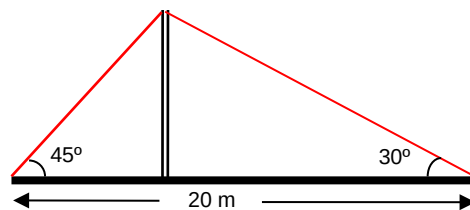
65. Resolver el triángulo ABC sabiendo que su perímetro es 24 cm, es rectángulo en A y $\sin B=3/5$
 (Soluc: $a=10$ cm, $b=6$ cm, $c=8$ cm)
66. Calcular el área de un triángulo de datos $a=8$ m, $B=30^\circ$, $C=45^\circ$ (Soluc: $\approx 11,71$ m²)
67. En un paralelogramo ABCD el lado AB mide 6 cm, el AD 8 cm, y el ángulo $A=30^\circ$. Hallar sus diagonales.
68. Hallar los lados de un triángulo sabiendo que su área mide 18 cm² y dos de sus ángulos $A=30^\circ$ y $B=45^\circ$
 (Soluc: $a \approx 5,13$ cm, $b \approx 7,26$ cm, $c \approx 9,92$ cm)
69. **TEORÍA:** Demostrar, utilizando el teorema del coseno, que el triángulo de lados 9, 12 y 15 es rectángulo.
- * 70. Uno de los lados de un triángulo es doble que el otro, y el ángulo comprendido vale 60° . Hallar los otros dos ángulos. (Soluc: 30° y 60°)

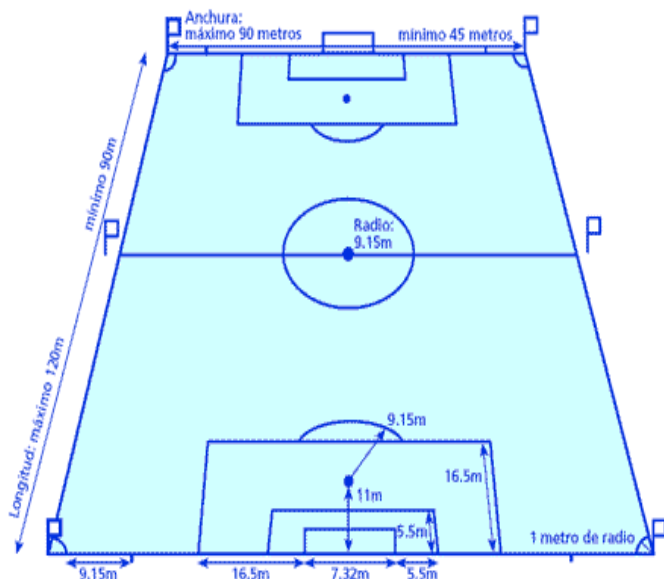
16 problemas de planteamiento:

71. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser 30° . A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45° . Calcular la altura de la montaña.
 (Soluc: $\approx 136,60$ m)
72. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de 20° y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120° . ¿Cuál es la anchura del río? (Soluc: $\approx 53,21$ m)
73. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120° . ¿Cuánto distan A y C? (Soluc: $\approx 13,08$ km)
74. Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil?
 (Sol: cable=25 m; mástil $\approx 7,32$ m)



75. Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37° . Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. (Sol: $\approx 71,80$ m y 119,31 m, respectivamente)

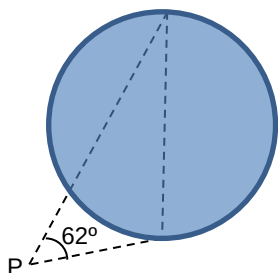
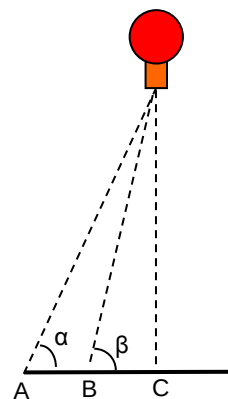




explique la situación). (Sol: $\cong 77,44 \text{ m}$)

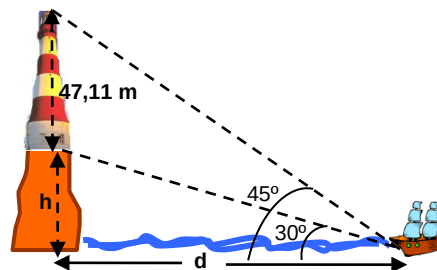
- 78.** Dos barcos salen simultáneamente de un puerto con rumbos que forman un ángulo de 82° . El primero navega a 18 millas por hora, y el segundo a 25 millas por hora. Si mantienen inalterados los rumbos, ¿cuánto distarán entre sí al cabo de 3 horas?
(Soluc: $\approx 86,10$ millas)

- 79.** Para hallar la altura a la que está situado un globo, Rosa se coloca en un punto B y Carlos en un punto A, a 5 m de ella, de tal forma que los puntos A, B y C están alineados (ver figura). Si los ángulos α y β miden 45° y 50° respectivamente, ¿a qué altura se encuentra el globo? (Obligatorio resolverlo por th, del seno o coseno, y en el menor número de pasos). (Soluc: $\approx 31,08$ m)



- 80.** Para calcular la anchura de un lago circular un observador se sitúa en un punto P que dista 851 m de uno de los extremos y 122 m del otro (ver figura). Desde allí, el ángulo que abarca esos dos extremos es de 62° . ¿Cuál es la anchura del lago? (Obligatorio resolverlo por th, del seno o coseno, y en el menor número de pasos). (Soluc: ≈ 801 m)

- 81.** En la figura adjunta, hallar la altura del acantilado, h , y la distancia del barco al pie del promontorio, d . (Soluc: $h \cong 2,89 \text{ m}$; $d \cong 50 \text{ m}$)
- 82.** Con tres varas metálicas de 4, 5 y 6 cm se diseña una pieza triangular. Hallar los tres ángulos, y el área de la pieza.



- 83.** Calcular la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas: 1º) El ángulo que forma la visual hacia la luz con el horizonte es de 25° 2º) Nos alejamos 200 m y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10° (Soluc: $\approx 56,71$ m)

84. Desde la rotonda de salida de Villarrubias parte una carretera recta de 5 km que lo une con la vecina Piedranueva, y desde el mismo punto hay otra carretera rectilínea de 7 km hasta Fuentelfresno. El ángulo que forman ambas carreteras es de 50° . ¿Cuánto distan Piedranueva y Fuentelfresno?

85. **TEORÍA:** En la explicación del tema hay dos fórmulas cuya demostración no ha sido hecha. Se trata del seno de la suma de ángulos:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

y de la fórmula de *Herón*¹, para hallar el área de un triángulo de lados **a**, **b** y **c**:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad , \text{ donde } s \text{ es el semiperímetro, i.e. } s = \frac{a+b+c}{2}$$

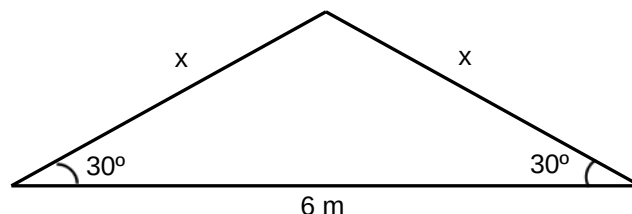
Buscar una demostración en libros o Internet, y pasarla al cuaderno, procurando entenderla.

86. Desde un determinado punto se ve la parte superior de una antena de comunicaciones bajo un ángulo de 50° con respecto a la horizontal. Nos alejamos 10 m y la visual forma ahora 40° . Queremos saber la distancia de ambos puntos de observación a la cúspide de la antena, con el fin de fijar sendos cables de sujeción.

- Plantear la situación por medio de un dibujo, situando los datos y las incógnitas.
- Hallar la longitud del cable más corto **por teorema del seno**. (Soluc: $\approx 37,02$ m)
- Utilizando lo obtenido anteriormente, hallar la longitud del otro cable **por teorema del coseno**. (Soluc: $\approx 44,11$ m)
- Razonar geoméricamente que las dos longitudes obtenidas pueden ser una solución válida.

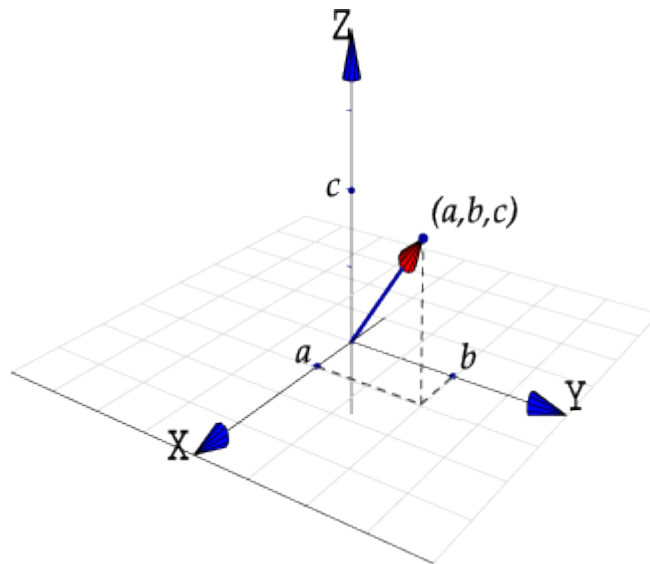
87. a) En el triángulo isósceles de la figura, hallar **x** **aplicando el teorema del coseno**, sin utilizar la calculadora (es decir, resultado en forma radical, no decimal). (Soluc: $2\sqrt{3}$ m)

b) Hallar de nuevo **x** pero **aplicando** esta vez el **teorema del seno**, y comprobar que se obtiene el mismo resultado.



¹ Debida a *Herón de Alejandría*, matemático griego anterior al siglo I de nuestra era.

VECTORES



MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato CCNN

**Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas**



I. DEFINICIONES

Magnitudes

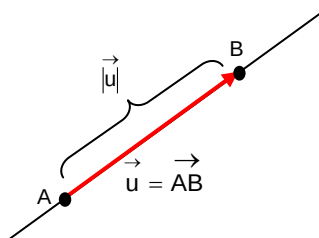
Vectoriales: Un **vector** es un segmento orientado que, para ser definido, precisa de los siguientes tres elementos:

- Módulo:** Indica la intensidad, y viene dado por la longitud de la flecha que representa al vector.
- Dirección:** Viene dada por la recta sobre la que está la flecha que representa al vector.
- Sentido:** Es el que apunta la flecha que representa al vector (Para una misma dirección, hay dos posibilidades).

Ejemplos: La velocidad, la fuerza, la aceleración, etc.

Escalares: Basta un número –un escalar- para ser definidas (Por ejemplo, la temperatura, masa, tiempo, densidad, energía, etc.).

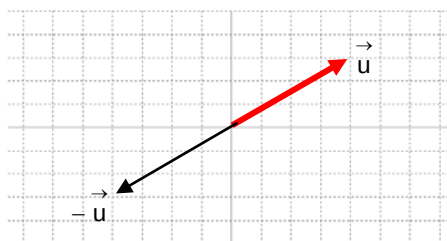
Notación:



Como vemos en el dibujo al margen, un vector¹ se representa mediante una flecha. En concreto, se trata de un vector que va del punto A al punto B, por lo que se representa como $\vec{AB}$. En otros casos, se puede nombrar simplemente como $\vec{u}$. Nótese que el vector tiene una dirección, es decir, está construido sobre una recta. Por otra parte, **su módulo**, que, como hemos dicho arriba, es la longitud de la flecha, **se representa como** $|\vec{u}|$ o $|\vec{AB}|$, es decir, con el nombre del vector entre $| |$. A veces, se indica con dobles barras, esto es, $\|\vec{AB}\|$, y se suele denominar norma del vector. Nosotros utilizaremos indistintamente ambas notaciones. Finalmente, el sentido del vector es el que apunta su flecha. Por lo tanto, se define el vector nulo como $\vec{AA} = \vec{0}$.

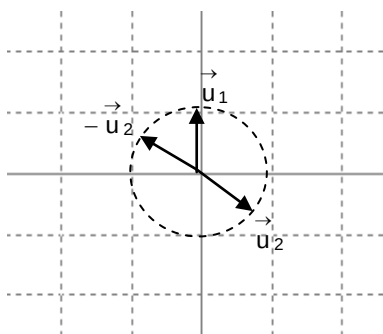
Vector nulo: «Se designa como $\vec{0}$, y es aquel que tiene módulo cero». Se representa por un punto (por lo cual, no tiene mucho sentido considerar su dirección y sentido...).

Vector opuesto: Dado un vector $\vec{u}$, se define su opuesto, que **se designa como** $-\vec{u}$, como aquel que **tiene el mismo módulo, la misma dirección, pero distinto sentido**:

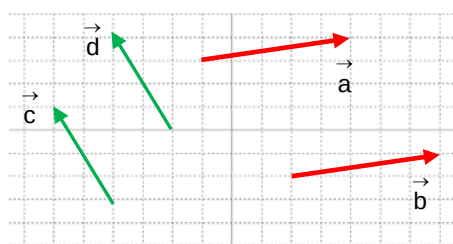


¹ Del latín *vector*, *vectoris*, que a su vez proviene de *veho*, verbo que significa "el que conduce, el que transporta".

Vector unitario: «Es todo vector que tenga módulo 1». Por ejemplo, los siguientes vectores son unitarios:



Vector iguales o equipolentes: «Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son equipolentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido». Se indica como $\vec{u} \sim \vec{v}$, aunque, en general, también se suele poner simplemente $\vec{u} = \vec{v}$.



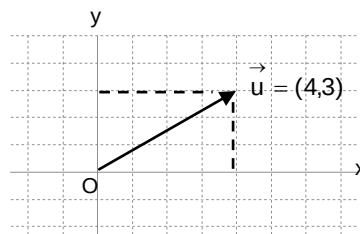
En la figura, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son equipolentes, y lo mismo podemos decir de $\vec{c}$ y $\vec{d}$.

Puesto que, si trasladamos un vector de forma equipolente, es decir, sin variar su módulo, dirección y sentido, sigue siendo el mismo vector, se dice que los **vectores** son **libres** en el plano. Por lo tanto, se define:

$\mathbb{V}^2 =$ **Conjunto de todos los vectores libres del plano**

Acabamos de hablar de vectores libres. Ahora bien, si los referimos a un punto, entonces serán vectores fijos. El punto que habitualmente se utiliza es el origen:

Coordenadas de un vector referido al origen: «Coinciden con las coordenadas del punto extremo del vector»:



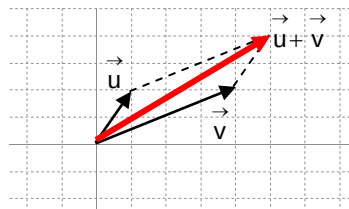
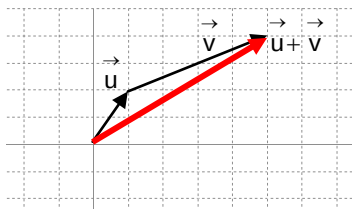
En el apartado II.4 vamos a ver más formalmente el porqué de esto. El próximo curso también veremos todos estos conceptos, pero en tres dimensiones.

Ejercicios final tema: 1 a 3

II. OPERACIONES

II.I SUMA DE VECTORES ($\vec{u} + \vec{v}$)

Gráficamente: Hay dos formas posibles de sumar vectores; ambas, obviamente, conducen al mismo vector suma. Consideremos primero la figura izquierda:



REGLA DEL PARALELOGRAMO

Como vemos, en la 1ª forma (que se usa más en Matemáticas) se engancha el segundo vector al extremo del primero, y el vector suma de ambos será aquel que tiene su origen en el del primero y su extremo en el del último. En el caso de la regla del paralelogramo (muy utilizada en Física, para sumar fuerzas), los dos vectores se ponen con origen común, y se traza a continuación el paralelogramo que definen; el vector suma será entonces la diagonal de dicho paralelogramo que arranca del origen de ambos vectores. **Puede comprobarse analíticamente que ambas formas funcionan.**

Analíticamente:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (u_x, u_y) \\ \vec{v} = (v_x, v_y) \end{array} \right\} \vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

Propiedades:

CONMUTATIVA: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

ASOCIATIVA: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

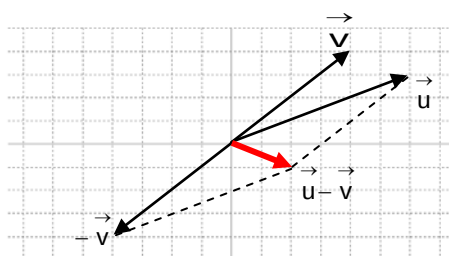
ELEMENTO NEUTRO: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

ELEMENTO OPUESTO: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

(Todas estas propiedades son de inmediata demostración, tanto analítica como gráficamente).

II.II RESTA DE VECTORES ($\vec{u} - \vec{v}$)

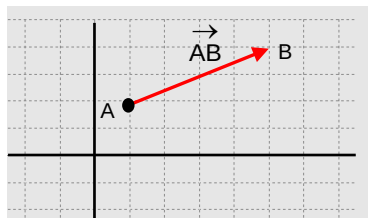
Gráficamente: Para restar dos vectores, sumamos al primero el opuesto del segundo, es decir, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. De las dos formas vistas anteriormente vamos a utilizar, por ejemplo, la regla del paralelogramo:



Analíticamente, es obvio que se restan las componentes.

De la resta de vectores pueden deducirse dos fórmulas importantes muy utilizadas:

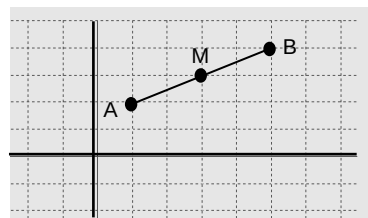
Coordenadas del vector que une dos puntos: Se obtienen restando las componentes del punto extremo menos el punto origen del vector:



$$\vec{AB} = B - A \quad (1)$$

(Ver demostración en Internet)

Coordenadas del punto medio de un segmento: Dado un segmento de extremos A y B, las coordenadas de su punto medio serán la semisuma de dichos extremos.

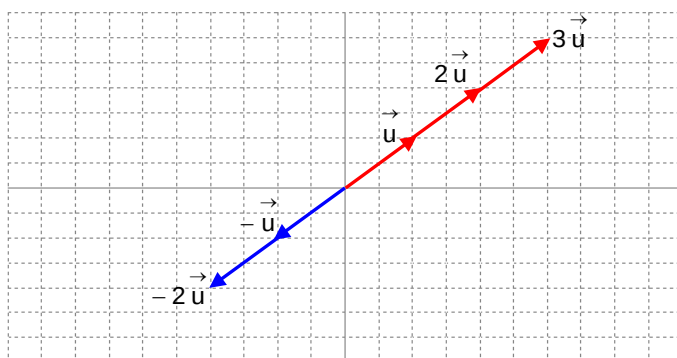


$$M = \frac{A + B}{2} \quad (2)$$

(Ver demostración en Internet)

II.III PRODUCTO POR UN ESCALAR ($\lambda \vec{u}$)

Gráficamente: Veámoslo con un ejemplo. Si queremos hacer $3\vec{u}$, lo que haremos es $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, es decir, aplicamos la suma de vectores. Si lo que queremos construir es $-2\vec{u}$, haremos $-2\vec{u} = (-\vec{u}) + (-\vec{u})$:



En resumen: Se define el vector $k\vec{u}$ como aquel que tiene MÓDULO: $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

DIRECCIÓN: la de $\vec{u}$

SENTIDO: $\begin{cases} \text{el de } \vec{u}, & \text{si } k > 0 \\ \text{opuesto,} & \text{si } k < 0 \end{cases}$

Todo esto puede comprobarse que concuerda analíticamente:

Analíticamente: $\vec{u} = (u_x, u_y) \rightarrow k\vec{u} = (ku_x, ku_y)$

Consecuencia: «Si dos vectores tienen sus componentes proporcionales entonces tienen la misma dirección i.e. son //, y viceversa».

Propiedades: ASOCIATIVA:

$$\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$$

DISTRIBUTIVA respecto a la suma de vectores: $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

DISTRIBUTIVA respecto a la suma de escalares: $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$

ELEMENTO NEUTRO: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

(Todas estas propiedades son de inmediata demostración, tanto analítica como gráficamente).

Ejercicios final tema: 4 a 9

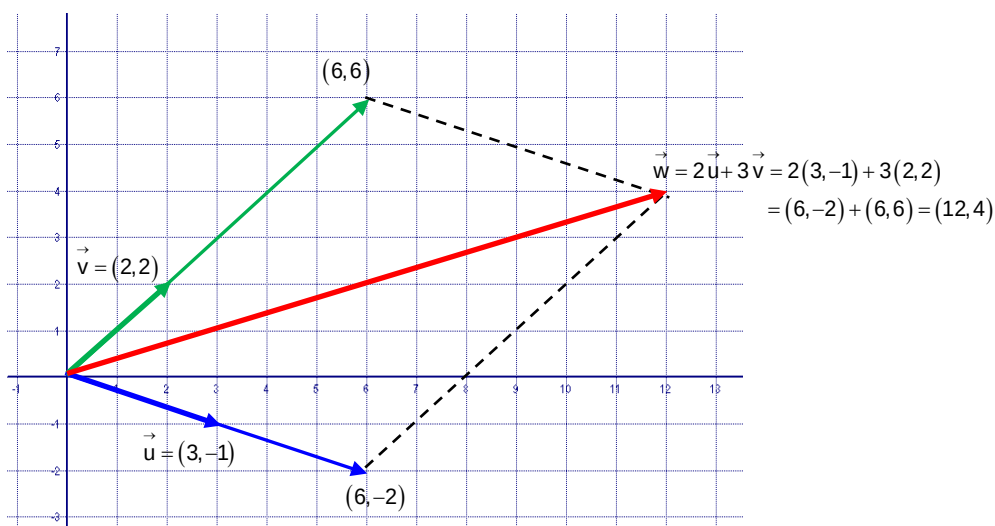
II.IV COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})$

Se dice que el vector $\vec{w}$ es **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si se puede expresar como

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \quad \text{donde } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

NOTA: λ o μ en algunos casos pueden ser 0

Ejemplo 1: Considerar los vectores $\vec{u} = (3, -1)$ y $\vec{v} = (2, 2)$, y construimos, por ejemplo, la combinación lineal $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$. En la figura puede comprobarse que todo coincide analítica y gráficamente:



Nótese que si los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ fueran proporcionales i.e. paralelos, entonces no se podría expresar cualquier vector de $\mathbb{V}^2$ como combinación lineal de ambos, ya que nunca saldríamos de la recta que definen.

NOTA: Se recomienda ver otro ejemplo de combinación lineal, en formato de PowerPoint, en la web del profesor:

http://www.alfonsogonzalez.es/asignaturas/1_bach_ccnn/presentaciones.html

Definición: «Una base de $\mathbb{V}^2$ son dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cualesquiera no nulos y no paralelos, lo cual nos va a permitir siempre expresar cualquier vector como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de forma única»

Es decir:

« $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ forman una **base** de $\mathbb{V}^2$ si cualquier $\vec{w}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base, es decir,

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \gg$$

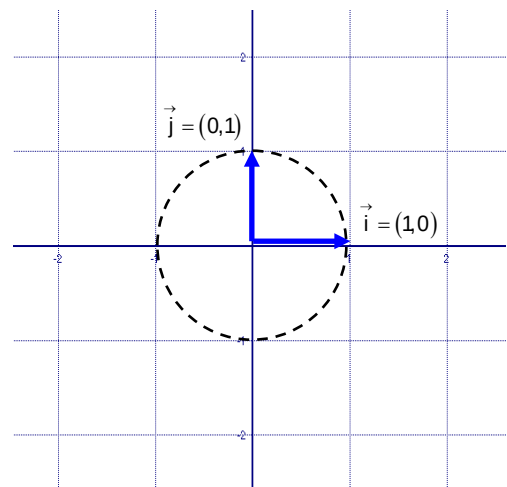
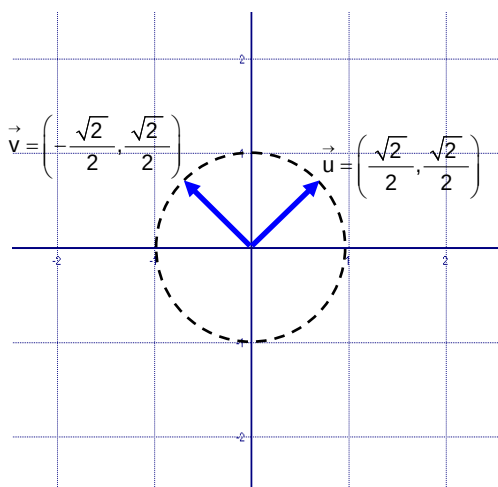
«Se dice entonces que λ y μ son las **coordenadas** de $\vec{w}$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ »

Conviene insistir en que si los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales i.e. paralelos, entonces no forman una base de $\mathbb{V}^2$, ya que no se podría expresar cualquier vector como combinación lineal de ambos.

Definición: «Dos vectores son **ortonormales** si son $\perp$ y unitarios»

Ejemplos: Los vectores $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ del dibujo izquierdo forman una base ortonormal de $\mathbb{V}^2$.

Los vectores $\vec{i} = (1,0)$ y $\vec{j} = (0,1)$ de la derecha también forman una base ortonormal de $\mathbb{V}^2$. En este caso es la base ortonormal² más sencilla que cabe considerar. Se dice que « $\vec{i} = (1,0)$ y $\vec{j} = (0,1)$ constituyen la base canónica de $\mathbb{V}^2$ ».



² Del griego *orthos*, derecho, recto, canónico, correcto.

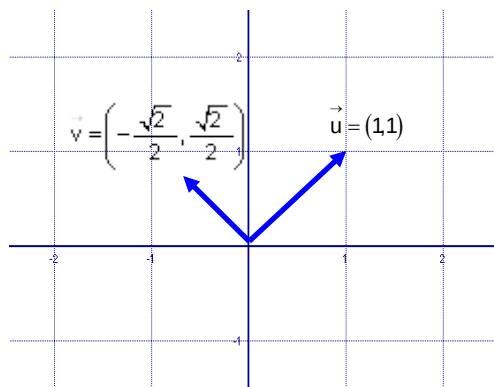
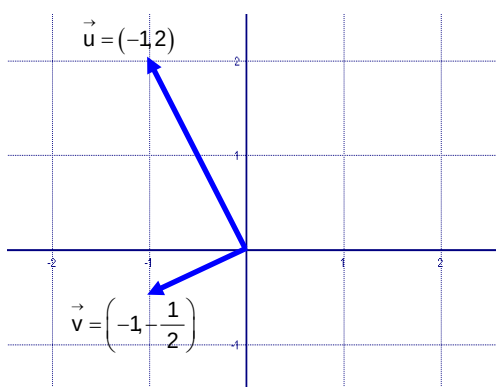
De hecho, cualquier pareja de vectores perpendiculares cuyo extremo acabara en la circunferencia unitaria señalada en trazo discontinuo sería una base ortonormal de $\mathbb{V}^2$.

Recordar: «**Base ortonormal de $\mathbb{V}^2$** son dos vectores cualesquiera perpendiculares y unitarios».

Insistamos de nuevo en que $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ no es la única base ortonormal de $\mathbb{V}^2$, pero sí la más simple, y por eso se denomina base canónica³ de $\mathbb{V}^2$.

Definición: «Dos vectores son **ortogonales** si son $\perp$ »

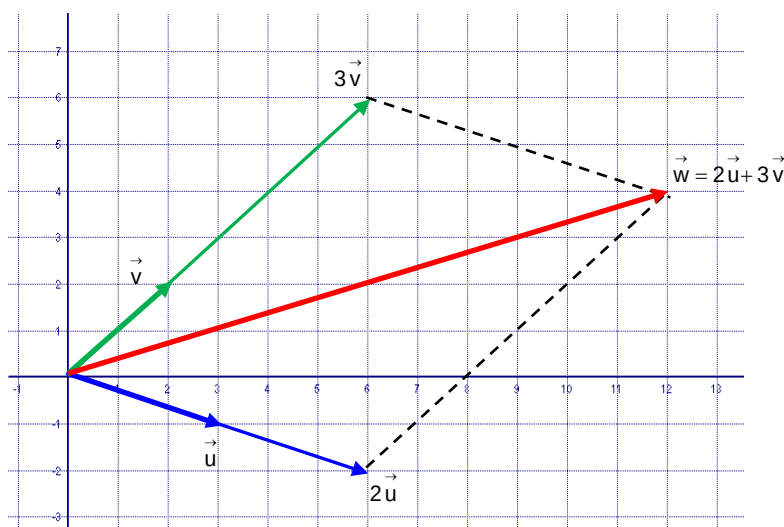
Ejemplos: Las parejas de vectores de las siguientes dos figuras son posibles ejemplos de vectores ortogonales:



Nótese que la ortogonalidad es una condición menos fuerte que la ortonormalidad.

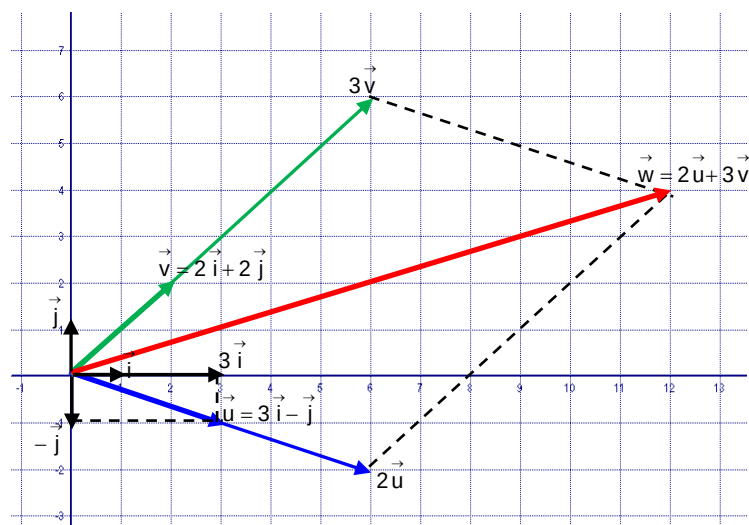
Por tanto: «**Base ortogonal de $\mathbb{V}^2$** son dos vectores cualesquiera perpendiculares».

Ventaja de utilizar la base canónica: Recordemos el ejemplo 1:



³ Del griego *kanonikos*, conforme a la regla.

Vemos que en esa posible base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de $\mathbb{V}^2$ las coordenadas del vector $\vec{w}$ de la figura serían 2 y 3, es decir, los coeficientes de la combinación lineal. Pero si elegimos la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ de $\mathbb{V}^2$ entonces:



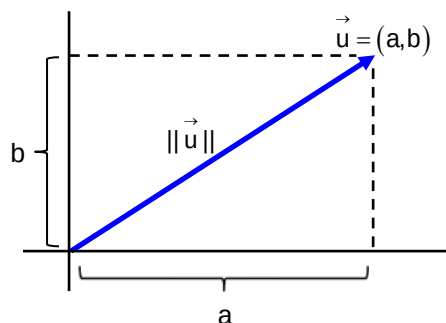
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} \\ \vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \end{array} \right\} \vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(3\vec{i} - \vec{j}) + 3(2\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$= 6\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{i} + 6\vec{j} = 12\vec{i} + 4\vec{j}$$

es decir, en la base canónica las coordenadas de $\vec{w}$ serían 12 y 4, que son precisamente las componentes del punto extremo del vector. Por lo tanto, **la ventaja de utilizar la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ es que las coordenadas de un vector coinciden con las del punto extremo.** En otra base tendría distintas coordenadas.

Ejercicios final tema: 10 a 18

III. MÓDULO DE UN VECTOR



Considerar el vector $\vec{u}$ de la figura adjunta. Como acabamos de ver en el apartado anterior, las coordenadas de dicho vector en la base canónica serán las del extremo del vector, es decir, $\vec{u} = (a, b)$. Vamos a hallar aplicando el teorema de Pitágoras el módulo $\|\vec{u}\|$ de dicho vector, es decir, la longitud del vector:

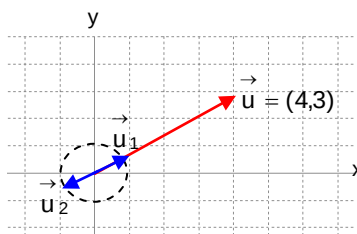
$$\|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3)$$

es decir, «el módulo de un vector es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes».

Ejercicios final tema: 19

Consecuencias: 1ª) ¿Cómo obtener un vector con la misma dirección que uno dado, pero unitario?:

Supongamos que nos dan un vector $\vec{u}$, y queremos obtener un vector con su misma dirección, pero unitario. La respuesta, viendo el dibujo es obvia: habrá que dividirlo por su módulo; es decir, se tratará del vector $\vec{u}/\|\vec{u}\|$



La demostración es también evidente:

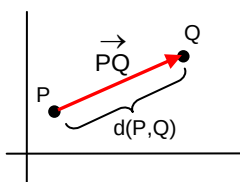
DEM: Si $\vec{u}$ lo dividimos por un número, como es $\|\vec{u}\|$, obtendremos un vector con la misma dirección (y sentido).

$$\vec{u}/\|\vec{u}\| \text{ es } \underline{\text{unitario}}, \text{ ya que su módulo es: } \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \|\vec{u}\| = 1 \quad (\text{C.Q.D.})$$

NOTA: En realidad, habría otro vector con la misma dirección que $\vec{u}$ y unitario, pero de sentido contrario; se trataría del vector opuesto a $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ (El $\vec{u}_2$ del dibujo).

Ejercicios final tema: 20 a 23

2ª) Distancia entre dos puntos:



Supongamos dos puntos, $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, cuya distancia de separación, $d(P, Q)$, queremos conocer. Es obvio que dicha distancia (ver dibujo) coincidirá con el $\|\vec{PQ}\|$:

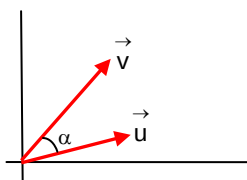
$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= Q - P = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\ \Rightarrow \|\vec{PQ}\| &= d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Ejercicios final tema: 24

IV. PRODUCTO ESCALAR

Vamos a definir el producto escalar de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que se designa como $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (se lee "u escalar v"), y cuyo resultado es un escalar:

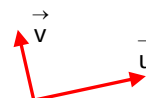
Definición: «El producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman»:



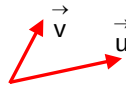
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha \quad (5)$$

Observaciones: 1ª) El producto escalar así definido puede ser un número positivo, negativo, o nulo. Y cada una de estas tres posibilidades tiene su significado gráfico:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \quad (\text{Condición de perpendicularidad})$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \alpha < 90^\circ$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$$



- 2º) La fórmula (5), es decir, la definición del producto escalar, no es muy operativa en la práctica a la hora de hallar el producto escalar de dos vectores, pues normalmente desconocemos el ángulo α que estos forman. En su lugar se suele aplicar la siguiente fórmula, llamada **expresión analítica⁴ del producto escalar**:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (a,b) \\ \vec{v} = (c,d) \end{array} \right\} \vec{u} \cdot \vec{v} = (a,b) \cdot (c,d) = ac + bd \quad (6)$$

- 3º) El módulo de un vector se puede expresar en función del producto escalar: Para ello, basta considerar el producto escalar de un vector $\vec{u}$ consigo mismo:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos 0^\circ = \|\vec{u}\|^2$$

Despejamos $\|\vec{u}\|$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

En efecto, si las componentes del vector son $\vec{u} = (a,b)$, nos queda:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(a,b) \cdot (a,b)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

es decir, volvemos a obtener (3).

- 4º) **¡Cuidado con la notación!** Es muy importante, a la hora de simbolizar el producto escalar de dos vectores, no olvidar el $\cdot$ entre ambos $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Ahora bien, si de lo que se trata es de multiplicar un escalar por un vector, para distinguir es recomendable no indicar el producto con un $\cdot$: $\lambda \vec{u}$

⁴ DEM: Veamos que (5) y (6) conducen al mismo resultado:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (a,b) = a\vec{i} + b\vec{j} \\ \vec{v} = (c,d) = c\vec{i} + d\vec{j} \end{array} \right\} \vec{u} \cdot \vec{v} = (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot (c\vec{i} + d\vec{j}) = ac \cancel{\vec{i} \cdot \vec{i}}^1 + ad \cancel{\vec{i} \cdot \vec{j}}^0 + bc \cancel{\vec{j} \cdot \vec{i}}^0 + bd \cancel{\vec{j} \cdot \vec{j}}^1 = ac + bd \quad (\text{C.Q.D.})$$

- 5º) Propiedades:** CONMUTATIVA: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
 ASOCIATIVA MIXTA: $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$
 DISTRIBUTIVA: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(Todas estas propiedades son de inmediata demostración⁵, tanto analítica como gráficamente).

Ejercicios final tema: 25 a 37

- 6º) ¿Cómo obtener un vector perpendicular a un vector dado?** Supongamos que nos dan el vector $\vec{u} = (a, b)$. Entonces, para obtener un vector normal⁶, es decir, $\perp$ a él tenemos que permutar sus componentes y cambiar una de ellas de signo (la que queramos), esto es $\vec{n} = (-b, a)$. Es decir:

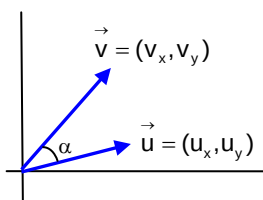
$$\text{«Dado } \vec{u} = (a, b) \Rightarrow \vec{n} = (-b, a) \perp \vec{u} \text{»}$$

Dem: $\vec{u} \cdot \vec{n} = (a, b) \cdot (-b, a) = -ab + ab = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \quad (\text{C.Q.D.})$

Nótese que también valdría el $(b, -a)$ como vector normal. E incluso habría infinitos vectores, que serían todos los proporcionales a $(b, -a)$ o $(-b, a)$.

Ejercicios final tema: 38 a 41

- 7º) Ángulo entre dos vectores:** Se obtiene fácilmente, sin más que despejar en $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha$



$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| ||\vec{v}||} = \frac{u_x v_x + u_y v_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad (7)$$

Ejercicios final tema: 42 y siguientes

⁵ Nos remitimos, para ello, a Internet.

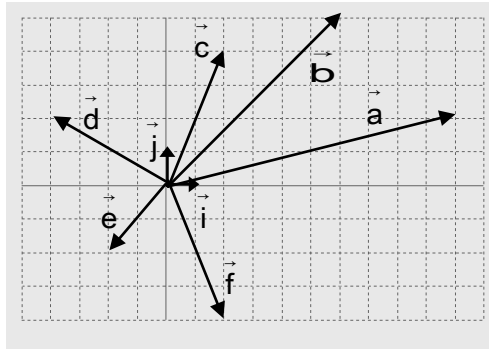
⁶ En Geometría el adjetivo *normal* es sinónimo de perpendicular.

65 EJERCICIOS DE VECTORES

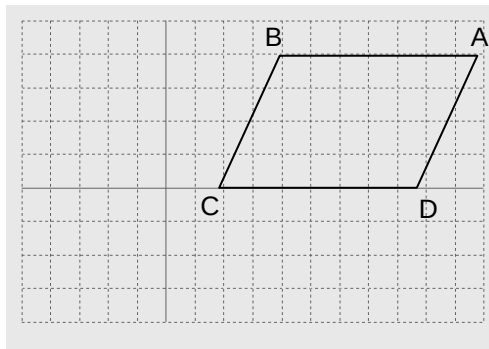
1. a) Representar en el mismo plano los vectores:

$$\vec{a} = (3,1) \quad \vec{b} = (-1,5) \quad \vec{c} = (2,-4) \quad \vec{d} = (-3,-1) \quad \vec{i} = (1,0) \quad \vec{j} = (0,1) \quad \vec{e} = (3,0) \quad \vec{f} = (0,-5)$$

- b) Escribir las coordenadas de los vectores fijos de la figura adjunta (puede hacerse en este cuaderno):



2. a) Dibujar dos vectores de origen común, igual módulo, y que formen un ángulo de 135° . Expresarlos analíticamente.
- b) Dibujar dos vectores que tengan el origen común y los sentidos opuestos. Expresarlos analíticamente. ¿Qué ángulo forman dichos vectores?
3. Dado el paralelogramo de la figura¹:



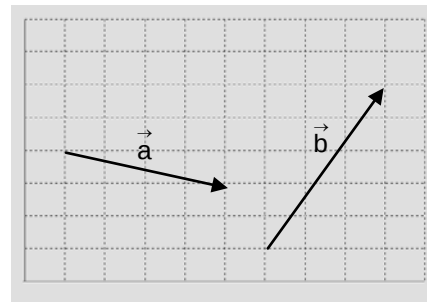
- a) Indicar, analítica y gráficamente, un vector equipolente con $\vec{CD}$; ídem con $\vec{AD}$ (puede hacerse en este cuaderno)
- b) Indicar, analítica y gráficamente, un vector opuesto a $\vec{CD}$; ídem con $\vec{AD}$ (puede hacerse en este cuaderno)

¹ Recordar que, por convenio, los vértices de un polígono se designan con letras mayúsculas, en orden alfabético (A, B, C, D...), y en sentido levógiro i.e. antihorario.

Operaciones con vectores:

4. Dados los vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura, calcular gráfica –los cuatro primeros apartados, en los mismos ejes– y analíticamente (en función de la base ortonormal de $\mathcal{V}^2$):

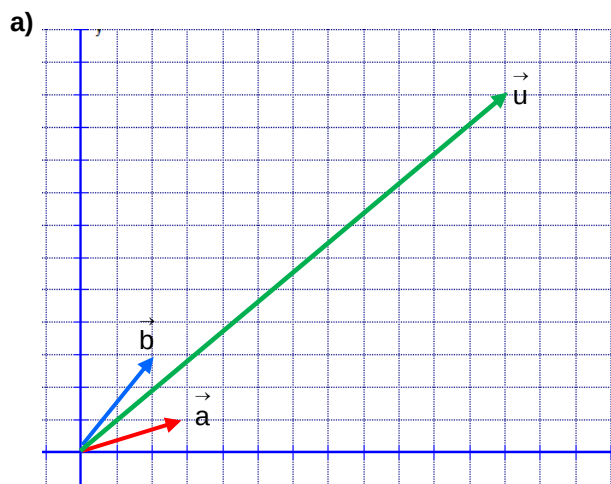
- a) $\vec{a} + \vec{b}$
- b) $\vec{a} - \vec{b}$
- c) $3\vec{a}$
- d) $3\vec{a} + 2\vec{b}$
- e) $2\vec{a} - 3\vec{b}$



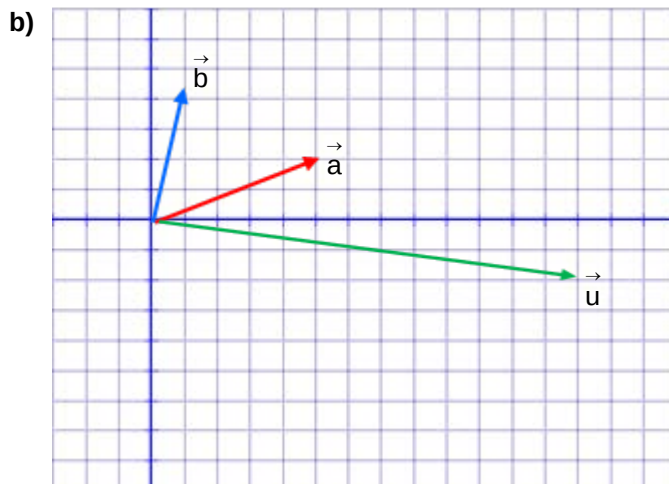
5. a) Determinar, analíticamente, si los puntos A(3, 1), B(5, 2) y C(1, 0) están alineados.
b) Ídem para A(1, 1), B(3, 4) y C(4, 6) (Nota: un dibujo puede ser útil)
c) Hallar k para que los puntos A(1, 7), B(-3, 4) y C(k, 5) estén alineados. (Soluc: Sí; NO; $k = -5/3$)
6. Considerar el segmento de extremos A(-2, 1) y B(5, 4). Hallar:
a) El punto medio M [Sol: M(3/2, 5/2)]
b) Los dos puntos P y Q que lo dividen en tres partes iguales. [Soluc: P(1/3, 2) y Q(8/3, 3)]
7. Hallar las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos A(3, 4) y B(0, -2) en dos partes tales que $\vec{BP} = 2\vec{PA}$ [Soluc: P(2, 2)]
8. a) De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ conocemos $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ y el ángulo que forman, $\alpha = 60^\circ$. Hallar $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$ (Soluc: $\sqrt{39}$ y $\sqrt{19}$, respectivamente)
b) De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ conocemos $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{19}$ y $\hat{a} \cdot \vec{b} = 30^\circ$. Hallar $|\vec{a}|$ (Soluc: $\frac{9 - \sqrt{57}}{2}$)
9. Dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ de intensidades 20 N y 30 N actúan sobre el mismo cuerpo y forman entre ellas un ángulo de 60° . Hacer un dibujo. ¿Cuántos N tiene la resultante $\vec{R}$? (Soluc: 43,6 N)

Combinación lineal de vectores:

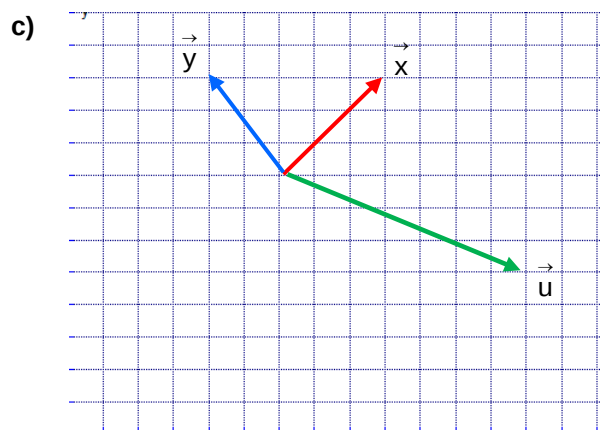
10. Expresar $\vec{a} = (9, 5)$ y $\vec{b} = (-5, 7)$ como combinación lineal de $\vec{x} = (1, 3)$ e $\vec{y} = (3, -2)$, analítica y gráficamente. (Soluc: $\vec{a} = 3\vec{x} + 2\vec{y}$; $\vec{b} = \vec{x} - 2\vec{y}$)
11. En cada apartado, obtener **gráficamente** (en este cuaderno, mediante la regla del paralelogramo) $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, e indicar dicha combinación lineal tanto analíticamente como mediante una frase (Véase el 1^{er} ejemplo):



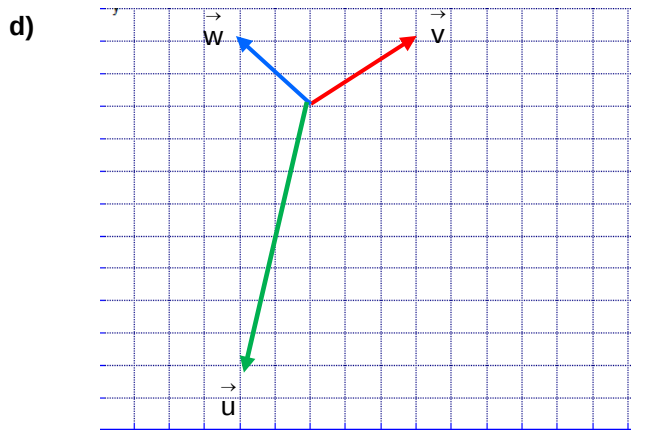
Soluc : $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, es decir, las coordenadas de $\vec{u}$ en la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ de V^2 son 2 y 3, respectivamente)



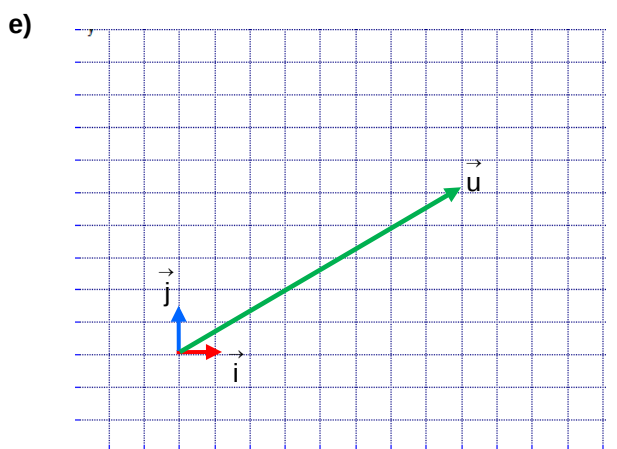
Soluc : $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, es decir, las coordenadas de $\vec{u}$ en la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ de V^2 son 3 y -2, respectivamente)



Soluc : $\vec{u} = \vec{x} - 2\vec{y}$, es decir, las coordenadas de $\vec{u}$ en la base $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ de V^2 son 1 y -2, respectivamente)



Soluc : $\vec{u} = -2\vec{v} - 2\vec{w}$, es decir, las coordenadas de $\vec{u}$ en la base $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ de V^2 son -2 y -2, respectivamente)



Soluc : $\vec{u} = 8\vec{i} + 5\vec{j}$, es decir, las coordenadas de $\vec{u}$ en la base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ de V^2 son 8 y 5)

¿Qué ventaja tiene esta base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ de V^2 ? ¿Qué nombre recibe?

12. Comprobar **analíticamente** las combinaciones lineales del ejercicio anterior.

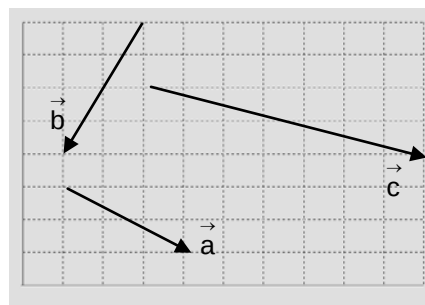
13. Dados los vectores libres de la figura:

a) Razonar que $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ constituye una base de $\mathcal{V}^2$.

b) Obtener $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$

c) Comprobar gráficamente la combinación lineal anterior.

$$\left(\text{Soluc: } \vec{c} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \right)$$



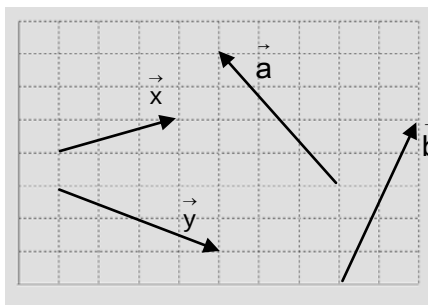
14. Dados los vectores $\vec{u} = (3,4)$ y $\vec{v} = (-2,3)$, se pide:

a) Razonar que pueden ser base de $\mathcal{V}^2$.

b) Obtener analíticamente las coordenadas de $\vec{w} = (-12,1)$ en la base anterior. $(\text{Sol: } \vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v})$

c) Explicar gráficamente la situación.

15. Expresar los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ (solo analíticamente):

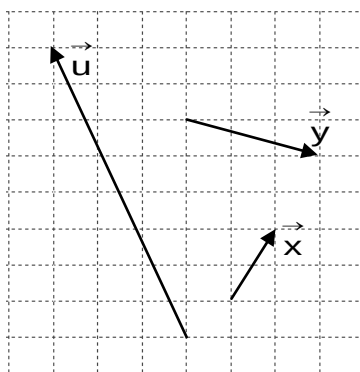


$$\left(\begin{array}{l} \text{Soluc: } \vec{a} = \vec{x} - \frac{3}{2}\vec{y}; \\ \vec{b} = \frac{12}{5}\vec{x} - \frac{13}{10}\vec{y} \end{array} \right)$$

16. Definir base de $\mathcal{V}^2$, combinación lineal y coordenadas de un vector referidas a una base. Explicar estos conceptos mediante la base formada por $\left\{ \vec{u} = (2,1); \vec{v} = (-1,3) \right\}$ y el vector $\vec{w} = (4,9)$, analítica y gráficamente.

$$(\text{Soluc: } \vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v})$$

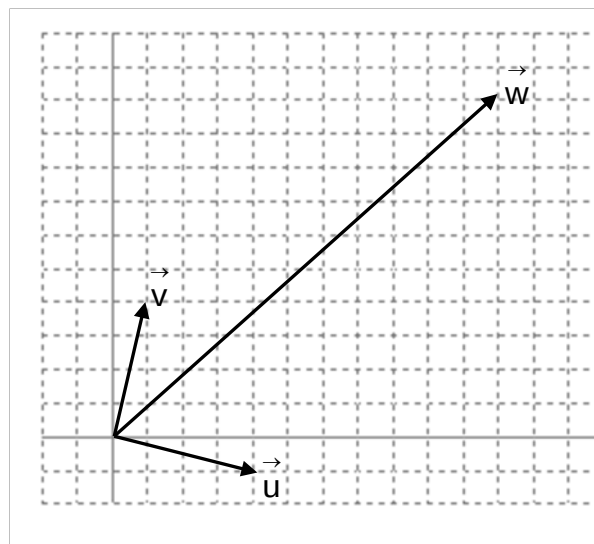
17.



a) ¿Los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de la figura pueden ser base de $\mathcal{V}^2$? Razonar la respuesta.

b) Expresar $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ $(\text{Sol: } \vec{u} = 3\vec{x} - 2\vec{y})$

c) Comprobar gráficamente lo anterior.



18. Expresar el vector $\vec{w}$ de la figura como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, analítica y gráficamente (esto último en la propia figura). $(\text{Soluc: } \vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v})$

Módulo de un vector:

19. Calcular el módulo de los siguientes vectores, y dibujarlos (los siete primeros en los mismos ejes):

$$\vec{a} = (4, 3), \quad \vec{b} = (3, -4), \quad \vec{c} = (1, 1), \quad \vec{d} = (5, 5), \quad \vec{e} = (-4, -3), \quad \vec{f} = (6, 0), \quad \vec{u} = (0, -3) \quad \text{y} \quad \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

20. a) Calcular el valor de m para que el vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, m \right)$ sea unitario. Razonar gráficamente por qué se obtienen dos soluciones.

$$\left(\text{Soluc: } m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

b) Ídem para $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, m \right)$

$$\left(\text{Soluc: } m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

21. a) Hallar x para que el módulo del vector $\vec{u} = (x, 5)$ sea igual a 13. (Soluc: $x=12$)

b) Hallar x para que se cumpla que $\vec{u} + \vec{i} = 5\vec{j}$. Comprobar gráficamente el resultado. (Soluc: $x=-1$)

b) Dado el vector $\left(x, \frac{1}{2} \right)$, hallar x para que sea unitario, y también para que tenga módulo 5 (resultados racionalizados y simplificados). (Soluc: $x=\pm\sqrt{3}/2$; $x=\pm 3\sqrt{11}/2$)

22. a) Dado $\vec{u} = (6, 8)$ hallar los dos vectores unitarios que tienen la dirección de $\vec{u}$. Razonar gráficamente la situación.

b) Ídem para $\vec{u} = (4, -7)$

c) Ídem para $\vec{u} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

23. a) Para cada uno de los siguientes vectores, obtener uno unitario y con la misma dirección:

$$\vec{a} = (3, -4) \quad \vec{b} = (1, 1) \quad \vec{c} = (12, 5) \quad \vec{d} = (6, -3)$$

b) Hallar el vector $\vec{v}$ de módulo 5 que sea paralelo al $\vec{a} = (36, -27)$

24. Dibujar los siguientes pares de puntos y hallar su distancia:

a) $P(1, 2)$ y $Q(5, -1)$ b) $P(6, 3)$ y $Q(-2, -3)$ c) $P(2, 1)$ y $Q(2, 5)$ d) $A(-1, 3)$ y $B(5, 3)$

e) $A(5, 3)$ y el origen f) $P(1, 5)$ y $Q(5, 2)$ (Soluc: a) 5; b) 10; c) 4; d) 6; e) $\sqrt{34}$; f) 5)

Producto escalar:

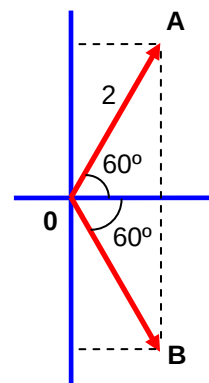
25. a) Dados $\vec{u} = (5, 0)$ y $\vec{v} = (2, 2)$ se pide: i) Dibujarlos ii) Calcular su producto escalar de dos formas posibles, y comprobar que coincide el resultado.

b) Ídem con $\vec{u} = (1, 1)$ y $\vec{v} = (-2, 0)$

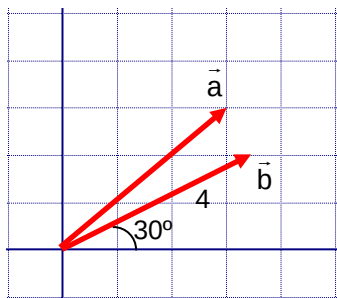
c) Ídem con $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (-2, 4)$

26. a) Dada la figura adjunta, hallar $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ aplicando la definición de producto escalar. (Soluc: -2)

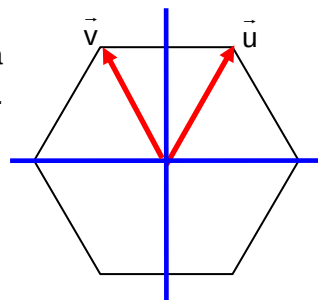
b) Hallar las coordenadas de A y B (no valen decimales).



- c) Hallar $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ mediante la expresión analítica del producto escalar, y comprobar que se obtiene lo mismo que en el apartado a.



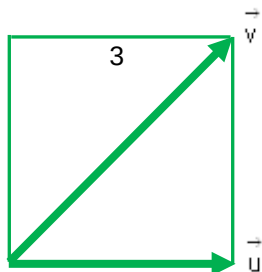
27. a) Considerar el hexágono regular de la figura derecha, de lado 2. Hallar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de dos formas. (Soluc: 2)



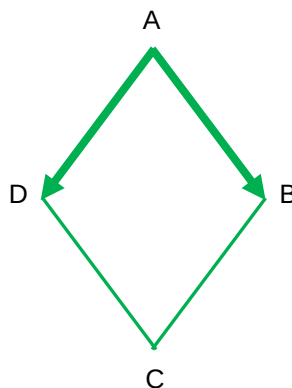
- b) Hallar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en la figura izquierda, analíticamente. Hallar también analíticamente el ángulo que forman los dos vectores.

28. a) Hallar **analíticamente** el producto escalar del vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, m\right)$ consigo mismo, sabiendo que es unitario y que se encuentra en el 4º cuadrante. (Soluc: 1)

- b) Calcular lo anterior **utilizando** razonadamente la **definición de producto escalar**, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.



29. En el rombo de la figura, de diagonales 6 y 8, hallar $\vec{AD} \cdot \vec{AB}$ aplicando la definición de producto escalar. (Soluc: 7)



30. En el cuadrado de la figura, de lado 3, hallar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ aplicando la definición de producto escalar. (Soluc: 3)

31. Dados $\vec{a} = (-3, 1)$, $\vec{b} = (2, 3)$, $\vec{c} = (1, 0)$ y $\vec{d} = (5, -2)$, calcular:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $\vec{b} \cdot \vec{a}$

c) $\vec{d} \cdot \vec{a}$

d) $\vec{b} \cdot \vec{c}$

e) $\vec{b} \cdot \vec{d}$

f) $\vec{c} \cdot \vec{d}$

g) $\vec{a}^2$

h) $2(\vec{d} \cdot \vec{c})$

i) $\vec{a} \cdot \vec{c}$

j) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{d}$ de dos formas

k) $(\vec{b} \cdot \vec{d})\vec{a}$

l) $\vec{b}(\vec{d} \cdot \vec{a})$

m) $\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{d}$ de dos formas

n) $(\vec{a} + \vec{b})^2$ de dos formas

o) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ de dos formas

p) $\vec{a} \cdot \vec{b}(\vec{c} + \vec{d})$

q) $\vec{a} \cdot \vec{b}(\vec{a} - \vec{b})\vec{b} \cdot \vec{c}$

r) $\vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c} - \vec{c}$

(Sol: a) -3; b) -3; c) -17; d) 2; e) 4; f) 5; g) 10; h) 10; i) -3; j) -13; k) (-12, 4); l) (-34, -51); m) 14; n) 17; o) -3; p) (-18, 6); q) (30, 12); r) (-4, 0))

32. **TEORÍA:** Indicar, **razonadamente**, si el resultado de las siguientes operaciones es un escalar o un vector:

a) $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d})$ b) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{d})$ c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{d}$ (Soluc: escalar, en los tres casos)

33. Un triángulo ABC es tal que $|\vec{AB}| = 5$, $|\vec{BC}| = 7$ y $\hat{B} = 120^\circ$. Calcular $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ y su superficie.

(Soluc: $-\frac{35}{2}$; $\frac{35\sqrt{3}}{4}u^2$)

34. Sea un triángulo equilátero ABC de lado 6. Hallar:

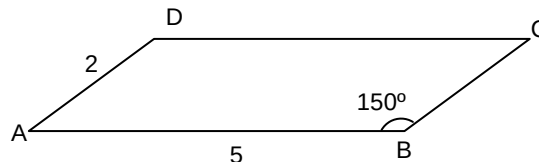
- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ b) $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ c) $\vec{BA} \cdot \vec{CB}$ d) $\vec{AB} \cdot \vec{CB}$ e) $\vec{AC} \cdot \vec{BA}$ f) $\vec{AA} \cdot \vec{AC}$

(Aviso: Para considerar el producto escalar gráficamente, previamente los dos vectores han de tener origen común, para lo cual en ciertos casos habrá que trasladar uno de ellos).

(Soluc: a) 18; b) 18; c) -18; d) 18; e) -18; f) 0)

35. En el paralelogramo de la figura, hallar $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ y $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

(Soluc: $5\sqrt{3}$; 16,34)



36. Demostrar que los puntos A(-3,2), B(1,9) y C(4,-2) forman un triángulo rectángulo en A.

37. Hallar x de modo que el producto escalar de los vectores $\vec{a} = (3,-5)$ y $\vec{b} = (x,2)$ sea igual a 8 (Soluc: x=6)

38. Hallar las componentes de un vector $\vec{u}$ cuyo módulo es $2\sqrt{17}$ y que es ortogonal al vector $\vec{v} = (4,1)$.
Hacer un dibujo explicativo de la situación. (Soluc: $\vec{u}_1 = (2,-8)$ y $\vec{u}_2 = (-2,8)$)

39. Hallar las componentes de un vector cuyo producto escalar por sí mismo es 20 y cuyo producto escalar por el vector (3,2) es 2. (Soluc: (38/13, -44/13) y (-2,4))

* 40. Resolver el problema 8 analíticamente, y comprobar que se obtiene el mismo resultado.

41. Considerar los puntos A(1,2) y B(4,6). Hallar el punto C(x,y) tal que el segmento $\overline{AB}$ sea $\perp$ al segmento $\overline{AC}$ y de la misma longitud. Hallar el área del triángulo ABC (Se recomienda hacer previamente un dibujo). (Soluc: (5,-1) y (-3,5); $S_{ABC} = 25/2 u^2$)

Ángulo de dos vectores:

42. Calcular el ángulo formado por los siguientes pares de vectores, y dibujarlos (cada apartado en diferentes ejes):

- | | |
|---|---|
| a) $\vec{u} = (2,1)$ y $\vec{v} = (1,3)$ (Soluc: 45°) | e) $\vec{x} = (-5,12)$ y $\vec{y} = (8,-6)$ (Sol: $\cong 149^\circ 29'$) |
| b) $\vec{u} = (\sqrt{3},1)$ y $\vec{v} = (1,\sqrt{3})$ (Soluc: 30°) | f) $\vec{u} = (2,1)$ y $\vec{v} = (-9,3)$ (Soluc: 135°) |
| c) $\vec{a} = (3\sqrt{2},\sqrt{6})$ y $\vec{b} = (-3\sqrt{2},\sqrt{6})$ (Soluc: 120°) | g) $\vec{u} = (4,3)$ y $\vec{v} = (1,7)$ (Soluc: 45°) |
| d) $\vec{u} = (4,1)$ y $\vec{v} = (-2,8)$ (Soluc: 90°) | |

43. Dados los vectores $\vec{u} = (3,-4)$ y $\vec{v} = (5,6)$, calcular:

- a) El ángulo que forman. (Soluc: $\cong 103^\circ 19'$)
b) Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ que sea unitario. (Soluc: (3/5, -4/5))
c) Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ de módulo 15. (Soluc: (9, -12))
d) ¿Son $\vec{u}$ y $\vec{v}$ ortogonales? En caso contrario, buscar un vector cualquiera ortogonal a $\vec{u}$

44. ¿Qué ángulo forman los vectores **unitarios** $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en los siguientes casos?:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
(Soluc: a) 0° ; b) 30° ; c) 120° ; d) 45°)

45. Comprobar que los vectores $\vec{u} = (8, 15)$ y $\vec{v} = (30, -16)$ constituyen una base ortogonal. Comprobar que los vectores $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ y $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ forman una base ortonormal.

46. De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son unitarios y que su producto escalar es $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ¿Qué ángulo forman? (Soluc: 150°)

Problemas con parámetros:

NOTA: En los ejercicios siguientes se recomienda hacer un dibujo previo de la situación.

47. Calcular x e y en $\vec{a} = (-x, 4)$, $\vec{b} = (-1, 5)$ y $\vec{c} = (3, y)$, si se sabe que $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{c} \perp \vec{b}$. Comprobar el resultado gráficamente. (Soluc: $x = -20$; $y = 3/5$)

48. Obtener tres vectores cualesquiera perpendiculares a $(-1, -3)$, siendo al menos uno de ellos unitario. Explicar gráficamente el resultado.

49. Hallar el valor de m para que $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, m\right)$ y $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ sean ortogonales. Interpretar el resultado gráficamente. (Soluc: $-\sqrt{2}/4$)

50. Dados $\vec{x} = (2, -3)$ e $\vec{y} = (a, 4)$, calcular a para que: a) $\vec{x} \parallel \vec{y}$ b) $\vec{x} \perp \vec{y}$ (Sol: a) $a = -8/3$; b) $a = 6$)

51. Hallar un vector $\vec{v}$ que tenga módulo 3 y que forme un ángulo de 90° con $\vec{a} = (3, 4)$ (Aviso: puede haber dos soluciones). Explicar gráficamente la situación. (Soluc: $\vec{v}_1 = (12/5, -9/5)$ y $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$)

52. Dados $\vec{u} = (3, 1)$, $\vec{v} = (a, -1/2)$ y $\vec{w} = (-3, 2)$, se pide:

- a) Hallar a para que $\vec{v}$ sea unitario. Comprobar gráficamente el resultado. (Sol: $a = \pm\sqrt{3}/2$)
- b) Hallar a para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean $\parallel$. Justificar gráficamente la solución obtenida. (Sol: $a = -3/2$)
- c) Hallar a para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean $\perp$. Justificar gráficamente la solución obtenida. (Sol: $a = -1/3$)
- d) Hallar un vector $\perp$ a $\vec{u}$ y unitario. (Sol: $(-1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$ o su opuesto)
- e) Hallar el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$ (Sol: $\cong 127^\circ 52' 30''$)

53. a) Calcular las componentes de un vector $\vec{u}$ de módulo 2 y tal que $\hat{i} \cdot \vec{u} = 30^\circ$ (Aviso: puede haber dos soluciones)
(Soluc: $\vec{u}_1 = (\sqrt{3}, 1)$ y $\vec{u}_2 = (\sqrt{3}, -1)$)

b) Ídem con $|\vec{u}| = 3\sqrt{2}$ y $\hat{i} \cdot \vec{u} = 45^\circ$ (Soluc: $\vec{u}_1 = (3, 3)$ y $\vec{u}_2 = (3, -3)$)

54. Calcular a con la condición de que $\vec{u} = (a, 1)$ forme 60° con $\vec{v} = (1, 1)$ (Aviso: puede haber dos soluciones, por lo que se recomienda hacer un dibujo) (Soluc: $\sqrt{3} - 2$)



55. Hallar el valor de x para que el vector $(x,1)$ forme 45° con el vector $(1,2)$ (Aviso: puede haber dos soluciones) (Soluc: $x_1=3$ y $x_2=-1/3$)

56. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (a, 3)$, calcular a de modo que:

- a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales (Soluc: $a=3/2$)
b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen 60° (Soluc: $a = \frac{24+15\sqrt{3}}{11}$)
c) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan la misma dirección (Soluc: $a=-6$)

57. Dados los vectores $\vec{a} = (1, -1)$ y $\vec{b} = (2, m)$, hallar m de forma que:

- a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales. (Soluc: $m=2$)
b) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tengan la misma dirección. (Soluc: $m=-2$)
c) $\vec{b}$ sea unitario. (Soluc: $\nexists$ soluc.)
d) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ formen 45° (Soluc: $m=0$)

58. Dados $\vec{a} = (3, -4)$ y $\vec{b} = (5, x)$, hallar x para que:

- a) ambos vectores sean perpendiculares (Soluc: $x=15/4$)
b) ambos vectores formen 30° (Soluc: $x_1 \cong -2,1$; $x_2 \cong -41,50$)
c) tengan la misma dirección (Soluc: $x=-20/3$)

59. Dados $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (a, -3)$, se pide:

- a) Hallar a para que sean $\parallel$. Justificar gráficamente la solución obtenida. (Soluc: $a=-6$)
b) Hallar a para que sean $\perp$. Justificar gráficamente la solución obtenida. (Soluc: $a=3/2$)
c) Hallar a para que formen 45° . Justificar gráficamente la solución obtenida. (Soluc: $a=9$)
d) Hallar un vector $\perp$ a $\vec{u}$ de módulo 5 (Soluc: $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ o su opuesto)

60. Dados $\vec{u} = (3, -4)$ y $\vec{v} = (a, 2)$, se pide:

- a) Hallar a tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ (Soluc: $a=4$)
b) ¿Qué ángulo formarán $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el caso anterior? (Soluc: $\cong 79^\circ 41' 43''$)
c) Hallar a tal que $\vec{u} \parallel \vec{v}$. Explicar gráficamente la situación. (Soluc: $a=-3/2$)
d) Hallar un vector $\perp$ a $\vec{u}$ y de módulo 10. Explicar gráficamente la situación. (Soluc: $(8, 6)$, o su opuesto)

61. Considerar los vectores $\vec{u} = (b, -\sqrt{3})$ y $\vec{v} = (-\frac{1}{2}, a)$

- a) Hallar a y b para que $\vec{v}$ sea unitario y ambos vectores sean $\perp$ y estén en el semiplano inferior. (Soluc: $a=-\sqrt{3}/2$; $b=3$)
b) Comprobar gráficamente el resultado:
c) Si $b=0$, ¿podrían ser $\parallel$ para algún valor de a ? (Soluc: NO)

Área de un triángulo:

62. Hallar los ángulos del triángulo de vértices A(-2,2), B(5,3) y C(2,15). Hallar también su área.
(Soluc: $A \cong 64^\circ 46'$; $B \cong 84^\circ 6'$; $C \cong 31^\circ 8'$; $S_{ABC} = 43,5 \text{ u}^2$)
63. Dado el triángulo de vértices A(1,1), B(5,4) y C(-5,9), se pide:
- Dibujarlo.
 - Demostrar que es rectángulo en A (Soluc: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$)
 - Hallar su área. (Soluc: $S_{ABC} = 25 \text{ u}^2$)
64. a) Dibujar el triángulo de vértices A(1,-2), B(3,-1) y C(2,1) y hallar su área. (Soluc: $S_{ABC} = 2,5 \text{ u}^2$)
b) Ídem con A(3,8), B(-11,3) y C(-8,-2) (Soluc: $S_{ABC} = 42,5 \text{ u}^2$)
c) Ídem con A(4,-1), B(2,1) y C(0,2) (Soluc: $S_{ABC} = 1 \text{ u}^2$)
65. **TEORÍA:** a) Dado el vector $\vec{u} = (3, -4)$, hallar razonadamente otro vector con la misma dirección pero de módulo 2. Hacer un dibujo explicativo.
b) Dados $\vec{u} = (-1, 2)$, $\vec{v} = (2, -3)$ y $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$, hallar $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$
c) ¿Son ortonormales $\vec{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\vec{b} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$? ¿Y ortogonales?
d) ¿Qué indica el signo del producto escalar? Indicar ejemplos.
e) Demostrar que el vector $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{c}$
f) ¿Pueden ser paralelos los vectores (2,a) y (0,5)?
g) ¿Puede ser un unitario el vector (2,a)? (Razonarlo no analíticamente)

Ejercicio 1

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ mediante sus coordenadas respecto a una base ortonormal, $\vec{u}(3, -4)$, $\vec{v}(-1, 3)$, halla:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}})$

c) El valor de k para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$.

d) Un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -4) \cdot (-1, 3) = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -15$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-1, 3) \cdot (3, -4) = (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -15$$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-15}{5\sqrt{10}} = -0,9486832981 \rightarrow (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = 161^\circ 33' 54''$$

c) $(4, k) \perp (-1, 3) \rightarrow (4, k) \cdot (-1, 3) = 0 \rightarrow -4 + 3k = 0 \rightarrow k = \frac{4}{3}$

Para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$, ha de ser $k = \frac{4}{3}$.

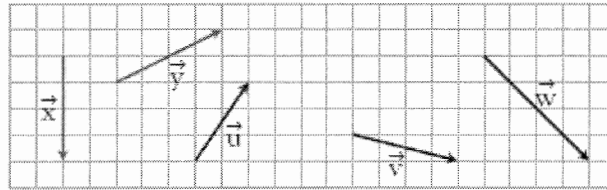
d) Un vector perpendicular a $\vec{u}(3, -4)$ es, por ejemplo, $(4, 3)$.

$$\text{Un vector unitario paralelo a } (4, 3) \text{ es } \frac{1}{|(4, 3)|} \cdot (4, 3) = \frac{1}{5}(4, 3) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Hay dos vectores unitarios perpendiculares a $(3, -4)$. Son $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ y $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Ejercicio 2

Escribe los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.



¿Cuáles serán las coordenadas de esos vectores respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$?

$$\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}, \text{ luego } \vec{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ respecto de } B(\vec{x}, \vec{y}).$$

$$\vec{v} = \frac{3}{4}\vec{x} + \vec{y}, \text{ luego } \vec{v} = \left(\frac{3}{4}, 1\right) \text{ respecto de } B(\vec{x}, \vec{y}).$$

$$\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{x} + \vec{y}, \text{ luego } \vec{w} = \left(\frac{3}{2}, 1\right) \text{ respecto de } B(\vec{x}, \vec{y}).$$

Ejercicio 3

Halla el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}(-1, 3)$ y $\vec{c}(7, -2)$.

$$(7, -2) = 3(-1, 3) - \frac{1}{2}(b_1, b_2) \rightarrow \begin{cases} 7 = -3 - (1/2)b_1 \rightarrow b_1 = -20 \\ -2 = 9 - (1/2)b_2 \rightarrow b_2 = 22 \end{cases}$$

$$\vec{b}(-20, 22)$$

Ejercicio 4

Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que:
 $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

$$(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \rightarrow \begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

Despejando en la primera ecuación, $n = 3m$, y sustituyendo en la segunda:

$$-5 = -2m + 6m \rightarrow -5 = 4m \rightarrow m = \frac{-5}{4} \rightarrow n = \frac{-15}{4}$$

Ejercicio 5

¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(1, 3)$

b) $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

a) Sí, tienen distinta dirección ($\vec{u} \neq k\vec{v}$ para cualquier k). Basta con representarlos gráficamente para comprobarlo.

b) No, pues tienen la misma dirección ($\vec{u} = 3\vec{v}$).

Ejercicio 6

Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ y $\vec{w}(5, 2)$, calcula:

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$

d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

■ a) *Halla primero las coordenadas de $3\vec{u} + 2\vec{v}$.*

c) *Efectúa $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Multiplica el resultado (un número) por el vector $\vec{w}$. Obtendrás un vector.*

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) = (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$

$$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$

$$\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$$

Ejercicio 7

Halla el valor de m para que el módulo del vector $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$ sea igual a 1.

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + m^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + m^2 = 1 \rightarrow m^2 = \frac{16}{25} \begin{cases} m_1 = \frac{4}{5} \\ m_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Ejercicio 8

Halla el valor de m para que el módulo del vector $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$ sea igual a 1.

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + m^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + m^2 = 1 \rightarrow m^2 = \frac{16}{25} \begin{cases} m_1 = \frac{4}{5} \\ m_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Ejercicio 9

Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}(x, y)$, ortogonal a $\vec{u}(3, 4)$ y que mida el doble que $\vec{u}$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} \perp \vec{v} &\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow 3x + 4y = 0 \\ |\vec{v}| &= 2|\vec{u}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{9 + 16} = 2\sqrt{25} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 = 100 \end{aligned} \right\}$$

Resolvemos el sistema:

Despejamos x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

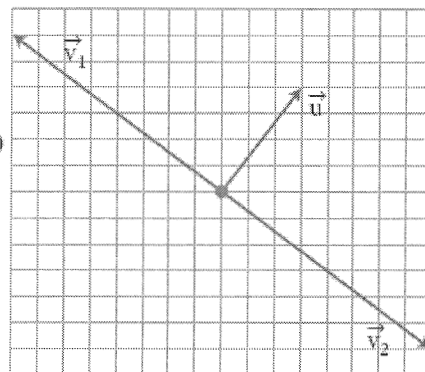
$$x = -\frac{4}{3}y \rightarrow \left(-\frac{4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 100 \rightarrow y = \pm 6$$

$$\text{Si } y_1 = 6 \rightarrow x_1 = -\frac{4}{3} \cdot 6 = -8 \rightarrow \vec{v}_1(-8, 6)$$

$$\text{Si } y_2 = -6 \rightarrow x_2 = -\frac{4}{3} \cdot (-6) = 8 \rightarrow \vec{v}_2(8, -6)$$

El problema tiene dos posibles soluciones, tales que:

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$



Ejercicio 11

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.

✎ Escribe las coordenadas de $(\vec{a} + \vec{b})$ y $(\vec{a} - \vec{b})$.

Si $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, entonces $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Obtendrás una ecuación cuya incógnita es k .

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= 2(2, 3) - (-3, 0) = (7, 6) \\ \vec{b} &= -3(2, 3) + k(-3, 0) = (-6 - 3k, -9) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (1 - 3k, -3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (13 + 3k, 15) \end{cases}$$

Ahora, como el producto escalar de ambos vectores debe ser 0, por ser ortogonales:

$$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \rightarrow (1 - 3k)(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0$$

$$13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \rightarrow 9k^2 + 36k + 32 = 0$$

$$k = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 - 1152}}{18} = \frac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} =$$

$$= \frac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases} -24/18 = -4/3 = k_1 \\ -48/18 = -8/3 = k_2 \end{cases}$$

Ejercicio 12

Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ tal que $|\vec{u}| = 1$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ siendo $\vec{v}(2, 1)$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}(a, b) \rightarrow |\vec{u}| = 1 \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \rightarrow (a, b) \cdot (2, 1) = 1 \rightarrow 2a + b = 1 \end{aligned} \right\} \text{ Resolvemos el sistema:}$$

$$b = 1 - 2a \rightarrow a^2 + (1 - 2a)^2 = 1 \rightarrow a^2 + 1 + 4a^2 - 4a = 1 \rightarrow 5a^2 - 4a = 0$$

$$a = 0 \rightarrow b = 1$$

$$a = \frac{4}{5} \rightarrow b = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Soluciones: } \vec{u}_1(0, 1) \text{ y } \vec{u}_2\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

RECTAS en el PLANO



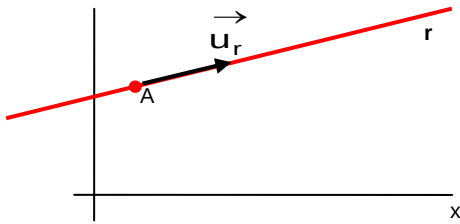
MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato CCNN

**Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas**



I. ECUACIONES de la RECTA

I.1) Determinación principal de la recta:

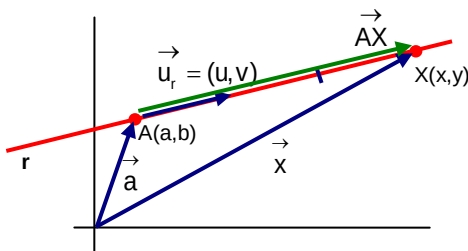


Es evidente que una recta r (ver dibujo) va a quedar determinada por un punto cualquiera de ella ($A \in r$) y un vector director, es decir, que tenga su misma dirección ($\vec{u}_r \neq \vec{0}$). Ambos elementos, punto y vector director, constituyen la **determinación principal** de la recta. En la práctica, escribiremos:

$$r = \left\{ A, \vec{u}_r \right\}$$

¿Por qué utilizamos el calificativo "principal"? Porque, obviamente, no es la única forma de determinar una recta. Existen infinitas formas: por ejemplo, es evidente que sólo existe una recta que pase por dos puntos, o una recta paralela a otra dada y que pase por un punto exterior a ésta, o perpendicular a otra recta dada y que pase por un determinado punto, etc. Ahora bien, nótese que siempre nos darán dos datos para determinar una recta.

I.2) Ecuación vectorial y paramétrica:



Considerar la recta r de la figura adjunta. Supongamos que nos dan su determinación principal, es decir, $\{A, \vec{u}_r\}$.

Supongamos un punto genérico $X \in r$, es decir, un punto cualquiera de r , que puede variar. Es evidente que si X está en la recta, entonces el vector $\vec{AX}$ será proporcional a $\vec{u}_r$ (por ejemplo, en el dibujo se ve que $\vec{AX}$ es aproximadamente el triple que $\vec{u}_r$), es decir:

$$X \in r \Rightarrow \vec{AX} = \lambda \vec{u}_r \quad (1)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ se llama **parámetro**, y va a jugar un papel fundamental en todo el tema. Dando valores positivos y negativos a λ se irían obteniendo los infinitos puntos X que irían trazando la recta¹.

Por otra parte, es evidente en el dibujo la siguiente suma vectorial:

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{AX} \quad (2)$$

Reemplazando $\vec{AX}$ de (1) en (2) obtenemos la **ecuación vectorial** de la recta:

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}_r} \quad (\text{donde } \lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{EC. VECTORIAL} \quad (3)$$

¹ Esto puede verse de forma interactiva en el siguiente enlace, muy interesante y recomendable:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Puntos_rectas_planos_d3/Representacion_de_rectas.htm

$$Ax + By + C = 0$$

EC. GRAL o IMPLÍCITA

(6)

Observaciones: 1ª) Todo punto (x,y) que verifique la ecuación $\in r$, y viceversa.

2ª) Ventaja: La forma general o implícita de la recta **es única** (salvo simplificación de sus tres coeficientes).

3ª) Recordemos que $-u=B$ i.e. $u=-B$, y que $v=A \Rightarrow \vec{u}_r = (-B, A)$ (También vale $\vec{u}_r = (B, -A)$)

Ejercicios final tema: 3 a 5

I.4) Ecuación punto-pendiente:

Partimos de nuevo de la forma continua:

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} \Rightarrow y-b = \frac{v}{u}(x-a) \Rightarrow y-b = m(x-a)$$

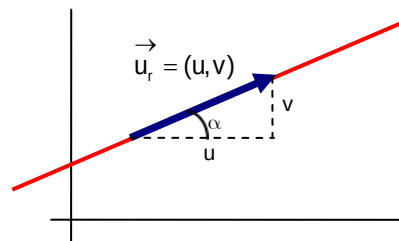
pendiente
↓
 $y-b = m(x-a)$
↑
coordenadas del punto

$v/u = m$

EC. PTO.-PDTE. (7)

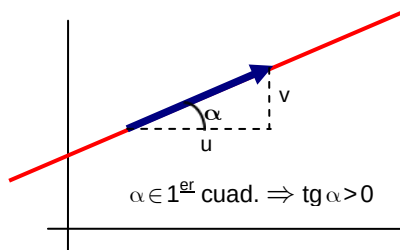
Observaciones: 1ª) Como $\vec{u}_r = (u,v)$, entonces el cociente v/u lo hemos redefinido como **m**, y se llama **pendiente** de la recta. En el dibujo puede verse que $v/u=m$ es la tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal:

$$\frac{v}{u} = m = \operatorname{tg} \alpha \quad (8)$$

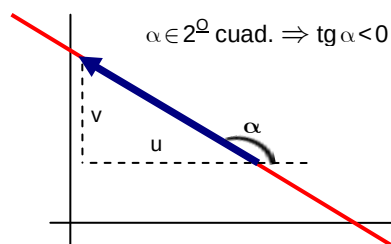


es decir, **m**, indica la inclinación de la recta, y por eso se llama pendiente: «**La pendiente, m, de una recta es la tangente del ángulo que forma dicha recta con la parte positiva del eje x**»

2ª) El signo de **m** nos indica si la recta es creciente o decreciente:



$m > 0 \Rightarrow$ RECTA CRECIENTE



$m < 0 \Rightarrow$ RECTA DECRECIENTE

3ª) La pendiente de una recta es única (¡no así el vector director!).

4ª) La forma punto-pendiente no es única (téngase en cuenta que hay ∞ puntos (a,b) de la recta).

Ejercicios final tema: 6

I.5) Ecuación explícita:

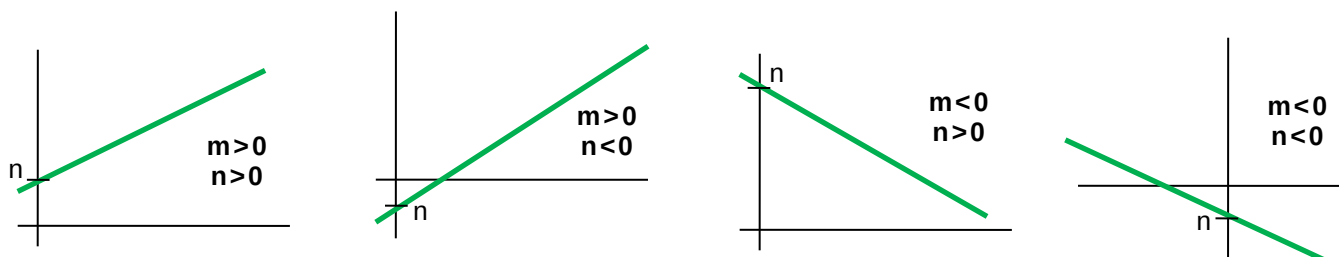
Se obtiene despejando y de la forma general, o también de la punto-pendiente:

$$y - b = m(x - a); \quad y - b = mx - ma; \quad y = mx - ma + b \Rightarrow y = mx + n$$

$\underbrace{-ma + b}_{=n}$ pendiente ordenada en el origen

EC. EXPLÍCITA (9)

Observaciones: 1ª) El término independiente, n , llamado **ordenada en el origen**, indica a qué altura corta la recta al eje de ordenadas. Por tanto, en función del signo que toman m y n hay 4 casos:

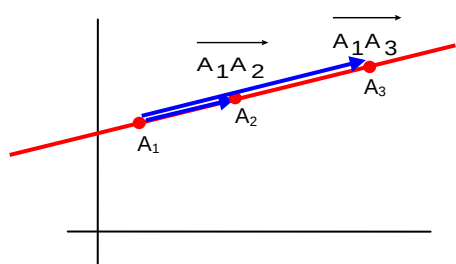


2ª) Esta forma es absolutamente única.

■ Esquema resumen de rectas: ver anexo al final del libro

Ejercicios final tema: 7 a 28

I.5) Condición para que 3 (o más) puntos estén alineados:



Como puede verse en el dibujo adjunto, es obvio que, para que tres puntos A_1 , A_2 y A_3 estén alineados, es condición necesaria y suficiente que al formar dos vectores cualesquiera con ellos³ –por ejemplo, $\vec{A_1A_2}$ y $\vec{A_1A_3}$ –, estos sean paralelos. Recordar del tema anterior que ello equivale a decir que tengan sus componentes proporcionales:

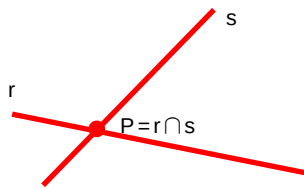
$$A_1, A_2, A_3 \text{ alineados} \Leftrightarrow \vec{A_1A_3} // \vec{A_1A_2} \Leftrightarrow \vec{A_1A_3} \propto \vec{A_1A_2} \quad (10)$$

³ También valdría el par $\vec{A_1A_2}$ y $\vec{A_2A_3}$

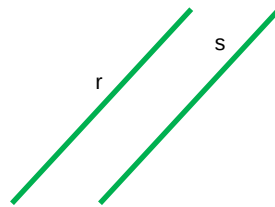
Ejercicios final tema: 16

II. POSICIÓN RELATIVA DE 2 RECTAS

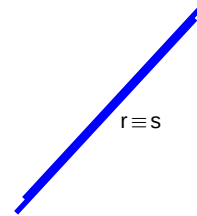
Recordemos que en el plano sólo hay 3 posibilidades de posición relativa de 2 rectas:



SECANTES
(se cortan en un punto P)



PARALELAS
(nunca se cortan)



COINCIDENTES
(se cortan en ∞ puntos)

Nótese que:

PARALELAS o COINCIDENTES $\Rightarrow$ 1º) sus $\vec{u}_r$ son proporcionales
2º) sus m son iguales

Hay dos formas de estudiar su posición relativa:

1º) Resolviendo el sistema:

Ejercicio 1: Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas por medio de la resolución del sistema que forman:

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} \quad (\text{Soluc: Secantes})$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x + 6y - 3 = 0 \end{cases} \quad (\text{Soluc: Paralelas})$$

c)
$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x + 6y + 2 = 0 \end{cases} \quad (\text{Soluc: Coincidentes})$$

2º) Estudiando sus m o $\vec{u}_r$: Recordar que si una recta venía dada en forma implícita i.e. $Ax+By+C=0$, entonces su dirección venía dada por $\vec{u}_r = (-B,A)$. Por tanto, los dos primeros coeficientes, A y B, indican su dirección. Entonces, si dos rectas tienen sus dos primeros coeficientes iguales o proporcionales, pueden ser o bien paralelas o bien coincidentes. Si además el tercer coeficiente de ambas es igual o proporcional, es obvio que serán la misma recta. Un razonamiento similar puede aplicarse si ambas rectas vienen dadas en explícitas. Todo ello se resume en la siguiente tabla:

	RECTAS en EXPLÍCITAS	RECTAS en IMPLÍCITAS
	$y=mx+n$ $y=m'x+n'$	$Ax+By+C=0$ $A'x+B'y+C'=0$
SECANTES	$m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$
PARALELAS	$m = m'$ $n \neq n'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
COINCIDENTES	$m = m'$ $n = n'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

COND. de PARALELISMO

Ejercicio 2: Comprobar la posición relativa de los anteriores pares de rectas sin resolver el sistema:

a) $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$ (Soluc: Secantes)

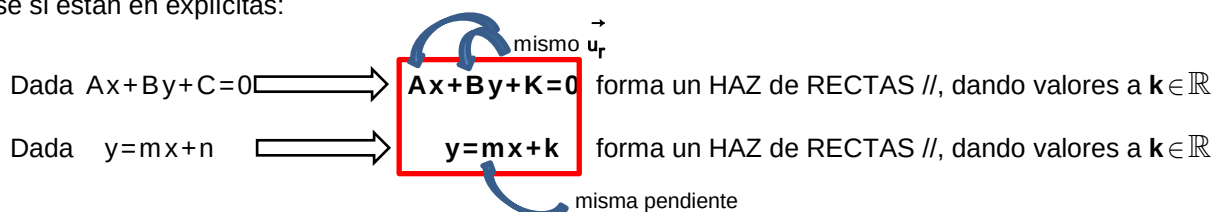
b) $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x + 6y - 3 = 0 \end{cases}$ (Soluc: Paralelas)

c) $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x + 6y + 2 = 0 \end{cases}$ (Soluc: Coincidentes)

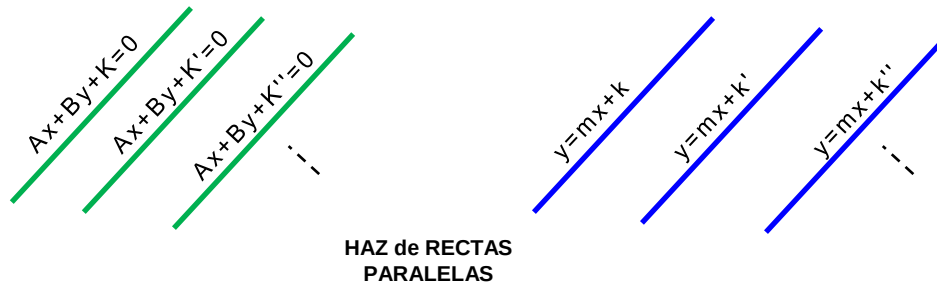
Ejercicios final tema: 29 a 35

Aplicación: HAZ de RECTAS //

Como acabamos de ver, si dos rectas que vienen dadas en implícitas tienen sus dos primeros coeficientes iguales (o proporcionales) entonces serán paralelas. Por tanto, dada una recta $Ax+By+C=0$, las ∞ rectas de la forma $Ax+By+K=0$, que se obtienen dando valores a $k \in \mathbb{R}$, serán todas paralelas, constituyendo lo que se conoce como HAZ de RECTAS PARALELAS. Un razonamiento parecido puede aplicarse si están en explícitas:



Gráficamente:



Ejercicios final tema: 36 a 40

III. PUNTOS y RECTAS NOTABLES de un TRIÁNGULO

III.1) Recta $\perp$ a una dada:

Recordemos del tema anterior que, dado un vector, para obtener un vector $\perp$ había que permutar sus componentes y cambiar una de ellas de signo. En este caso, dado $\vec{u}_r = (-B, A)$, para obtener un vector normal, es decir, $\perp$, tenemos que hacer $\vec{n} = (A, B)$. Es decir:

$$\vec{u}_r = (-B, A) \xrightarrow{\perp} \vec{n} = (A, B) \perp \vec{u}_r \quad (11)$$

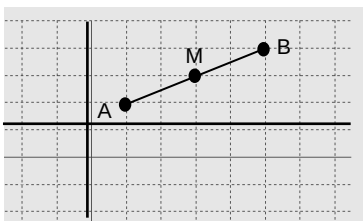
Nótese que también valdría el $(-A, -B)$ como vector normal. E incluso habría infinitos vectores, que serían todos los proporcionales a (A, B) .

Por tanto, si nos piden la ecuación de una recta $\perp$ a una recta dada y que pase por un determinado punto, lo más cómodo es obtenerla en forma continua.

Ejercicios final tema: 41 a 44

III.2) Coordenadas del punto medio de un segmento:

Recordemos también del tema anterior que, dado un segmento de extremos A y B, las coordenadas de su punto medio serán la semisuma de dichos extremos.



$$M = \frac{A + B}{2} \quad (12)$$

Compruébese en el ejemplo del dibujo (Ver demostración en Internet).

Ejercicios final tema: 45

III.3) MEDIATRIZ: «Es la recta $\perp$ a un lado del triángulo por su punto medio».

Como ya se ha explicado en III.1, si nos dan la ecuación de la recta que forma un lado del triángulo, se recomienda obtener su mediatriz en forma continua. Para hallar el punto medio del lado hay que aplicar (12).

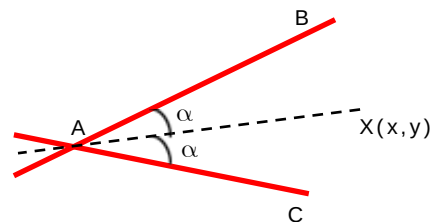
Es obvio que un triángulo tiene 3 mediatrices, las cuales se cortan en un punto llamado **CIRCUNCENTRO**⁴, el cual se puede obtener resolviendo el sistema formado por dos mediatrices cualesquiera.

Ejercicios final tema: 46 a 49

III.4) BISECTRIZ: «Es la recta que divide un ángulo en dos iguales».

Las 3 bisectrices del triángulo se cortan en un punto llamado **INCENTRO**⁵. Si conocemos u obtenemos los vértices (A, B y C; ver figura) de ambos lados, entonces la bisectriz es el **lugar geométrico**⁶

formado por los ∞ puntos genéricos $X(x, y)$ que resultan de imponer que $\widehat{ABX} = \widehat{ACX}$ (El α de la figura).



NOTA: Cuando se aborde más adelante el cálculo de la distancia punto-recta, se verá otro método mucho mejor para hallar la bisectriz (vid. apdo. V).

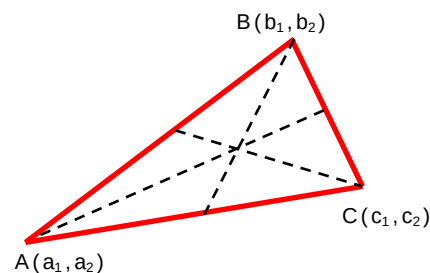
Ejercicios final tema: 50

III.5) MEDIANA: «Es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto».

Las 3 medianas se cortan en un punto llamado **BARICENTRO**⁷ o centro de gravedad. Para obtener cualquier mediana se recomienda la forma continua, obteniendo el punto medio por (12). El baricentro se puede obtener de dos formas:

1º) Resolviendo el sistema formado por dos medianas cualesquiera.

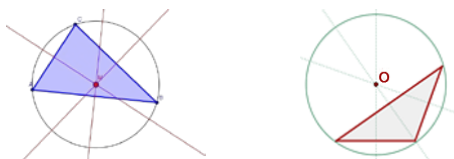
2º) Mediante la fórmula $G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$ (13)



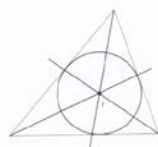
III.6) ALTURA: «Es la recta $\perp$ a un lado que une éste (o su prolongación) con el vértice del lado opuesto».

Las 3 alturas se cortan en un punto llamado **ORTOCENTRO**⁸. Se recomienda, a la hora de hallar cualquier altura, hacerlo en forma continua, aplicando para ello lo visto en III.1.

⁴ Se llama **circuncentro** porque es el centro de la circunferencia circunscrita (figura izda.). Recordar que si el triángulo es obtusángulo, entonces el circuncentro se encuentra fuera de éste (figura dcha.).



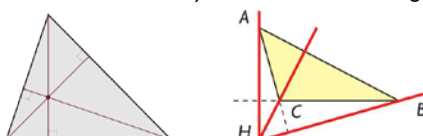
⁵ Se llama **incentro** porque es el centro de la circunferencia inscrita. Siempre está en el interior del triángulo:



⁶ El **lugar geométrico** es un importante concepto matemático que veremos más veces a lo largo del curso. **Es un conjunto de puntos (x,y) que cumplen una determinada condición.**

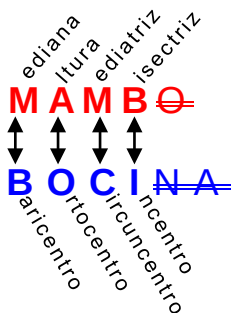
⁷ El **baricentro** (del griego *baros*, pesadez, peso, carga, gravedad) siempre está en el interior del triángulo.

⁸ El **ortocentro** (del griego *orthos*, derecho, recto, correcto) está fuera del triángulo si éste es obtusángulo:

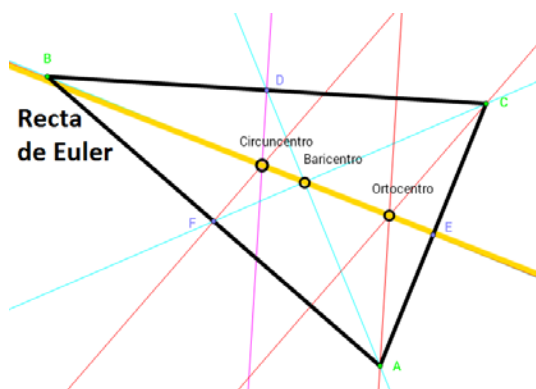


Ejercicios final tema: 51 a 57

Observaciones: 1ª) Existe una sencilla regla mnemotécnica para recordar qué punto notable corresponde a qué recta notable, y viceversa:



2ª) Curiosidad: El baricentro, ortocentro y circuncentro (los tres primeros de la regla anterior) están alineados en lo que se conoce como **recta de Euler**⁹, de forma que el baricentro está siempre situado entre los otros dos y a doble distancia del ortocentro que del circuncentro:



IV. ÁNGULO DE 2 RECTAS SECANTES

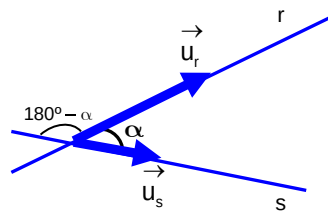
Como reza el título del apartado, sólo tiene interés considerar el ángulo que forman dos rectas si éstas son secantes pues, si son paralelas o coincidentes (lo cual es fácil de detectar, pues, en tal caso, sus vectores directores serán iguales o proporcionales), el ángulo sería 0.

Hay dos formas de obtener el ángulo de dos rectas secantes:

a) En función de los $\vec{u}_r$: En primer lugar, hay que hacer notar que por ángulo de dos rectas entendemos el menor i.e. el agudo (el α de la figura, no su suplementario, $180^\circ - \alpha$)

Es evidente que el ángulo α que forman ambas rectas coincidirá (salvo un detalle que luego explicaremos) con el que forman sus vectores directores, por lo que utilizaremos la correspondiente fórmula vista en el tema anterior:

$$\cos \alpha = \cos \left(\vec{u}_r, \vec{u}_s \right) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{\|\vec{u}_r\| \|\vec{u}_s\|} \quad (14)$$



⁹ En honor al insigne matemático suizo *Leonhard Euler* (1707-1783), quien demostró este hecho.

Observaciones: 1ª) El valor absoluto del numerador es para quedarnos con el ángulo agudo, α , no con el suplementario, $180^\circ - \alpha$. En efecto, si no indicáramos el valor absoluto, $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s$ podría resultar negativo, lo cual, como vimos en el tema anterior, significaría que ambos vectores forman un ángulo obtuso. Por otra parte, recordemos que $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ i.e. ambos ángulos, el agudo y el suplementario tienen el mismo coseno, salvo el signo; de ahí la necesidad del valor absoluto.

2ª) Si las rectas son paralelas o coincidentes, es trivial que (14) daría un ángulo 0.

3ª) Esta fórmula es práctica si ambas rectas vienen dadas en continua o general. En caso contrario, es mejor utilizar la del siguiente apartado.

Condición de perpendicularidad (en función de los coeficientes):

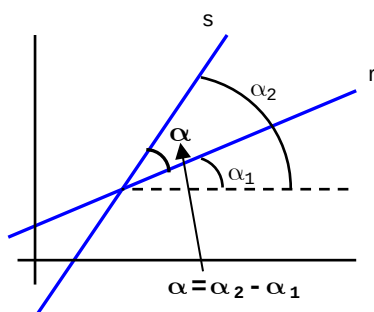
$$\text{«Dos rectas, } Ax + By + C = 0 \text{ y } A'x + B'y + C' = 0, \text{ son } \perp \Leftrightarrow \boxed{AA' + BB' = 0} \text{»} \quad (15)$$

NOTA: En la práctica, dos rectas en implícitas son $\perp$ si sus dos primeros coeficientes se encuentran permutados y uno de ellos cambiado de signo. V.g. $2x - 3y + 5 = 0$ y $3x + 2y = 0$.

DEM:
$$\left. \begin{array}{l} r: Ax + By + C = 0 \\ s: A'x + B'y + C' = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-B, A) \\ \vec{u}_s = (-B', A') \end{array} \right\} r \perp s \Leftrightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0 \Leftrightarrow (-B, A) \cdot (-B', A') = BB' + AA' = 0$$

(C.Q.D.)

b) En función de las pendientes: Vamos a utilizar en este caso la fórmula de la tangente de la diferencia, vista en el tema de Trigonometría. Por otra parte, recordemos del apdo. I.4 que la pendiente m de una recta es $\text{tg } \alpha$, siendo α el ángulo que forma con OX^+ (ver figura). Por tanto:



$$\boxed{\text{tg } \alpha = \text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\text{tg } \alpha_2 - \text{tg } \alpha_1}{1 + \text{tg } \alpha_2 \text{tg } \alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}} \quad (16)$$

Observaciones: 1ª) El valor absoluto de nuevo es para quedarnos con el ángulo agudo, α , no con el suplementario, $180^\circ - \alpha$. En efecto, si no indicáramos el valor absoluto, por ejemplo $m_2 - m_1$ podría resultar negativo, lo cual conduciría a una tangente negativa, es decir, al suplementario de α . Y recordemos que $\text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha$; de ahí la necesidad del valor absoluto.

2ª) En la práctica, y sobre todo en los problemas en los que aparece un parámetro en alguna recta, hay que intercambiar m_1 y m_2 para generar dos soluciones. De todas formas, en tal caso se recomienda utilizar mejor (14).

3ª) Esta fórmula es útil si las rectas están en pto.-pdte. o en explícita.

Condición de perpendicularidad (en función de las pendientes):

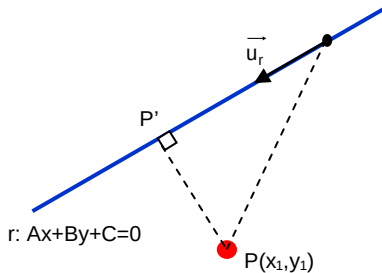
$$\text{«Si dos rectas son } \perp, \text{ entonces sus pendientes son inversas y opuestas: } \boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}} \text{»} \quad (17)$$

DEM:
$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \text{tg } \alpha = \infty \Rightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad (\text{C.Q.D.})$$

 el numerador de (16) debe anularse

Ejercicio final tema: 58 a 73

V. $d(P,r)$



Supongamos que nos dan un punto $P(x_1, y_1)$ y queremos obtener su distancia a la recta r de ecuación $Ax+By+C=0$ (ver figura). Ésta será igual a la distancia entre P y P' , proyección ortogonal de P sobre r , y viene dada por la siguiente fórmula:

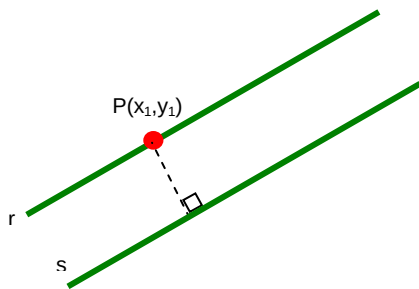
$$\left. \begin{array}{l} r: Ax+By+C=0 \\ P(x_1, y_1) \end{array} \right\} d(P,r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\text{sustituir } P \text{ en } r|}{\|\vec{u}_r\|} \quad (18)$$

Observaciones:

- 1ª) Ver demostración en Internet.
- 2ª) El valor absoluto se emplea para que la distancia no salga negativa.
- 3ª) Si la recta no viene dada en forma general, habrá que pasarla a diestacha forma.
- 4ª) Si la recta dada es horizontal ($y=k$) o vertical ($x=k$), hallar su distancia a un punto es trivial y no hace falta aplicar esta fórmula sino hacer un dibujo. (Ver, por ejemplo, el ejercicio 74d)

Ejercicios final tema: 74 a 84

Aplicación: Distancia entre rectas // La fórmula anterior sirve también para hallar la distancia entre dos rectas //, siguiendo el proceso lógico siguiente:



- 1º) Obtenemos por tanteo un punto cualquiera de cualquiera de las dos rectas (por ejemplo, en el dibujo $P \in r$).
- 2º) Calculamos la distancia de dicho punto a la otra recta:

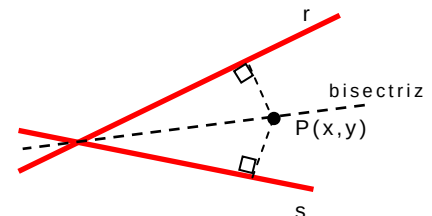
$$d(r,s)=d(P,s) \quad (19)$$

¡Cuidado! Previamente hay que cerciorarse de que las dos rectas son paralelas.

Ejercicios final tema: 85 a 97

Aplicación: Cálculo de la bisectriz: (18) también sirve para hallar la bisectriz de dos lados de un triángulo. Si ambos lados vienen dados como rectas, entonces (ver dibujo) «la bisectriz será el lugar geométrico formado por los ∞ puntos genéricos $P(x,y)$ tales que $d(P,r)=d(P,s)$ ».

(20)

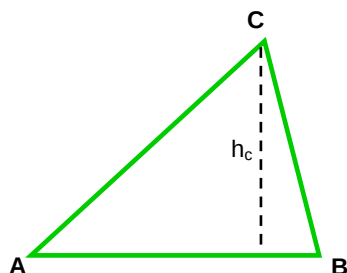


Ejercicios final tema: 98 y 99

VI. ÁREA DEL TRIÁNGULO

Hay dos posibilidades:

1º) Si nos dan las coordenadas de los 3 vértices: A su vez, podemos resolverlo empleando rectas, o por vectores, siguiendo el proceso lógico que recoge la siguiente tabla:

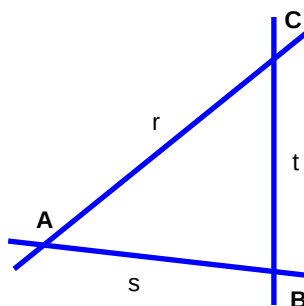


POR RECTAS	POR VECTORES
1º) Dibujar la situación.	1º) Dibujar la situación.
2º) Calcular la base = $\ \overline{AB}\ $	2º) Calcular $\ \overline{AB}\ $ y $\ \overline{AC}\ $
3º) Calcular la ecuación de la recta $\overline{AB}$ ''' $h_c = d(C, \text{recta } \overline{AB})$	3º) Calcular $\hat{A}$
4º) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \ \overline{AB}\ h_c$ (21)	4º) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \ \overline{AB}\ \ \overline{AC}\ \sin \hat{A}$ (22)

Nótese que en el caso de la columna izquierda hemos aplicado la archiconocida fórmula del área del triángulo. Por lo que respecta a la de la columna derecha, se trata de una fórmula vista en el tema de Trigonometría.

Ejercicios final tema: 100

2º) Si nos dan las ecuaciones de las rectas que forman los lados:



Previamente habrá que hallar las coordenadas de los 3 vértices:

$$A = r \cap s \quad B = s \cap t \quad C = r \cap t$$

Y después aplicar cualquiera de los dos métodos del apdo. anterior.

Ejercicios final tema: 101 en adelante

107 EJERCICIOS de RECTAS

Forma paramétrica:

1. Dado el punto $A(5,3)$ y el vector director $\vec{u}_r = (1,-2)$, se pide:
 - a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r que determinan.
 - b) Obtener otros tres puntos cualesquiera de dicha recta.
 - c) Comprobar analíticamente si los puntos $P(2,-1)$ y $Q(3,7) \in r$. (Sol: NO; SÍ)
 - d) Dibujar dicha recta y comprobar gráficamente los apartados anteriores.
 - e) Indicar otras ecuaciones paramétricas para la recta.
2. Dados los puntos $A(1,3)$ y $B(-1,6)$, se pide:
 - a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta s que determinan.
 - b) Obtener otros tres puntos cualesquiera de dicha recta.
 - c) Comprobar analíticamente si los puntos $P(7,-6)$ y $Q(2,2) \in s$. (Sol: SÍ; NO)
 - d) Dibujar dicha recta y comprobar gráficamente los apartados anteriores.

Forma continua y general:

3. Con los datos del ejercicio 1, se pide:
 - a) Hallar las ecuaciones continua y general o implícita de la recta r que determinan. (Soluc: $2x+y-13=0$)
 - b) Comprobar en la ecuación general que $\vec{u}_r = (-B,A)$
 - c) A partir de la ecuación general, obtener otros tres puntos cualesquiera de dicha recta.
 - d) Comprobar en ambas ecuaciones si los puntos $P(2,1)$ y $Q(3,7) \in r$
4. Ídem con los datos del ejercicio 2 (Soluc: $3x+2y-9=0$)
5. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de los ejes de coordenadas.

Forma punto-pendiente:

6. Hallar la forma punto-pendiente de las dos rectas de los ejercicios 1 y 2
 - a) Directamente, a partir de los datos.
 - b) A partir de su forma continua.
 - c) Operarla para comprobar que se obtiene la general.

Forma explícita:

7. Hallar la forma explícita de las dos rectas de los ejercicios 1 y 2
 - a) Directamente, a partir de los datos.
 - b) A partir de las formas anteriores.(Soluc: $y=-2x+13$ e $y=-3x/2+9/2$)



Todas las formas:

8. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3,5) y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (2, -4)$ en todas las formas posibles. Dibujarla. (Soluc: $2x + y - 11 = 0$)
 b) Ídem para el punto A(3,1) y $\vec{u} = (4, -2)$ (Soluc: $x + 2y - 5 = 0$)
 c) Ídem para A(3,1) y $\vec{u} = (0, 2)$ (Soluc: $x = 3$)
 d) Ídem para A(3,-1) y $\vec{u} = (5, 0)$ (Soluc: $y = -1$)
9. a) Hallar la ecuación de la bisectriz del 1^{er} y 3^{er} cuadrantes. (Soluc: $y = x$)
 b) Ídem para la del 2^o y 4^o cuadrantes. (Soluc: $y = -x$)
 c) Hallar la ecuación de las dos trisectrices del 1^{er} cuadrante.
10. Dada la recta de la figura, hallar su ecuación:
 a) Directamente, en forma continua.
 b) En forma general, operando a partir de la anterior. (Sol: $2x - y + 1 = 0$)
 c) Directamente, en forma punto-pendiente.
 d) Directamente, en forma explícita. (Sol: $y = 2x + 1$)
11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3,2) y B(1,-4) en todas las formas posibles. Dibujarla. (Soluc: $3x - y - 7 = 0$)
12. Representar las siguientes rectas:
 a) $2x + 3y - 7 = 0$ b) $x = 3$ c) $y = 2$ d) $\left. \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \end{array} \right\}$ e) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1}$
13. Pasar a forma explícita las siguientes rectas y calcular sus pendientes:
 a) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-1}$ b) $5x + 3y + 6 = 0$ c) $\left. \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 5 - 3t \end{array} \right\}$ (Soluc: $y = -\frac{x}{2} - \frac{7}{2}$; $y = -\frac{5}{3}x - 2$; $y = -3x + 11$)
14. Determinar si el punto P(2,-1) pertenece a la recta $3x - 2y + 5 = 0$. ¿Y el punto (1,4)? (Soluc: NO; SÍ)
15. Dada la recta $ax + 5y + 4 = 0$, determinar **a** para que la recta pase por el punto (2,-2) (Soluc: $a = 3$)
16. a) Determinar¹, analíticamente, si los puntos A(3,1), B(5,2) y C(1,0) están alineados.
 b) Ídem para A(1,1), B(3,4) y C(4,6) (Nota: un dibujo puede ser útil)
 c) Hallar k para que los puntos A(1,7), B(-3,4) y C(k,5) estén alineados. (Soluc: SÍ; NO; $k = -5/3$)
17. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-2, 1/3) y tiene igual pendiente que la recta que pasa por P(2,1) y Q(3,4) (Soluc: $y - \frac{1}{3} = 3(x + 2)$)
18. Dada la recta que pasa por A(1,0) y B(3,4) se pide:
 a) Hallar su forma paramétrica, continua, implícita, punto-pendiente y explícita. (Soluc: $2x - y - 2 = 0$)
 b) ¿Cuál es su pendiente? (Soluc: $m = 2$)
 c) ¿El punto (2,2) pertenece a dicha recta? (Soluc: $(2,2) \in r$)

¹ Este es el ejercicio 5 del tema anterior.

19. Ídem para la recta que pasa por A(-2,1) y B(4,5). ¿El punto (1,3) es de dicha recta?
(Soluc: $2x-3y+7=0$; $m=2/3$; Sí)
20. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,1) y forma un ángulo de 120° con la parte positiva del eje x. (Soluc: $y-1=-\sqrt{3}(x-2)$)
21. ¿Qué ángulo forma la recta $x+y+5=0$ con OX^+ ? (Soluc: 135°)
22. Dada la recta $5x-3y+7=0$, hallar la longitud de los segmentos que determina sobre los ejes. Hacer el dibujo. (Soluc: $7/5$ u sobre OX ; $7/3$ u sobre OY)
23. Hallar el área limitada por la recta $5x+y-5=0$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. Hacer el dibujo. (Soluc: $5/2$ u²)
24. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3,1) y forma 45° con el eje OX^+ (Soluc: $y=x-2$)
25. a) ¿Qué ángulo forma la recta $3x-2y+6=0$ con el eje de abscisas? (Soluc: $\cong 56^\circ 18' 36''$)
b) ¿Qué ángulo forma la recta $2x-y+5=0$ con el eje de ordenadas? (Soluc: $\cong 26^\circ 33' 54''$)
c) Calcular n de modo que la recta $3x+ny-2=0$ forme un ángulo de 60° con OX^+ (Soluc: $n=-\sqrt{3}$)
26. Resolver gráficamente –es decir, hallar gráficamente el posible punto de corte de cada pareja de rectas– los siguientes sistemas de ecuaciones:
- a) $\begin{cases} 2x+3y=11 \\ 3x-2y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=11 \\ 6x+9y=33 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=11 \\ 6x+9y=3 \end{cases}$ (Soluc: (1,3); ∞ soluc; $\nexists$ soluc)
27. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de las rectas $2x+3y-4=0$ y $x-y=0$ y por A(2,1) (Soluc: $x-6y+4=0$)
b) Ídem para las rectas $3x+y-11=0$ y $x+2y-7=0$ y el punto A(-1,2) (Soluc: $y=2$)
28. La recta $y+2=m(x+3)$ pasa por el punto de intersección de las rectas $2x+3y+5=0$ y $5x-2y-16=0$. Calcular m (Soluc: $m=-1/5$)

Posición relativa de 2 rectas:

29. Dadas las rectas:
- | | |
|----------------|----------------|
| r: $2x+3y-4=0$ | u: $4x+6y-8=0$ |
| s: $x-2y+1=0$ | v: $2x-4y-6=0$ |
| t: $3x-2y-9=0$ | w: $2x+3y+9=0$ |

¿Cuáles son coincidentes? ¿Cuáles son paralelas? (Soluc: $r=u/w$; $s//v$)

30. Ídem para las rectas
- | | |
|-------------|--------------|
| r: $y=5x-3$ | u: $y=3x-2$ |
| s: $y=-x+2$ | v: $y=2x+13$ |
| t: $y=2x-1$ | w: $y=-x-3$ |

Comprobar el resultado dibujándolas sobre los mismos ejes. (Soluc: $t//v$; $s//w$)

31. Comprobar, por dos métodos, si las siguientes rectas son paralelas, secantes o coincidentes; en este último supuesto, hallar el punto de corte:

a) $\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 3x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$

(Soluc: a) paralelas; b) secantes en (7,-1); c) coincidentes)

32. Determinar **m** y **p** para que las rectas $mx+3y+5=0$ y $2x+6y-p=0$ a) Sean coincidentes. (Sol: $m=1$; $p=-10$)
b) Se corten en (-1,2) (Sol: $m=11$; $p=10$)

33. a) Dadas las rectas $3x-4y+1=0$ calcular **m** para que sean paralelas. ¿Pueden ser coincidentes?
 $mx+8y-14=0$ (Soluc: $m=-6$; NO)

b) Ídem para las rectas $4x-3y+1=0$ (Soluc: $m=-8$; NO)
 $mx+6y+4=0$

34. La recta $3x+ny-7=0$ pasa por el punto A(2,3) y es paralela a la recta $mx+2y=13$. Calcular **m** y **n**
(Soluc: $m=18$; $n=1/3$)

35. Dada la recta **r** determinada por A(2,1) y $\vec{u}=(a,4)$, y la recta **s** determinada por B(-1,4) y $\vec{v}=(5,3)$

a) Hallar **a** para que r y s sean paralelas (Soluc: $a=20/3$)

b) ¿Para qué valores de **a** son secantes? (Soluc: $a \neq 20/3$)

c) ¿Pueden ser coincidentes? (soluc: NO)

Recta // a una dada:

36. a) Calcular la ecuación de la recta paralela a $3x+2y-4=0$ que pasa por el punto A(2,3) (Soluc: $3x+2y-12=0$)

b) Ídem para $y=2x+3$ (Soluc: $y=2x-1$)

37. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (2,3) y es: a) Paralela al eje x (Soluc: $y=3$)

(Hacer un dibujo explicativo previo en los cuatro b) Paralela al eje y (Soluc: $x=2$)

primeros apartados) c) Paralela a la bisectriz del 1º cuadrante.

(Soluc: $y=x+1$)

d) Ídem del 2º cuadrante. (Soluc: $y=-x+5$)

e) Paralela a $5x+2y=0$ (Soluc: $5x+2y-16=0$)

38. Hallar la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta determinada por A(1,1) y B(-3,6)

(Soluc: $y = -\frac{5}{4}x$)

39. Dadas las rectas r: $x-2y+7=0$
s: $2x+y+4=0$

y el punto P(5,1), hallar las ecuaciones de los otros dos lados del paralelogramo formado por r, s y P.

(Soluc: $x-2y-3=0$ y $2x+y-11=0$)

40. **TEORÍA:** Responder, razonadamente, a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cómo son los vectores directores de dos rectas paralelas?

- b) A la hora de hallar la ecuación de una recta, ¿tiene sentido simplificar un punto, por ejemplo $P\left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}\right) \rightarrow P(1, -4)$? ¿Y un vector director, por ejemplo $\vec{u}_r = \left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}\right) \rightarrow \vec{u}_r = (1, -4)$?
- c) Si se sabe que el vector director de una recta es (2,5), ¿podemos conocer su pendiente?
- d) Y si sabemos que la pendiente es 3, ¿podemos obtener un vector director?
- e) ¿Cuántos vectores directores puede tener una recta?
- f) Si una recta tiene por vector director (4,2) y otra tiene el (-2,-1), ¿pueden ser la misma?
- g) Razonar que si una recta tiene la forma $Ax+By+k=0$, entonces cualquier recta $\perp$ a ella sería de la forma $Bx-Ay+k'=0$
- h) ¿Por qué toda recta que pasa por el origen carece de término independiente en su forma general i.e. $Ax+By=0$?
- i) De una recta se sabe que su $\vec{u}_r = (2, -4)$ ¿Cuál es su pendiente? ¿Cómo es la recta?
- j) Supongamos que dos rectas en forma explícita tienen la misma ordenada en el origen y distinta pendiente. ¿Qué posición relativa tienen? ¿Dónde se cortarán siempre? Hacer un dibujo explicativo.

Puntos y rectas notables de un triángulo:

Recta $\perp$ a una dada:

41. En cada apartado, hallar la recta $\perp$ a la dada, por el punto que se indica (hacer un diagrama explicativo):

- | | |
|--|---|
| a) $x-2y+3=0$; $P(3, -1)$ (Soluc: $2x+y-5=0$) | e) $y=2x-5$; $P(-2, 3)$ (Soluc: $x+2y-4=0$) |
| b) $3x+2y+1=0$; $P(1, -1)$ (Soluc: $2x-3y-5=0$) | f) $y-3=2(x+1)$; $O(0, 0)$ (Soluc: $x+2y=0$) |
| c) $\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{array} \right\}$; $P(1, 3)$ (Soluc: $x-3y+8=0$) | g) $x+2y-17=0$; $P(3, 7)$ (Soluc: $2x-y+1=0$) |
| d) $y-4=2(x-1)$; $P(1, 1)$ (Soluc: $x+2y-3=0$) | h) $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{7}$; $P(-4, -5)$ (Soluc: $3x+7y+47=0$) |

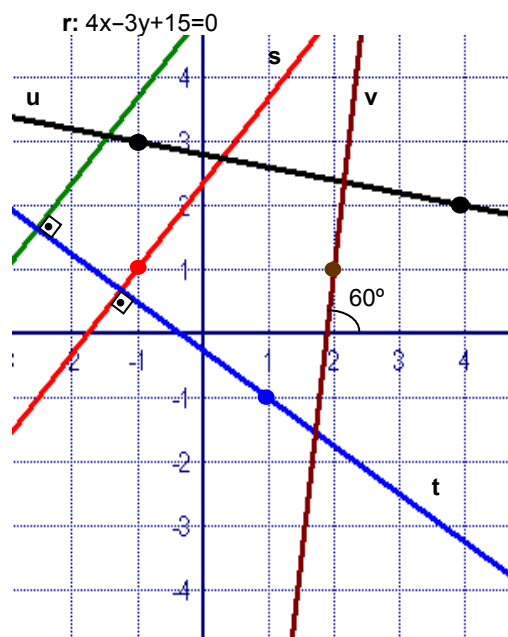
42. En la figura, $s \parallel r$ y $t \perp r$. Hallar:

- a) La ecuación general de las rectas s, t y u
(Soluc: $s: 4x-3y+7=0$; $t: 3x+4y+1=0$; $u: x+5y-14=0$)
- b) La ecuación punto-pendiente de v (Soluc: $y-1=\sqrt{3}(x-2)$)

43. a) Dada $r: y-1=\frac{1}{2}(x+2)$, hallar la ecuación general de la recta $\perp$ que pasa por el origen. (Soluc: $2x+y=0$)

- b) Dibujar ambas rectas y comprobar que, efectivamente, son $\perp$.

44. Hallar el pie de la perpendicular trazada desde $P(1, -2)$ a la recta $r: x-2y+4=0$ (Soluc: $(-4/5, 8/5)$)



Mediatriz:

45. a) Hallar las coordenadas del punto medio del segmento determinado por $A(-2, 1)$ y $B(6, 5)$. Dibujar la situación. (Sol: $M(2, 3)$)

- b) El punto $M(5, -2)$ es el punto medio del segmento AB , y conocemos $A(2, 3)$. Hacer un dibujo explicativo y hallar B . (Sol: $B(8, -7)$)
- c) Hallar el punto simétrico de $P(1, -2)$ respecto del punto $Q(3, 0)$. Hacer un dibujo explicativo. (Sol: $P'(5, 2)$)
46. Hallar la ecuación de la recta $\perp$ al segmento de extremos $A(5, 6)$ y $B(1, 8)$ en su punto medio. ¿Cómo se llama dicha recta? Hacer un dibujo explicativo. (Soluc: $2x - y + 1 = 0$; mediatriz)
47. La recta $3x - 2y - 6 = 0$ corta a los ejes en dos puntos A y B . Calcularlos y hallar la mediatriz de $\overline{AB}$.
(Soluc: $4x + 6y + 5 = 0$)
48. Dada la recta $x + 2y + 1 = 0$ hallar el punto simétrico de $P(2, -3)$ respecto a dicha recta. [Soluc: $P'(16/5, -3/5)$]
- ↑
- * 49. Sabiendo que la recta $2x - y + 1 = 0$ es mediatriz de $\overline{AB}$ y $A(2, -3)$, calcular B . ¿Cómo podríamos comprobar que el resultado es correcto? [Soluc: $B(-22/5, 1/5)$]

Bisectriz:

50. Dado el triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(5, -3)$ y $C(7, 13)$, hallar razonadamente, mediante cálculo vectorial, la ecuación de la bisectriz correspondiente al vértice A . (Ayuda: Dado un punto genérico $X(x, y) \in$ bisectriz, plantear que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AX}$) (Soluc: $x - 8y + 6 = 0$)

NOTA: Cuando se aborde más adelante el cálculo de la distancia punto-recta, se verá otro método mucho mejor para hallar la bisectriz (vid. ejercicio 98).

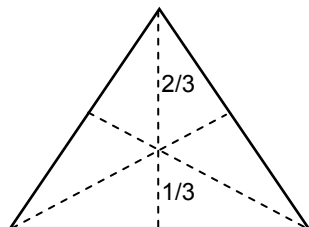
Mediana, altura, etc:

51. Dado el triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ y $C(3, 7)$ se pide:
- Mediante la fórmula correspondiente, hallar las coordenadas del baricentro o centro de gravedad (Por curiosidad, se recomienda obtener la ecuación de dos medianas cualesquiera y comprobar que se cortan en dicho punto)
 - Ecuaciones de dos alturas cualesquiera, y coordenadas del ortocentro.
 - Ecuaciones de dos mediatrices cualesquiera, y coordenadas del circuncentro.
 - Calcular la ecuación de la recta de Euler.
 - Comprobar que el ortocentro dista el doble del centro de gravedad que el circuncentro.
- (Soluc: a) $AB: x = 3$; $BC: 4x - 3y - 1 = 0$; $G(3, 11/3)$ b) $AB: 2x + y - 13 = 0$; $BC: x - 2y + 1 = 0$; $AC: x + 3y - 14 = 0$; $O(5, 3)$
c) $AB: 2x + y - 8 = 0$; $BC: x - 2y + 6 = 0$; $AC: x + 3y - 14 = 0$; $C(2, 4)$ d) $x + 3y - 14 = 0$)
52. Dibujar en unos ejes cartesianos el triángulo de vértices $A(2, 0)$, $B(0, 1)$ y $C(-3, -2)$, y hallar:
- La ecuación de la mediana correspondiente al lado AC . (Soluc: $4x - y + 1 = 0$)
 - La ecuación de la altura correspondiente al lado AC . (Soluc: $5x + 2y - 2 = 0$)
 - La ecuación de las mediatrices correspondientes a AB y AC . (Soluc: $4x - 2y - 3 = 0$; $10x + 4y + 9 = 0$)
 - ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las anteriores? Obtenerlo (Sol: Circuncentro $(-1/6, -11/6)$)
53. Dibujar el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(0, 2)$ y $C(1, -2)$, y hallar:
- La ecuación de la mediana correspondiente al lado AC (Soluc: $5x + 4y - 8 = 0$)
 - Las ecuaciones de las alturas correspondientes a los lados AC y BC (Sol: $2x + 3y - 6 = 0$; $x - 4y + 1 = 0$)
 - ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las alturas? Obtenerlo. (Soluc: Ortocentro $(21/11, 8/11)$)
 - La ecuación de la mediatriz correspondiente al lado AC (Soluc: $4x + 6y - 5 = 0$)

- * 54. Los puntos $B(-1,3)$ y $C(3,-3)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles ABC . El punto A está en la recta $x+2y-15=0$. Calcular A

55. Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices $A(1,6)$, $B(-5,8)$ y $C(-3,-4)$

(Soluc: $4x-5y+26=0$; $7x+4y+3=0$; $11x-y+29=0$)



56. Demostrar que en un triángulo equilátero el baricentro está situado a una distancia de la base que es siempre $1/3$ de la altura (ver figura).

57. Los vértices de un triángulo son $A(7,5)$, $B(-8,3)$ y $C(4,-5)$

a) Hallar las medianas AB y AC y el baricentro.

b) Ídem para alturas y ortocentro.

c) Ídem para mediatrices y circuncentro.

- d) Trazar sobre papel milimetrado las tres medianas, alturas y mediatrices, y las circunferencias circunscrita e inscrita, y comprobar que el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados (Utilizar escala $1u = 1cm$).

Ángulo de dos rectas:

58. Calcular el ángulo que forman los siguientes pares de rectas, utilizando la fórmula más conveniente en cada caso:

a) $2x-3y+4=0$ $5x-2y-3=0$ (Soluc: $\cong 34^\circ 31'$)

b) $2x+3y-5=0$ $x-y+7=0$ (Soluc: $\cong 78^\circ 41'$)

c) $x-2y+4=0$ $3x-y-1=0$ (Soluc: 45°)

d) $y=2x-3$ $y=-2x+1$ (Soluc: $\cong 53^\circ 8'$)

e) $y=3x-5$ $y=3x+2$ (Soluc: 0°)

f) $-x+2y+1=0$ $3x+y+5=0$ (Soluc: $\cong 81^\circ 52'$)

g) $y+2 = \frac{4}{3}(x-1)$ $y-3 = \frac{5}{12}x$ (Soluc: $\cong 30^\circ 31'$)

h) $-x+2y+5=0$ $2x-3y+4=0$ (Soluc: $\cong 7^\circ 8'$)

i) $3x-4y+2=0$ $3x-4y+7=0$ (Soluc: 0°)

j) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$ $-2x+3y-5=0$ (Soluc: $\cong 22^\circ 37'$)

k) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4}$ $3x+4y=0$ (Soluc: 90°)

l) $y = -\frac{3}{4}x + 3$ $y = \frac{5}{12}x + \frac{2}{3}$ (Soluc: $\cong 59^\circ 29'$)

m) $\left. \begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = 5 - 2t \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = -3 + 4\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{array} \right\}$ (Soluc: $\cong 79^\circ 42'$)

n) $y=7x+54$ $3x-4y+128=0$ (Soluc: 45°)

59. Razonar, sin cálculo previo, cuáles de los siguientes pares de rectas son perpendiculares:

a) $2x+3y-4=0$ $4x+6y-8=0$

b) $2x+3y-4=0$ $6x-4y+5=0$

c) $y=2x-4$ $y=-x/2+5$

d) $3x-2y+7=0$ $4x+6y-3=0$

e) $y=6x$ $y=x/6-8$

f) $x+y-8=0$ $2x+3y+6=0$

g) $y=x+1$ $y=-x$

(Soluc: NO; SÍ; SÍ; SÍ; NO; NO; SÍ)

60. ¿Es perpendicular la recta $2x+3y+4=0$ con otra que tenga de pendiente $3/2$? (Soluc: SÍ)

61. Determinar el parámetro m con la condición de que las rectas $2x-4y+12=0$ sean perpendiculares.
(Soluc: $m=16$) $mx+8y-15=0$

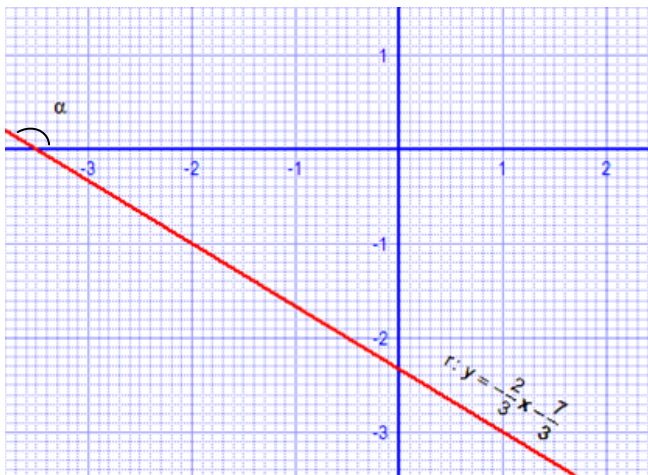
62. Dadas las rectas $r: x+2y-3=0$ se pide: **a)** Hallar k para que sean $//$ (Soluc: $k=-2$)
 $s: x-ky+4=0$ **b)** Hallar k para que sean $\perp$ (Soluc: $k=1/2$)
c) Hallar la ecuación general de la recta $\perp$ a r que pasa por el origen. (Soluc: $2x-y=0$)

63. Determinar el valor de a para que las rectas $ax+(a-1)y-2(a+2)=0$ sean: **a)** Paralelas.
 (Soluc: $a=0$ o $a=1/3$; $a=-1/2$) $3ax-(3a+1)y-(5a+4)=0$ **b)** Perpendiculares.

64. Calcular los coeficientes m y n de las rectas $mx-2y+5=0$
 $nx+6y-8=0$
 sabiendo que son perpendiculares y que la primera pasa por el punto $(1,4)$ (Soluc: $m=3$; $n=4$)

65. Dada la recta de ecuación $ax+by=1$, determinar a y b sabiendo que la recta dada es perpendicular a la recta $2x+4y=11$ y que pasa por el punto $(1,3/2)$ (Soluc: $a=4$; $b=-2$)

66. **a)** Hallar m para que la recta r de la figura sea $//$ a $r': -4x+my+6=0$ (Soluc: $m=-6$)
b) Deducir α (redondeado a los minutos) a partir de la ecuación de r . (Soluc: $\cong 146^\circ 19'$)
c) Hallar el ángulo (redondeado a los minutos) que forma r con la bisectriz del primer cuadrante. (Soluc: $\cong 78^\circ 41'$)



67. Hallar el valor de a para que las rectas
 $\left. \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + a\lambda \end{array} \right\} \quad \text{formen } 45^\circ$
 (Aviso: puede haber dos soluciones) (Soluc: $a_1=6$, $a_2=-2/3$)

68. Sean las rectas $r: 3x+my+12=0$
 $s: 2x+y+n=0$
 Determinar m y n sabiendo que forman un ángulo de 60° y que la recta s pasa por el punto $(3,-5)$
 (Advertencia: puede haber dos soluciones) (Sol: $m_1=24+15\sqrt{3}$ y $n_1=-1$; $m_2=24-15\sqrt{3}$ y $n_2=-1$)

69. **a)** Determinar la ecuación de la recta que pasando por $A(5,-2)$ forme 45° con la que tiene por ecuación $3x+7y-12=0$ (Advertencia: puede haber dos soluciones) (Soluc: $y+2 = \frac{2}{5}(x-5)$; $y+2 = -\frac{5}{2}(x-5)$)
b) ¿Cómo son las pendientes de las dos soluciones? ¿Por qué?

70. Hallar la ecuación de la recta que, pasando por $P(2,-3)$, forma un ángulo de 45° con la recta $3x-4y+7=0$
 (Advertencia: puede haber dos soluciones) (Soluc: $y+3 = -\frac{1}{7}(x-2)$; $y+3 = 7(x-2)$)

- * 71. Hallar las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $(-3,0)$ y forman con la recta de ecuación $3x-5y+9=0$ un ángulo cuya tangente vale $1/3$ (Soluc: $y = \frac{2}{9}(x+3)$; $y = \frac{7}{6}(x+3)$)

72. Estudiar la posición relativa de $r: y = x-2$ y $s: \left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \end{array} \right\}$. En caso de ser secantes, hallar el ángulo que forman. (Soluc: 90°)

73. Dadas las rectas $r: 2x+y-4=0$ hallar a para que: a) Sean // (Soluc: $a=-4$)
 $s: ax-2y+5=0$ b) Sean $\perp$ (Soluc: $a=1$)
 c) Formen 60° (Soluc: $a = \frac{16 \pm 10\sqrt{3}}{11}$)

d(P,r):

74. a) Calcular la distancia del punto $P(1,2)$ a la recta $3x-4y+1=0$ (Soluc: $4/5$)
 b) "" "" "" $P(2,-1)$ a la recta $3x+4y=0$ (Soluc: $2/5$)
 c) "" "" del origen a la recta $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda \end{cases}$ (Soluc: $3/\sqrt{5}$)
 d) "" "" del origen a la recta $y=4$ (Soluc: 4)
 e) "" "" del punto $P(-1,7)$ a la recta $y-3=2(x+3)$ (Soluc: 0)
 f) "" "" "" $P(1,-3)$ a la recta $\frac{x-1}{2} = y+5$ (Soluc: $4/\sqrt{5}$)
 g) "" "" "" $P(2,4)$ a la recta $y=-2x+3$ (Soluc: $\sqrt{5}$)
 h) "" "" "" "" "" "" "" $x=-2$ (Soluc: 4)
75. Hallar la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por los puntos $A(-2,1)$ y $B(3,-2)$
 (Soluc: $1/\sqrt{34}$)
76. Hallar la distancia del punto $(-1,1)$ a la recta que corta a los ejes OX^+ y OY^+ a las distancias 3 y 4 del origen. (Soluc: $13/5$)
77. Hallar la longitud del segmento que determina la recta $x-2y+5=0$ al cortar a los ejes de coordenadas.
 (Soluc: $5\sqrt{5}/2$)
78. Hallar la distancia del punto $P(-1,2)$ al punto de corte de las rectas $x=2$ y $2x+y-2=0$ (Soluc: 5)
79. Hallar la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasando por el punto $A(0,2)$ tiene de pendiente -1 (Soluc: $\sqrt{2}$)
80. Determinar c para que la distancia de la recta $x-3y+c=0$ al punto $(6,2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades. (Aviso: puede haber dos soluciones). Hacer un dibujo explicativo de la situación. (Soluc: $c=\pm 10$)
81. Calcular el valor de a para que la distancia del punto $P(1,2)$ a la recta $ax+2y-2=0$ sea igual a $\sqrt{2}$ (Aviso: puede haber dos soluciones). Hacer un dibujo explicativo. (Soluc: $a=2$)
82. Calcular las ecuaciones de las dos rectas que pasando por el punto $A(1,-2)$ disten 2 unidades del punto $B(3,1)$. Se recomienda hacer un dibujo previo. (Soluc: $y+2 = \frac{5}{12}(x-1)$; $x=1$)
83. Hallar la ecuación de las dos rectas paralelas de pendiente $3/4$ que distan 2 unidades del punto $(2,3)$. (Ayuda: se recomienda hacerlo en forma explícita). Hacer un dibujo de la situación.
 (Sol: $y = \frac{3}{4}x + 4$; $y = \frac{3}{4}x - 1$)
84. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $Q(-2,2)$ y dista 3 unidades de $P(4,-1)$. Se recomienda hacer un dibujo previo. (Aviso: puede haber dos soluciones).

d(r,s):

85. a) Hallar la distancia entre las rectas $2x+3y-6=0$ y $2x+3y+7=0$ (Soluc: $\sqrt{13}$)
- b) Hallar la distancia entre las rectas $x = 2 - 3\lambda$ y $y = 1 + \lambda$ y $\frac{x+3}{-3} = y + 5$ (Soluc: $23/\sqrt{10}$)
- c) Hallar la distancia entre las rectas $3x-4y+16=0$ y $2x-5y+2=0$ (Soluc: 0)
- d) Hallar la distancia entre las rectas $3x-4y+16=0$ y $y = \frac{3}{4}x - 1$ (Soluc: 4)

86. Dada la recta $3x-4y+19=0$, se pide:

- a) Hallar la ecuación de la recta paralela a la anterior que pasa por $P(5,6)$, en todas las formas conocidas. (Soluc: $3x-4y+9=0$)
- b) Hallar la distancia entre las dos rectas anteriores. (Soluc: 2 u)
- c) Hallar el ángulo que dichas rectas forman con la recta $7x-y+3=0$ (Soluc: 45°)

87. a) Hallar, en todas las formas conocidas, la ecuación de la recta s que tiene la misma pendiente que r : $y=3x-1$ y pasa por $P(-1,2)$ (Soluc: $3x-y+5=0$)

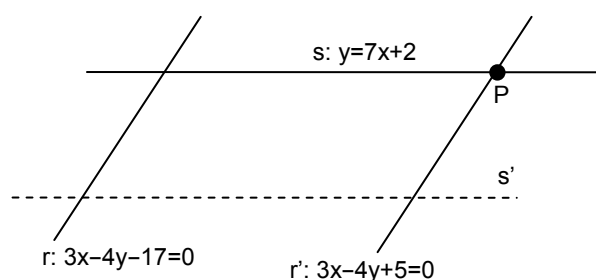
- b) Hallar la distancia entre las dos rectas r y s anteriores. (Soluc: $3\sqrt{10}/5$ u)
- c) Hallar el ángulo que forma r con la recta t : $x-2y+4=0$ (Soluc: 45°)

88. Dados los siguientes pares de rectas, hallar m para que sean paralelas y calcular su distancia:

- a) $3x-4y+1=0$ y $mx+8y-14=0$ (Soluc: $m=-6$; $d=6/5$)
- b) $mx+y=12$ y $4x-3y=m+1$ (Soluc: $m=-4/3$; $d=107/15$)
- c) $4x-3y+1=0$ y $mx+6y+4=0$ (Soluc: $m=-8$; $d=3/5$)

89. Calcular c para que la distancia entre las rectas $4x+3y-6=0$ y $4x+3y+c=0$ sea igual a 3 (Sol: $c_1=9$, $c_2=-21$)

90. Dadas las rectas de la figura adjunta (el dibujo es aproximado), se pide:

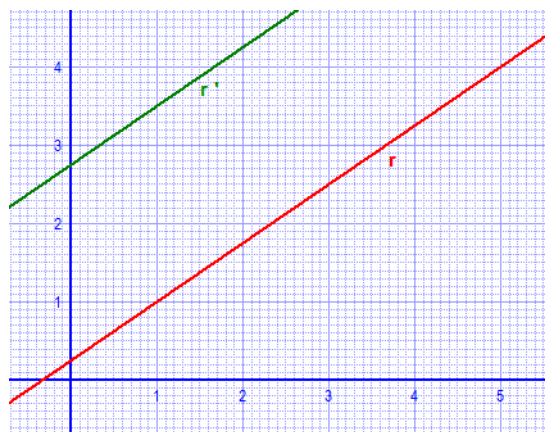


- a) Razonar que r y s son secantes, y $r \parallel r'$
- b) Hallar $P = r' \cap s$ (Soluc: $P(-3/25, 29/25)$)
- c) Hallar la ecuación general de s' , sabiendo que dista 5 unidades de s . (Soluc: $y=7x+2 \pm 25\sqrt{2}$)
- d) Hallar el ángulo entre r y s (Soluc: 45°)
- e) Hallar $d(r, r')$ (Soluc: $22/5$)

91. a) Hallar la ecuación de la recta r de la figura en todas las formas conocidas. (Soluc: $3x-4y+1=0$)

- b) Hallar la ecuación general o implícita de la recta r' sabiendo que dista 2 unidades de r (¡No vale intentando obtener puntos de r' a partir de la gráfica!). (Soluc: $3x-4y+11=0$)

- c) Hallar la ecuación de la recta $\perp$ a r que pasa por el origen, en forma explícita. (Soluc: $y = -\frac{4}{3}x$)



92. Dada la recta $r: x+y-3=0$ y el punto $P(-1,2)$, se pide:

- Hallar, en todas las formas conocidas, la ecuación de la recta $\perp$ a r que pasa por P (Soluc: $x-y+3=0$)
- Hallar el punto M de corte de la recta anterior y r (Soluc: $(0,3)$)
- Hallar el punto simétrico de P respecto de r . Hacer un dibujo aproximado explicativo. (Soluc: $(1,4)$)
- Hallar la ecuación general de la recta $\parallel$ a r que pasa por P (Soluc: $x+y-1=0$)
- Hallar la distancia entre la recta anterior y r . Hacer un dibujo aproximado explicativo. (Soluc: $\sqrt{2} u$)
- Hallar la posición relativa de r y la recta $s: 2x-y+5=0$ (Soluc: Secantes)
- Hallar el ángulo entre r y s (Soluc: $71^\circ 33' 54''$)

93. Estudiar la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-5}$ y $s: 5x+2y+5=0$, y hallar su distancia. Dibujarlas. (Soluc: $4/\sqrt{29}$)

94. Hallar k para que las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-5}$ y $s: 5x+2y+k=0$ sean: a) Coincidentes. (Sol: 1)
b) Disten 2 unidades (Sol: $1 \pm 2\sqrt{29}$)

95. a) Hallar la ecuación de la recta s paralela a la recta r de la figura y que pasa por el punto $P(1,-3)$, en todas las formas conocidas. (Soluc: $x+y+2=0$)

b) Estudiar la posición relativa de la recta s anterior y la recta $t: 3x-4y-1=0$

c) Dibujar t (en la cuadrícula adjunta).

d) Hallar el ángulo $\hat{st}$ (aproximando a los minutos). (Soluc: $\cong 81^\circ 52'$)

e) Hallar la distancia de s a la bisectriz del 2º cuadrante. (Sol: $\sqrt{2}$)

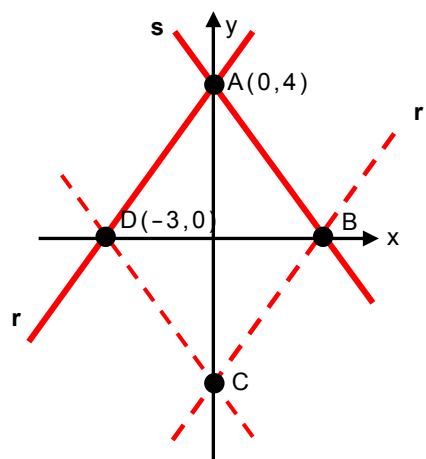


96. Dada $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -6 + \lambda \end{cases}$, se pide:

- Ecuación **explícita** de la recta s paralela a r que pasa por el origen. (Soluc: $y=x$)
- Dibujar ambas rectas.
- Posición relativa de r y $t: 3x-4y+1=0$. (Soluc: secantes)
- Ángulo (en grados, min y s) entre r y t . (Soluc: $\cong 8^\circ 7' 48''$)
- Distancia entre r y s (resultado racionalizado). (Sol: $3\sqrt{2} u$)

97. Considerar el rombo ABCD de la figura. Se pide:

- Hallar la ecuación general de r y de s (razonar cómo se obtiene el $\vec{u}_r$) (Soluc: $4x-3y+12=0$; $4x+3y-12=0$)
- Hallar $\hat{rs}$ (en $^\circ ' ''$; obligatorio por vectores, no por Trigonometría). (Soluc: $\cong 73^\circ 44' 23''$)
- Hallar **razonadamente** $d(r, r')$. (Sol: $24/5 u$)



Bisectriz:

- * 98. a) Hallar las dos bisectrices del ángulo formado por $r: 4x+3y-5=0$ y $s: 3x+4y-2=0$. Comprobar que se trata de dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que r y s .
(Soluc: $x-y-3=0$; $x+y-1=0$)

b) Ídem con $r: 4x-3y+8=0$ y $s: 12x+5y-7=0$ (Soluc: $8x+64y-139=0$; $112x-14y+69=0$)

99. Volver a hacer el ejercicio 50, pero aplicando la fórmula de la distancia punto-recta.

Área del triángulo:

100. a) Calcular el área del triángulo de vértices $A(1,2)$, $B(-1,4)$ y $C(2,0)$ (Sol: $1 u^2$)
b) " " " " " " $A(2,-1)$, $B(-5,1)$ y $C(0,3)$ (Sol: $12 u^2$)
c) " " " " " " $A(-3, -2)$, $B(9,7)$ y $C(2,8)$ (Sol: $37,5 u^2$)
101. a) Hallar el área del triángulo definido por las rectas $r: x=3$, $s: 2x+3y-6=0$, $t: x-y-7=0$ (Sol: $24/5 u^2$)
b) Hallar el área del triángulo definido por las rectas $r: y=5$, $s: 2x-y-3=0$, $t: x+y-3=0$ (Sol: $12 u^2$)
102. Hallar el área del cuadrilátero de vértices $A(-4,3)$, $B(0,5)$, $C(4,-2)$ y $D(-3,-2)$ (Soluc: $71/2 u^2$)
103. Determinar el área del paralelogramo OABC y las ecuaciones de los lados AB y BC sabiendo que OA es la recta de ecuación $x-2y=0$, OC tiene de ecuación $3x+y=0$ y las coordenadas de B son $(3,5)$
(Soluc: AB: $3x+y-14=0$; BC: $x-2y+7=0$; $98/5 u^2$)

Cuestiones teórico-prácticas varias:

104. TEORÍA: a) Si la distancia entre dos rectas es cero, ¿podemos afirmar que son secantes?
b) Sean $r(A, \vec{u})$ y $s(B, \vec{u})$ dos rectas paralelas (por tener el mismo vector director). ¿Es cierto que $d(r,s)=d(A,B)$?
c) ¿Cómo son las pendientes de dos rectas perpendiculares? ¿Y si las rectas son paralelas?
d) A simple vista, sin necesidad de transformarlas, ¿podemos concluir que

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad y \quad s: y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

no son la misma recta? Razonar la respuesta.

105. TEORÍA: Estudiar si los siguientes pares de rectas son la misma recta:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases} & \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 + 7\lambda \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \end{cases} \end{array}$$

(Soluc: Sí, NO, NO)

106. TEORÍA: Demostrar que cualquier mediana siempre separa dos triángulos de igual superficie.

107. Hallar las ecuaciones de las dos trisectrices del 1º cuadrante, en forma explícita.

Ejercicio 13

Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de 45° .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 45^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow 7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 14 + 2x = \sqrt{100(1 + x^2)} \rightarrow \frac{14 + 2x}{10} = \sqrt{1 + x^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{7 + x}{5} = \sqrt{1 + x^2} \rightarrow \frac{49 + x^2 + 14x}{25} = 1 + x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \rightarrow 24x^2 - 14x - 24 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 12x^2 - 7x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases}$$

Ejercicio 14

La pendiente de r es $3/5$. Halla:

a) Las coordenadas de un vector paralelo a la recta r .

b) La pendiente de una recta perpendicular a la recta r .

c) Las coordenadas de un vector perpendicular a la recta r .

$$a) m_r = \frac{3}{5} \rightarrow \vec{v} = (5, 3) \text{ es paralelo a } r.$$

$$b) -\frac{1}{m} = m_r \rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

$$c) m = -\frac{5}{3} \rightarrow \vec{w} = (-3, 5) \text{ es perpendicular a } r.$$

Ejercicio 15

$$s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}. \text{ Halla:}$$

a) Ecuación continua de una recta, r_1 , perpendicular a s que pase por $P_1(5, -3)$.

b) Ecuación implícita de r_2 paralela a s que pase por $P_2(0, 4)$.

c) Ecuación explícita de r_3 perpendicular a s que pase por $P_3(-3, 0)$.

$$s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases} \rightarrow P(5, 0) \in s; \vec{v}_s = (-1, 3)$$

a) El vector dirección de r_1 es $\vec{v}_{r_1} = (3, 1)$. $P_1(5, -3) \in r_1$.

$$r_1: \frac{x-5}{3} = \frac{y+3}{1}$$

b) El vector dirección de r_2 es el mismo que el de s : $\vec{v}_{r_2} = (-1, 3)$.

$$P_2(0, 4) \in r_2.$$

$$r_2: \frac{x-0}{-1} = \frac{y-4}{3} \rightarrow 3x = -y + 4 \rightarrow 3x + y - 4 = 0$$

Ejercicio 16

Averigua la posición relativa de estos pares de rectas:

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0$

b) $r: 2x + y - 6 = 0$

$s: 6x + 10y + 4 = 0$

$s: x - y = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}, s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

d) $r: 3x - 5y = 0, s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (3, 5)$

$s: 6x + 10y + 4 = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (6, 10)$

$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-8}{4} \rightarrow$ Las dos rectas son paralelas.

Ejercicio 17

Hallar la posición relativa de las rectas r y s :

b) $r: 2x + y - 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (2, 1)$

$s: x - y = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (1, -1)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \rightarrow$ Las dos rectas se cortan.

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (5, -3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (1, -2)$

$\frac{5}{1} \neq \frac{-3}{-2} \rightarrow$ Las dos rectas se cortan.

d) $r: 3x - 5y = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (3, -5) \rightarrow \vec{v}_r = (5, 3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (5, 3), P_s = (2, 1)$

Como $\vec{v}_r = \vec{v}_s$ y $P_s \notin r$, las rectas son paralelas.

Ejercicio 18

Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}, r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

b) $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}, r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

c) $r_1: y = 5x - 1, r_2: y = 4x + 3$

a) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1); \vec{v}_{r_2} = (-4, 3)$

$\cos \alpha = \frac{|(-2, 1) \cdot (-4, 3)|}{|(-2, 1)| |(-4, 3)|} = \frac{11}{(\sqrt{5}) \cdot (5)} \approx 0,9838699101 \rightarrow \alpha = 10^\circ 18' 17,45''$

b) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1); \vec{v}_{r_2} = (5, 3)$

$\cos \alpha = \frac{|(-2, 1) \cdot (5, 3)|}{|(-2, 1)| |(5, 3)|} = \frac{7}{(\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{34})} \approx 0,5368754922 \rightarrow \alpha = 57^\circ 31' 43,71''$

c) $m_{r_1} = 5; m_{r_2} = 4$

$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{4 - 5}{1 + 5 \cdot 4} \right| = \frac{1}{21} \approx 0,0476190 \rightarrow \alpha = 2^\circ 43' 34,72''$

Ejercicio 19

$$P(-6, -3), Q(9, 5)$$

$$r: 3x - 4y + 9 = 0, \quad s: 5x + 15 = 0$$

Halla la distancia entre los dos puntos. Halla también las distancias de cada uno de los puntos a cada recta.

$$P(-6, -3), Q(9, 5)$$

$$r: 3x - 4y + 9 = 0$$

$$s: 5x + 15 = 0$$

$$\text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(15, 8)| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|3 \cdot (-6) - 4(-3) + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{dist}(P, s) = \frac{|5(-6) + 15|}{\sqrt{5^2 + 0^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{dist}(Q, r) = \frac{|3 \cdot 9 - 4 \cdot 5 + 9|}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\text{dist}(Q, s) = \frac{|5 \cdot 9 + 15|}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

Ejercicio 20

Halla las ecuaciones paramétricas de cada una de las siguientes rectas:

a) $2x - y = 0$

b) $x - 7 = 0$

c) $3y - 6 = 0$

d) $y = -\frac{1}{3}x$

e) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2}$

f) $\frac{1+x}{2} = 1-y$

a) Si $x = t \rightarrow 2t - y = 0 \rightarrow y = 2t \rightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 7 \\ y = t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = t \\ y = 6/3 = 2 \end{cases}$

d) $y = -\frac{1}{3}x$

Obtenemos un punto y un vector de esta ecuación, $P(0, 0)$, $\vec{v}(-3, 1)$, y a partir de ellos, las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases}$$

e) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2}$

Obtenemos un punto, P , y un vector dirección, $\vec{v}$: $P(1, -1)$; $\vec{v}(3, 2)$.

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

f) $\frac{1+x}{2} = 1-y \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1}$

Obtenemos un punto, P , y un vector dirección, $\vec{v}$: $P(-1, 1)$; $\vec{v}(2, -1)$.

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA (EJERCICIOS REPASO)

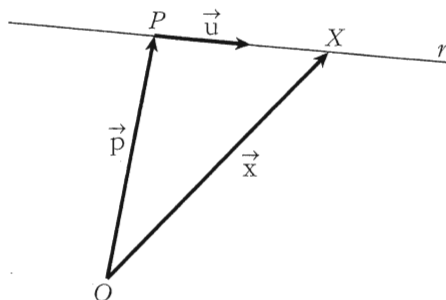
4.1. ECUACIONES DE LA RECTA

■ **Vectorial:** La ecuación que da el vector de posición de cada punto, X , de la recta, r , que pasa por el punto $P = (x_0, y_0)$ y tiene como vector director $\vec{u}$, es:

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u}$$

■ **Paramétricas:** El resultado de poner en coordenadas los vectores de la ecuación anterior:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(u_1, u_2) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases}$$



■ **Continua:** Si se despeja el parámetro λ , queda: $\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$, $u_1 \neq 0$ y $u_2 \neq 0$

Si se dan dos puntos de la recta, queda: $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$

■ **Punto-pendiente:**

- Se llama **pendiente** de una recta a la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de abscisas, medido siempre en sentido contrario al de las agujas de un reloj. La pendiente de una recta se suele denotar con la letra $m = \operatorname{tg} \alpha$.
- Al ángulo α se le llama **inclinación** de la recta.
- Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es el vector director de la recta, que forma un ángulo α con el semieje positivo de abscisas, su pendiente es: $m = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{u_2}{u_1}$
- Si se conocen dos puntos de la recta, la pendiente es: $m = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
- Si se conoce un punto, $P = (x_0, y_0)$, y un vector director, $\vec{u} = (u_1, u_2)$, despejando de la ecuación continua se obtiene: $(y - y_0) = \frac{u_2}{u_1} (x - x_0) \Rightarrow (y - y_0) = m (x - x_0)$

■ **Explícita de la recta:** Despejando y en la ecuación forma punto-pendiente de la recta:

$$(y - y_0) = m (x - x_0) \Rightarrow y = mx - mx_0 + y_0 \Rightarrow y = mx + n$$

El número n es la **ordenada en el origen** de la recta.

■ **General:** Despejando de la ecuación continua, se obtiene:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} \Rightarrow u_2 (x - x_0) = u_1 (y - y_0) \Rightarrow u_2 x - u_1 y - u_2 x_0 + u_1 y_0 = 0$$

Queda: $Ax + By + C = 0$, donde $(A, B) = (u_2 - u_1)$ es un vector normal a la recta.

EJEMPLOS

1. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto $P = (3, -2)$ y es paralela al vector $\vec{u} = (2, -5)$. Encuentra tres puntos en la misma y averigua si los puntos $(-1, 8)$ y $(4, 7)$ pertenecen a ella.

Resolución

- Sustituyendo valores en las ecuaciones, obtenemos:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 5\lambda \end{cases}$$

- Para encontrar tres puntos de la recta, se dan valores arbitrarios a λ :
Si $\lambda = 0$ se obtiene el punto $(3, -2)$
Si $\lambda = 1$ se obtiene el punto $(5, -7)$
Si $\lambda = -1$ se obtiene el punto $(1, 3)$
- Si los puntos $(-1, 8)$ y $(4, 7)$ pertenecen a la recta, debe existir un valor de λ que verifique ambas ecuaciones paramétricas.
 - En el punto $(-1, 8)$:
 $-1 = 3 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = -2$
 $8 = -2 - 5\lambda \Rightarrow \lambda = -2$
Como se obtiene el mismo valor de λ en ambas ecuaciones, el punto $(-1, 8)$ pertenece a la recta.
 - En el punto $(4, 7)$:
 $4 = 3 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$
 $7 = -2 - 5\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{5}$
Como no se obtiene el mismo valor de λ en ambas ecuaciones, el punto $(4, 7)$ no pertenece a la recta.

2. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P = (-1, 2)$ y $Q = (3, -1)$.

Resolución

El vector director es: $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = [3 - (-1), -1 - 2] = (4, -3)$

La recta pedida es la que pasa por el punto $P = (-1, 2)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (4, -3)$:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}$$

3. Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P = (1, 2)$ y tiene la dirección del vector $\overrightarrow{MN}$ siendo $M = (0, 1)$ y $N = (-3, 2)$.

Resolución

- Las coordenadas del vector $\overrightarrow{MN}$ son: $\overrightarrow{MN} = (-3 - 0, 2 - 1) = (-3, 1)$

- La ecuación continua de la recta es: $\frac{x - 1}{-3} = \frac{y - 2}{1}$

4. Halla la ecuación continua de la recta que pasa por $P = (-3, 1)$ y cuyo vector director es $\vec{u} = (0, 3)$.

Resolución

No es correcto el uso de la ecuación continua, pues una de las coordenadas de $\vec{u}$ es nula; en este caso es mejor usar la paramétrica o la explícita:

$$x + 3 = 0$$

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -1)$ y tiene una inclinación de 45° .

Resolución

Como la pendiente es la tangente de la inclinación con respecto al eje de abscisas:

$$m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

La ecuación en forma punto-pendiente es:

$$y - (-1) = 1(x - 3)$$

Operando queda:

$$x - y - 4 = 0$$

6. Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $2x - 3y + 5 = 0$.

Resolución

Despejando, para obtener la ecuación en forma explícita:

$$2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

Identificando valores:

- La pendiente es $m = \frac{2}{3}$.
- La ordenada en el origen es $n = \frac{5}{3}$.

7. Halla las ecuaciones paramétricas, continua, punto-pendiente, explícita y general de la recta que contiene al punto $P = (3, -2)$ y es paralela al vector $\vec{u} = (1, -3)$. Calcula su pendiente y su ordenada en el origen.

Resolución

- Paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - 3\lambda \end{cases}$$

- Continua:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-3}$$

- Punto-pendiente:

$$y + 2 = -3(x - 3)$$

- Ecuación general:

$$3x + y - 7 = 0$$

- Ecuación explícita:

$$y = -3x + 7$$

- La pendiente de la recta es $m = -3$.
- La ordenada en el origen es $n = 7$.

8. Halla las restantes ecuaciones de una recta cuya ecuación explícita es $y = 3x - 2$.

Resolución

- La ecuación explícita nos da $m = 3$ y el punto $(0, -2)$. La ecuación punto-pendiente es:

$$y + 2 = 3(x - 0)$$

- La ecuación continua se obtiene dividiendo entre 3 ambos miembros:

$$\frac{x}{1} = \frac{y + 2}{3}$$

- Las ecuaciones paramétricas se obtienen igualando ambos miembros a un parámetro λ y despejando ambas variables:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \lambda \\ \frac{y + 2}{3} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

- Pasando todos los sumandos del segundo miembro al primero en la ecuación explícita, se obtiene la ecuación general:

$$-3x + y + 2 = 0$$

9. Halla:

- a) La ecuación punto-pendiente de la recta r , que pasa por los puntos $(3, 4)$ y $(6, 7)$.**
- b) Dos puntos de dicha recta. Indica si los puntos $(-1, 2)$ y $(2, 3)$ pertenecen a r .**
- c) Un punto de dicha recta que tenga la abscisa igual a 5 y otro punto que tenga la ordenada igual a 1.**

Resolución

- a) Para hallar la ecuación punto-pendiente, se calcula la pendiente:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{7 - 4}{6 - 3} = 1$$

Nos piden la recta que pasa por el punto $(6, 7)$ y tiene de pendiente 1. Por tanto, la ecuación es:

$$y - 7 = 1(x - 6)$$

- b) Para obtener dos puntos de la recta, se dan valores cualesquiera a x en la ecuación anterior.

Si $x = 0$ se obtiene el punto $(0, 1)$.

Si $x = 1$ se obtiene el punto $(1, 2)$.

Para saber si $(-1, 2)$ pertenece a r , se sustituyen las coordenadas del punto en su ecuación:

$$2 - 7 = 1(-1 - 6) \Rightarrow -5 \neq -7 \Rightarrow (-1, 2) \notin r$$

Operamos de la misma forma con $(2, 3)$:

$$3 - 7 = 1(2 - 6) \Rightarrow -4 = -4 \Rightarrow (2, 3) \in r$$

- c) Para hallar un punto que tenga de abscisa 5, se sustituye este valor en la ecuación anterior:

$$y - 7 = 1(5 - 6) \Rightarrow y - 7 = -1 \Rightarrow y = -1 + 7 = 6$$

El punto buscado es $(5, 6)$.

Para hallar un punto que tenga de ordenada 1, se sustituye este valor en la ecuación anterior:

$$1 - 7 = 1(x - 6) \Rightarrow -6 = x - 6 \Rightarrow x = -6 + 6 = 0$$

Por tanto, el punto buscado es $(0, 1)$.

10. Dibuja las rectas de ecuaciones:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$

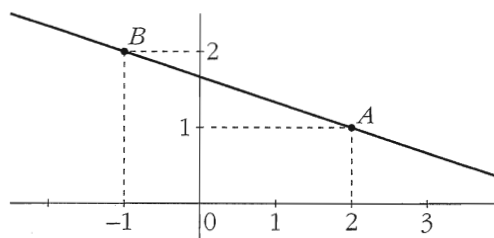
b) $s \equiv 2x - 3y + 5 = 0$

c) $t \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2}$

Resolución

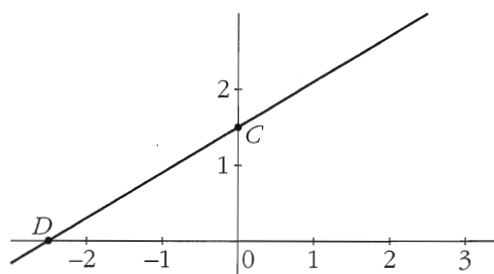
a) Para $\lambda = 0$, se obtiene el punto $A = (2, 1)$.

Para $\lambda = 1$, se obtiene el punto $B = (-1, 2)$.



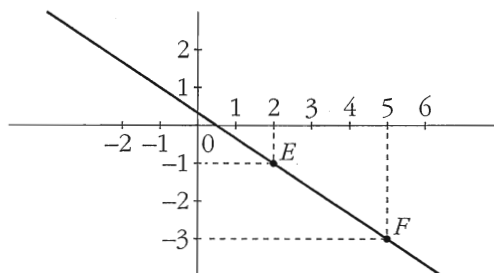
b) Para $x = 0$, se obtiene $y = \frac{5}{3}$, es decir, el punto $C = (0, \frac{5}{3})$.

Para $y = 0$, se obtiene $x = -\frac{5}{2}$, es decir, el punto $D = (-\frac{5}{2}, 0)$.



c) Para $x = 2$, se obtiene $y = -1$, es decir, el punto $E = (2, -1)$.

Para $y = -3$, se obtiene $x = 5$, es decir, el punto $F = (5, -3)$.



EJERCICIOS PROPUESTOS

- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (3, 5)$ y cuyo vector director es $\vec{u} = (2, -4)$:
 - En forma vectorial.
 - En forma paramétrica.
 - En forma continua.
 - En forma general.
 - En forma explícita.
 - En forma segmentaria.
- Halla la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $3x + 2y - 6 = 0$.
- ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A = (3, 1)$ y $B = (2, 4)$?
- Calcula la ecuación de las rectas que pasan por la intersección de:

$$r: 2x + y - 3 = 0 \quad y \quad s: x + y + 5 = 0$$
- Escribe las ecuaciones paramétricas, continua, general y explícita de una recta que pasa por el punto $A = (2, -4)$ y tiene de vector dirección $\vec{v} = (5, -2)$.
- Calcula la ecuación de la recta, r , que pasa por $A = (2, -1)$ y $B = (4, 5)$ en sus formas:
 - Paramétrica
 - Continua
 - Explícita
 - General
 - Canónica
- Una recta pasa por el punto $A = (-1, 3)$ y tiene el vector director $\vec{p} = (2, 5)$. Halla la ecuación de dicha recta de todas las formas posibles.
- Halla un vector director de la recta $2x + 3y - 5 = 0$.
- Determina la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $2x + y - 5 = 0$.
- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (5, 2)$ y tiene de pendiente $m = 3$.
- Halla la abscisa y la ordenada en el origen de la recta $2x - 4y + 4 = 0$.

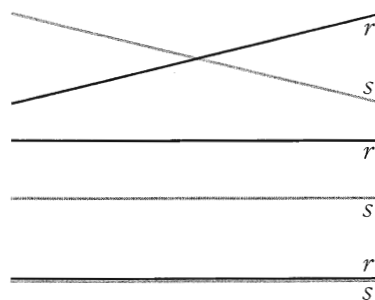
4.2. POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

Dadas dos rectas, r y s , las posiciones que puede tener una respecto a la otra son:

■ **Secantes:** Las rectas se cortan en un punto.

■ **Paralelas:** Las rectas son distintas y no se cortan en ningún punto.

■ **Coincidentes:** Las rectas son iguales.



1 Ecuaciones dadas en forma explícita

Sean las rectas de ecuaciones $r: y = mx + n$ y $s: y' = m'x + n'$:

■ r y s son coincidentes si $m = m'$ y $n = n'$.

■ r y s son paralelas y no coincidentes si $m = m'$ y $n \neq n'$.

■ r y s son secantes si $m \neq m'$.

Si dos rectas, r y s , se cortan en un punto, este ha de verificar sus ecuaciones. Calcular la intersección de r y s consiste en resolver el sistema formado por las dos ecuaciones de las rectas.

2 Ecuaciones dadas en forma general

Sean las rectas de ecuaciones $r: Ax + By + C = 0$ y $s: A'x + B'y + C' = 0$.

■ r y s son coincidentes si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$.

■ r y s son paralelas y no coincidentes si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$.

■ r y s son secantes si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$.

4 Haz de rectas paralelas

Todas las rectas que son paralelas a una dada, forman un **haz de rectas paralelas** de ecuación $Ax + By + K = 0$ que determina las rectas del haz según varía K .

EJEMPLOS

1. Halla el punto de intersección de las rectas $r: 2x + 3y + 3 = 0$ y $s: x + 2y - 2 = 0$.

Resolución

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es el punto $P = (-12, 7)$.

2. Calcula el punto de intersección de la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$ con la recta s , sabiendo que esta última pasa por los puntos $(3, 3)$ y $(5, -3)$.

Resolución

Despejando t en las ecuaciones de r e igualando valores, obtenemos:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} \Rightarrow -3x + 3 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 1 = 0$$

La recta s pasa por $(3, 3)$ y tiene como vector director $(2, -6)$, luego su ecuación es:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-6} \Rightarrow 6x - 18 + 2y - 6 = 0 \Rightarrow 3x + y - 12 = 0$$

Para hallar la intersección, se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ 3x + y - 12 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es el punto $P = \left(\frac{25}{3}, -13\right)$.

3. Halla la ecuación de la recta que contiene al punto $(3, 5)$ y es paralela a la recta $2x + 3y - 2 = 0$.

Resolución

La pendiente de la recta dada es: $m = -\frac{2}{3}$

La ecuación punto-pendiente es: $y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 3)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dadas las rectas:

$$r: ax + 2y + 4 = 0 \text{ y } s: 10x + by - 2 = 0$$

determina a y b para que se corten en $(2, 3)$.

5. ¿Cuál es la posición relativa de las rectas:

$$r: 3x + 2y - 19 = 0 \text{ y } s: 5x + y - 20 = 0?$$

2. Halla la ecuación de la recta que pasa por $(1, 0)$

y es paralela a la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2}$.

3. ¿Qué recta pasa por $(4, -1)$ y es paralela a la bisectriz del primer y el tercer cuadrante?

4. Halla el valor de k para que las rectas:

$$r: 3x + 2y = 5 \text{ y } s: 6x + ky = 7$$

sean paralelas.

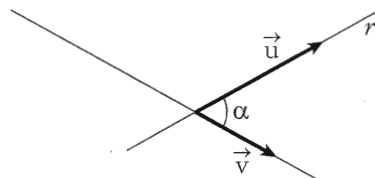
4.3. ÁNGULOS

1 Ángulo de dos rectas

Se llama ángulo de dos rectas al menor de los ángulos que forman ambas.

Para calcular el ángulo, se utilizan sus **vectores directores**, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, mediante el coseno del ángulo que forman:

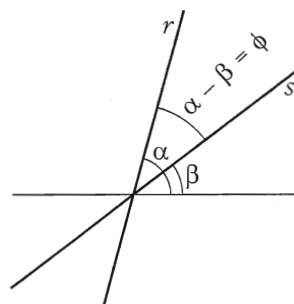
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



Otra forma de hallar el ángulo entre dos rectas es restando los ángulos que forman con la horizontal, α y β ; así, obtenemos $\phi = \alpha - \beta$. Para realizar este procedimiento, utilizamos las pendientes:

$$m = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{y} \quad m' = \operatorname{tg} \beta$$

$$\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}$$



Como al cortarse dos rectas se forman dos ángulos distintos y suplementarios, se considera que el ángulo de las rectas es el agudo; además, se toma el valor absoluto:

$$\operatorname{tg} \phi = \left| \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'} \right| \Rightarrow \phi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left| \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'} \right|$$

2 Rectas perpendiculares

■ Dos rectas son **perpendiculares** si el producto escalar de sus vectores directores es nulo:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

■ Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1 :

$$m \cdot m' = -1 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

3 Rectas paralelas

■ Dos rectas son **paralelas** si sus vectores directores son proporcionales:

$$r \parallel s \Leftrightarrow \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_1}{v_1}$$

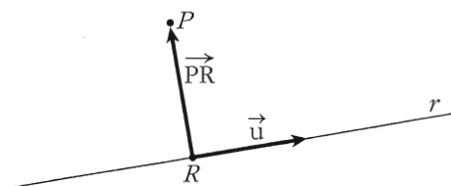
■ Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales y no tienen puntos en común:

$$m = m'$$

4 Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

La **proyección ortogonal** de un punto, P , sobre una recta, r , es el pie de la perpendicular trazada a la recta desde el punto P .

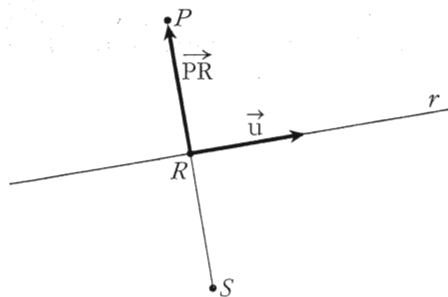
Para calcularlo, se determina la ecuación perpendicular a r que pasa por P y se halla el punto de corte de esta recta y r .



5 Punto simétrico de uno dado respecto a una recta

El **punto simétrico** de un dado, P , respecto de una recta, r , es el punto simétrico respecto de la proyección del punto P sobre la recta.

Se determina el punto de corte, R , de la perpendicular y la recta. A continuación, el problema se reduce a hallar el punto simétrico del punto P respecto de R .



EJEMPLOS

1. Halla el ángulo que forman las rectas:

$$r: 2x - 3y + 5 = 0 \text{ y } s: x + 4y - 2 = 0$$

Resolución

La pendiente de r es $m = \frac{2}{3}$ y la pendiente de s es $m' = -\frac{1}{4}$, por tanto:

$$\operatorname{tg} \phi = \left| \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'} \right| = \left| \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{4} \right)} \right| = \frac{11}{10}$$

$$\text{Así pues, } \phi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{11}{10} \right) = 43^\circ 35'$$

2. Halla la ecuación de la recta que contiene al punto $P = (2, 4)$ y forma un ángulo de 45° con la recta de ecuación $r: 2x + 5y - 3 = 0$.

Resolución

La pendiente de la recta r es $m = -\frac{2}{5}$, por tanto:

$$1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{-\frac{2}{5} - m'}{1 - \frac{2}{5} m'} \right| = \left| \frac{-2 - 5m'}{5 - 2m'} \right|$$

Como puede tomar dos valores:

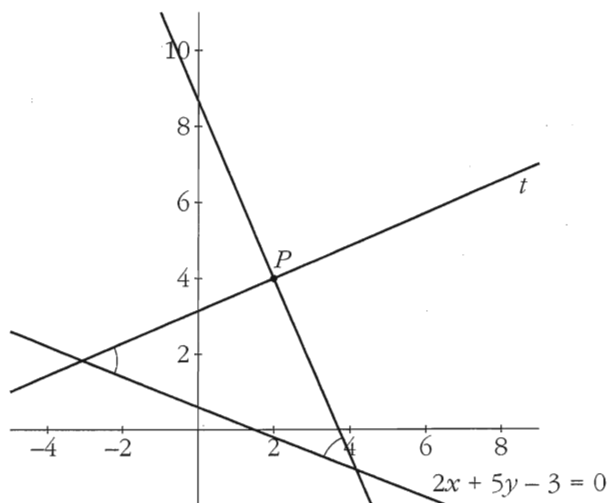
$$1 = \frac{-2 - 5m'}{5 - 2m'} \Rightarrow 5 - 2m' = -2 - 5m' \Rightarrow m' = -\frac{7}{3}$$

$$-1 = \frac{-2 - 5m'}{5 - 2m'} \Rightarrow 2m' - 5 = -2 - 5m' \Rightarrow m' = \frac{3}{7}$$

Las soluciones son las rectas:

$$s: y - 4 = -\frac{7}{3}(x - 2)$$

$$t: y - 4 = \frac{3}{7}(x - 2)$$



7. Halla la ecuación de la recta r que pasa por la intersección de las rectas $s: 3x - y - 9 = 0$ y $t: x - 3 = 0$ formando un ángulo de 45° con la recta $u: x + 5y - 6 = 0$.

Resolución

- El punto de corte de las rectas s y t se halla resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 - y - 9 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

El punto es $P = (3, 0)$.

- La recta u tiene como ecuación explícita $y = -\frac{x}{5} + \frac{6}{5}$, así pues, su pendiente es:

$$m = -\frac{1}{5}$$

- Como forma un ángulo de 45° con la recta pedida, la pendiente, m , de r verifica:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \left| \frac{m + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}m} \right|$$

Eliminamos el valor absoluto dando lugar a dos ecuaciones:

$$a) 1 - \frac{m}{5} = m + \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{6m}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

La recta r tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y pasa por el punto $P = (3, 0)$. Su ecuación punto-pendiente es:

$$y - 0 = \frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow 2x - 3y - 6 = 0$$

es la ecuación de la recta pedida.

$$b) 1 - \frac{m}{5} = -m - \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{4m}{5} = \frac{6}{5} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

La recta r tiene pendiente $-\frac{3}{2}$ y pasa por el punto $P = (3, 0)$. Su ecuación punto-pendiente es:

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 3) \Rightarrow 3x + 2y - 9 = 0$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla el ángulo que forman las rectas:

$$r: x - y + 1 = 0 \text{ y } s: x + y = 0$$

2. Halla la ecuación de la recta que contiene al punto $P = (1, 2)$ y forma con la recta de ecuación $r: 2x + 5y - 3 = 0$ un ángulo de 60° .

3. Halla la ecuación de la recta que contiene al punto $P = (1, 1)$ y es perpendicular a la recta $r: x + y - 1 = 0$.

4. Halla la proyección del punto $P = (2, 2)$ sobre la recta definida por los puntos $Q = (1, -2)$ y $S = (-2, -4)$.

5. Halla el simétrico del punto $P = (1, 1)$ respecto de la recta $r: x + y - 1 = 0$.

7. Halla la ecuación de la recta que pasa por la intersección de $3x - y - 3 = 0$ y $x - 2 = 0$ formando un ángulo de 45° con $x + y - 6 = 0$.

8. Halla el valor de k para que las rectas $r: 2x - 5y - 17 = 0$ y $s: 3x - ky - 8 = 0$ se corten formando un ángulo de 45° .

9. Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P = (-3, 0)$ y forman con la recta de ecuación $r: 3x - 5y + 9 = 0$ un ángulo α , tal que

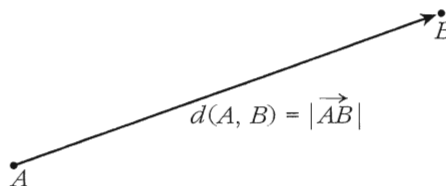
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}.$$

4.4. DISTANCIAS

1 Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos, A y B , es el módulo del vector de origen A y final B :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



2 Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto, $P = (x_0, y_0)$, a la recta que tiene por ecuación general $r: Ax + By + C = 0$, es la existente entre el punto P y el pie de la perpendicular trazada desde P hasta r y viene dada por:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

3 Distancia entre dos rectas

La distancia entre dos rectas es la distancia mínima existente entre dos puntos, uno de cada recta:

- **Secantes.** Como las rectas se cortan en un punto, la distancia entre ellas es cero.
- **Paralelas.** La distancia mínima existente entre un punto de la primera y su proyección en la segunda recta.
- **Coincidentes.** Las rectas son iguales, la distancia entre ellas es cero.

EJEMPLOS

1. Calcula la distancia entre los puntos $P = (2, -1)$ y $Q = (3, 5)$.

Resolución

Será el módulo del vector que los une:

$$d(P, Q) = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

2. Calcula a para que la distancia entre los puntos $P = (2, 7)$ y $Q = (-5, a)$ sea 10.

Resolución

El módulo del vector $\vec{PQ}$ debe valer 10:

$$\begin{aligned} |\vec{PQ}| &= \sqrt{7^2 + (7-a)^2} = 10 \Rightarrow 49 + 49 - 14a + a^2 = 100 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2 - 14a - 2 = 0 \Rightarrow a = 7 \pm \sqrt{51} \end{aligned}$$

3. Calcula la distancia del punto $P = (5, -1)$ a la recta $r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$.

Resolución

Expresamos la recta en forma general. Despejando el parámetro λ e igualando, se obtiene:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-1} \Rightarrow x-1 = 2y \Rightarrow x-2y-1 = 0$$

La distancia viene determinada por la siguiente fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|1 \cdot 5 + (-2)(-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

4. Halla la distancia del punto $(3, 4)$ a la recta de ecuación $2x - 3y + 8 = 0$.

Resolución

Por aplicación directa de la fórmula:

$$d = \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

5. Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1}$ y $s: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \end{cases}$, averigua su posición relativa y halla la distancia entre ellas.

Resolución

- Para averiguar la posición de las rectas, comparamos sus vectores directores $\vec{u} = (1, 1)$ y $\vec{v} = (1, -1)$. Como no son proporcionales, las rectas no son paralelas.

Sustituyendo un punto genérico de s , $S = (1+t, 2-t)$, en la ecuación de r obtenemos la intersección de ambas:

$$(1+t) - 1 = (2-t) - 2 \Rightarrow t = -t \Rightarrow t = 0$$

La intersección es el punto $(1, 2)$.

- La distancia entre las rectas es cero, puesto que se cortan en el punto $(1, 2)$.

6. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A = (3, 1)$, $B = (2, 2)$ y $C = (-2, -3)$.

Resolución

Hallamos la longitud de AB :

$$d(A, B) = \sqrt{(2-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

La altura, h , es la distancia entre el vértice C y el lado AB . En primer lugar, se halla la ecuación de la recta AB . Su pendiente es:

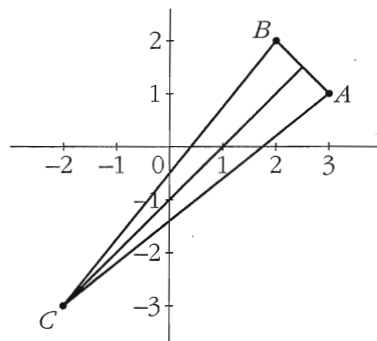
$$m = \frac{2-1}{2-3} = -1$$

Conocido m , calculamos la ecuación punto-pendiente:

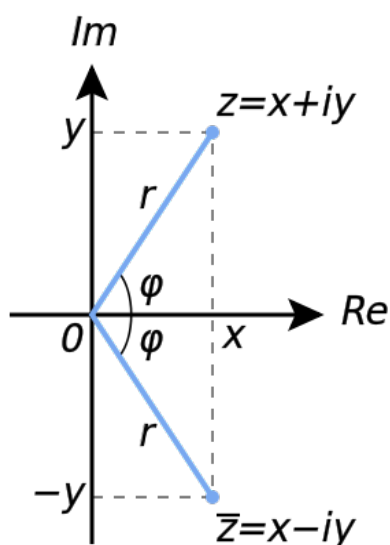
$$y - 2 = -1(x - 2) \Rightarrow y - 2 = -x + 2 \Rightarrow x + y - 4 = 0$$

$$\text{La altura es: } h = d(C, AB) = \left| \frac{2-3-4}{\sqrt{1^2+1^2}} \right| = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\text{El área es: } S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2} \text{ u}^2$$



NÚMEROS COMPLEJOS



MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato CCNN

**Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas**



I) NECESIDAD DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos, también llamados imaginarios, surgieron históricamente de la necesidad de resolver ecuaciones tan sencillas como

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

Esta ecuación, como muy bien sabemos, no tendría solución en el campo de los números reales. Ahora bien, si definimos:

$$\boxed{\sqrt{-1} = i} \leftarrow \text{unidad imaginaria} \quad \text{es decir, } \boxed{i^2 = -1}$$

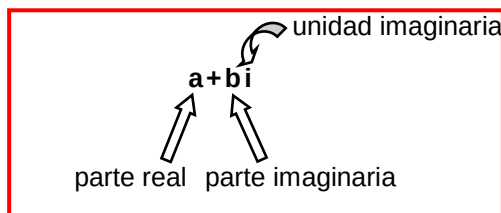
entonces su solución sería $x = \pm i$. Esto es lo que hicieron en el siglo XVI matemáticos como *Girolamo Cardano* (1501-1576) o *Rafaele Bombelli* (1526-1572); en aquella época a este tipo de números se les empezó a llamar imaginarios. Por cierto, el primero en utilizar la i para designar la unidad imaginaria fue el suizo *Leonhard Euler* (1707-1783), mientras que al alemán *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855), que profundizó en el estudio de estos números, se debe el adjetivo de complejos.

Ejemplo 1: Resolver, en el campo de los números complejos, la ecuación $x^2 + 9 = 0$ (Sol: $\pm 3i$)

Ejemplo 2: Ídem con $x^2 - 4x + 13 = 0$ (Sol: $2 \pm 3i$)

Ejemplo 3: Ídem con $x^2 + x + 1 = 0$

En general:



Nº COMPLEJO EN FORMA BINÓMICA

Ejercicio final tema: 1

Conclusión: TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: « Todo polinomio de grado n tiene n raíces (reales o complejas) ».

Definiciones:

- 1º)** Se define el **conjunto de los números complejos** como el formado por todos los números de la forma $a+bi$, donde a y b son reales:

$$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

A los números complejos se les suele designar con la letra z , es decir, $z = a+bi$, y se dice que:

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \leftarrow \text{parte real de } z$$

$$\operatorname{Im}(z) = b \quad \leftarrow \text{parte imaginaria de } z$$

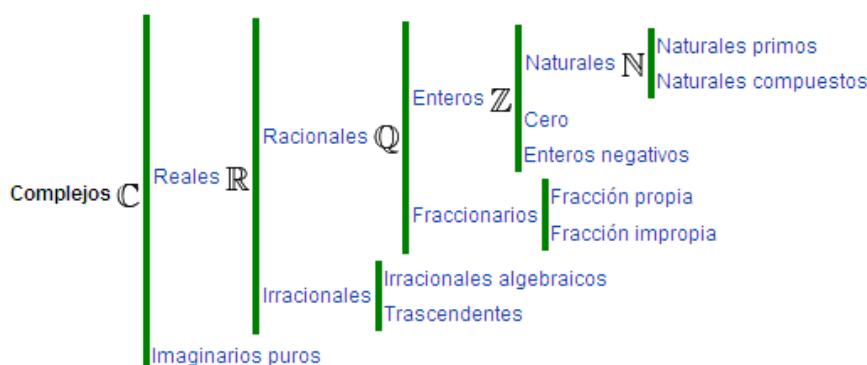
- 2º) Número imaginario puro:** es aquel complejo que carece de parte real, es decir, $\operatorname{Re}(z)=0$

Ejemplos: $2i$, $-7i$, i , $\frac{3}{5}i$, $-i$, $\sqrt{5}i$, etc.

- 3º) Número real:** es aquel complejo que carece de parte imaginaria, es decir, $\operatorname{Im}(z)=0$

Ejemplos: 3 , -6 , 1 , $\frac{2}{7}$, -1 , $\sqrt{3}$, etc.

Nótese, por tanto, que los reales están contenidos en los complejos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, o dicho de otra forma, los reales son un subconjunto de los complejos; por lo tanto, ya podemos completar el esquema de todos los conjuntos numéricos que conocemos:



- 4º) Complejo conjugado, $\bar{z}$** (se lee "conjugado de z "): El complejo conjugado del complejo $z = a+bi$ se define como $\bar{z} = a-bi$

Ejemplos: $z = 2 + 5i \rightarrow \bar{z} = 2 - 5i$

$$z = 1 - 4i \rightarrow \bar{z} = 1 + 4i$$

$$z = 7i \rightarrow \bar{z} = -7i$$

$$z = 3 \rightarrow \bar{z} = 3$$

etc.

Adviértase que las soluciones imaginarias de una ecuación de 2º grado siempre son pares conjugados.

- 5º)** Dos números **complejos** expresados en forma binómica son **iguales** si coinciden sus partes reales e imaginarias.

Ejemplo: $2 - xi = y + 3i \Leftrightarrow y = 2, x = -3$

Ejercicio final tema: 2

Reseña histórica:

La unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ fue intuita por los matemáticos italianos renacentistas Gerolamo **Cardano** (1501-1576), Raffaele **Bombelli** (1526-1572) et al., al tratar de resolver ecuaciones del tipo $x^2+1=0$, es decir, carentes de solución en el campo real. En el siglo XVII, a las $\sqrt{-}$ de números negativos se les denominaba "números imaginarios". El primero en utilizar la i para designar la unidad imaginaria fue el suizo Leonhard **Euler** (1707-1783)

En 1673 el inglés John **Wallis** (1616-1703) fue el primero en idear el plano complejo, que fue redescubierto independientemente por el noruego Caspar **Wessel** (1745-1818) en 1797 y por matemático, astrónomo y físico alemán Johann Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855) en 1811, quien también vio que las n raíces de la ecuación $x^n-1=0$ formaban un polígono regular de n lados. Precisamente Gauss utilizó por primera vez el adjetivo de números complejos.

El francés Augustin-Louis **Cauchy** (1789-1857) desarrolló formalmente el análisis complejo, ya intuitido por Gauss. El alemán Bernhard **Riemann** (1826-1866) también utilizó funciones complejas, es decir, funciones $f(z)$ cuya variable z es un complejo.

La primera aplicación práctica de los números complejos se debe al germano-americano Charles **Steinmetz** (1865-1923), para cálculos en corriente alterna, en concreto para la inductancia de una bobina y la capacitancia de un condensador.

II) OPERACIONES CON COMPLEJOS en FORMA BINÓMICA

II.1) Suma y diferencia: Se realiza sumando (o restando) por separado sus partes reales e imaginarias:

Ejemplo 4:
$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 3 + 5i \\ z_2 = 4 - 2i \end{array} \right\} \begin{array}{l} z_1 + z_2 = (3 + 5i) + (4 - 2i) = 7 + 3i \\ z_1 - z_2 = (3 + 5i) - (4 - 2i) = -1 + 7i \end{array}$$

Ejercicios final tema: 3 y 4

II.2) Producto: Se realiza calculando los cuatro productos posibles y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

Ejemplo 5:
$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 3 + 5i \\ z_2 = 4 - 2i \end{array} \right\} z_1 \cdot z_2 = (3 + 5i)(4 - 2i) = 12 - 6i + 20i - 10i^2 = 12 - 6i + 20i + 10 = \boxed{22 + 14i}$$

 $i^2 = -1$ ↻

Ejercicios final tema: 5 a 9

Consecuencia: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$

Este hecho será útil para el cociente que vamos a definir a continuación:

II.3) Cociente: Se realiza multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

Ejemplo 6:
$$\frac{3 + 5i}{4 - 2i} = \frac{(3 + 5i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{12 + 6i + 20i + 10i^2}{16 - 4i^2} = \frac{12 + 6i + 20i - 10}{16 + 4} = \frac{2 + 26i}{20} = \frac{2}{20} + \frac{26}{20}i = \frac{1}{10} + \frac{13}{10}i = \boxed{\frac{1}{10} + \frac{13}{10}i}$$

↻ $i^2 = -1$ ↻ propiedad distributiva del cociente

Observaciones: 1ª) Se recomienda hacer la comprobación:

$$(4 - 2i)\left(\frac{1}{10} + \frac{13}{10}i\right) = \boxed{3 + 5i}$$

2ª) Caso particular: Cuando en el denominador aparece un imaginario puro basta con multiplicar numerador y denominador por i :

Ejemplo 7:
$$\frac{3+5i}{2i} = \frac{(3+5i) \cdot i}{2i \cdot i} = \frac{3i+5i^2}{2i^2} = \frac{3i-5}{-2} = \frac{-3i+5}{2} = \boxed{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i}$$

Ejercicios final tema: 10 y 11

II.4) Potencia: Para hacer $(a+bi)^n$ tendremos que aplicar el binomio de Newton, como vimos en el 1^{er} tema del curso; ahora bien, como a continuación habría que sustituir alguna de las **potencias sucesivas de i** , vamos a investigar su valor:

$i^0 = 1$ como siempre

$i^1 = i$ como siempre

$i^2 = -1$ por definición

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

Luego vemos que se trata de una serie de 4 términos (los recuadrados) que se van repitiendo; y lo curioso es que este hecho también se da hacia atrás:

$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$

$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$

$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i \cdot i} = \frac{i}{1} = i$

$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$

En resumen:

$$\begin{aligned} & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & i^{-4} = 1 \\ & i^{-3} = i \\ & i^{-2} = -1 \\ & i^{-1} = -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \\ i^6 &= -1 \\ i^7 &= -i \\ i^8 &= 1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Y, en general, para hallar una potencia n-ésima de i , basta con hacer la división y quedarnos con el resto, que estará en uno de los cuatro casos anteriores:

Ejemplo 8: ¿ i^{151} ?

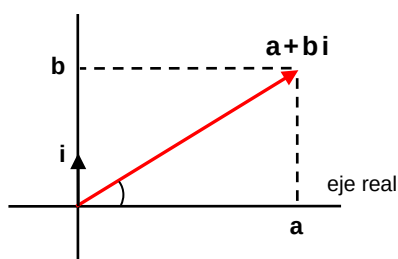
$$\begin{array}{r} 151 \overline{) 4} \\ 31 \quad 37 \\ \hline 3 \end{array} \longrightarrow 151 = 37 \cdot 4 + 3 \longrightarrow \boxed{i^{151} = i^3 = -i}$$

Es decir, descenderíamos 37 veces en la serie de 4 elementos para acabar en la posición 3

Ejercicios final tema: 12 a 25

III) REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE COMPLEJOS (Forma binómica y polar)

eje imaginario



Dado un sistema de dos ejes perpendiculares como el de la figura –eje real y eje imaginario–, llamado plano de Gauss¹, « **para representar un complejo** en forma binómica –es decir, $z=a+bi$ – le haremos corresponder el vector (a,b) ».

Definiciones: 1ª) El punto (a,b) , es decir, el extremo del vector, se llama **afijo** del complejo $a+bi$.

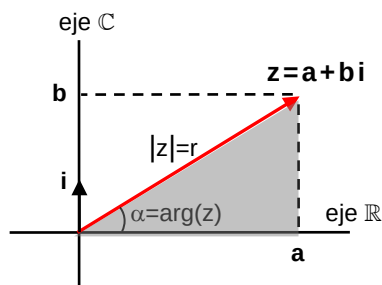
2ª) La longitud del vector se denomina **módulo**, y se suele designar como r o $|z|$.

3ª) El ángulo que forma el vector con la parte positiva del eje x se llama **argumento**, y se designa como α o $\arg(z)$.

¹ Curiosamente, en realidad los artífices de esta idea fueron el danés Caspar Wessel (1745-1818) en 1797 y el suizo Jean Robert Argand (1768-1822) en 1806, pero la gloria del nombre se debe al alemán Gauss (1777-1855), que profundizó en este tema 30 años después...

Ejercicios final tema: 26

Forma polar r_α : Consiste en representar un complejo mediante dos valores: su módulo y su argumento, designándolo como r_α .



Para hallar el módulo podemos aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado:

$$r^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1)$$

Para obtener el argumento, aplicamos trigonometría elemental en el mismo triángulo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \quad (2)$$

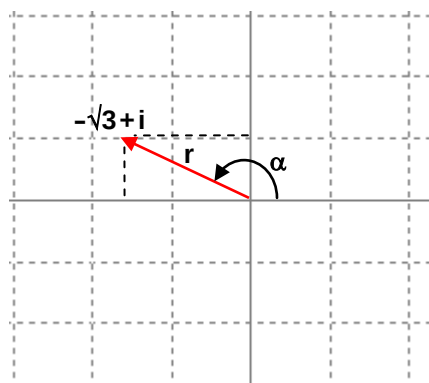
Todo lo anterior podemos resumirlo en la siguiente tabla:

		Definición:	Cálculo:	Rango:
FORMA POLAR r_α	MÓDULO r	Longitud del complejo $z = a + bi$	$r = \sqrt{a^2 + b^2} = z $	$r > 0$
	ARGUMENTO α	Ángulo que forma ² el complejo con la parte positiva del eje $\mathbb{R}$	$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \arg(z)$	$0 \leq \alpha < 360^\circ$

Consejos a la hora de pasar de binómica a polar:

- 1^a)** Como muy bien sabemos del tema de Trigonometría, entre 0° y 360° existen dos arcotangentes (que difieren en 180°), por lo que conviene dibujar previamente el complejo y ver con cuál de las dos nos quedamos, en función de en qué cuadrante esté situado dicho complejo:

Ejemplo 9: Pasar $-\sqrt{3} + i$ a polar:



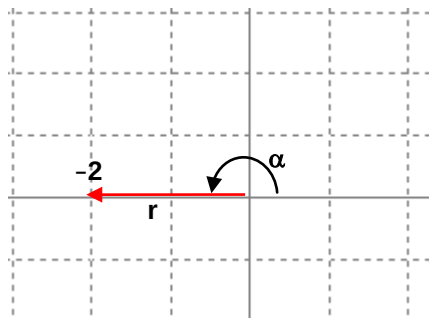
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{1}{-\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{3} = \begin{cases} 330^\circ \\ 150^\circ \end{cases} \leftarrow \text{descartada pq. } z \in 2^\circ \text{ cuad.} \end{aligned}$$

Por tanto: $-\sqrt{3} + i = 2_{150^\circ}$

² Dicho ángulo puede expresarse en radianes o grados sexagesimales, indistintamente.

2ª) Caso particular: Si se trata de un número real o un imaginario puro se pasa a polar gráficamente, es decir, sin necesidad de aplicar las dos fórmulas anteriores:

Ejemplo 10: Pasar -2 a polar:



En el dibujo se ve que:

$$-2 = 2_{180^\circ}$$

(Puede comprobarse también, naturalmente, que si se utilizan las dos fórmulas se obtiene el mismo resultado, pero el proceso resulta muy tedioso...)

Ejercicios final tema: 27 a 32

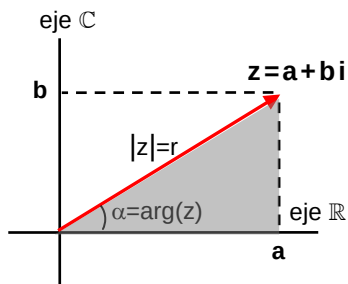
¿Cuándo son dos complejos iguales en forma polar?:

$$r_\alpha = r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha = \alpha' + k \cdot 360^\circ, \text{ donde } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Es decir: «Dos complejos en forma polar son iguales si sus módulos son exactamente idénticos y sus argumentos son iguales, salvo una diferencia de un múltiplo entero de vueltas»

Ejemplos: $2_{30^\circ} = 2_{390^\circ}$ $5_{330^\circ} = 5_{-30^\circ}$ $2_\pi = 2_{3\pi}$ $\sqrt{2}_{30^\circ} = \sqrt{2}_{750^\circ}$

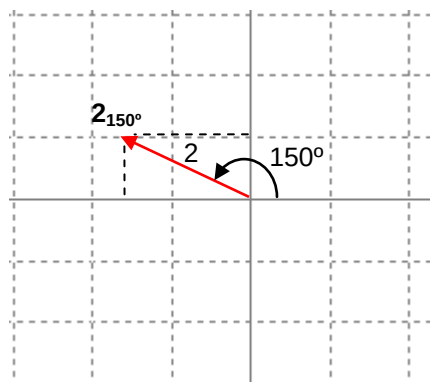
Forma trigonométrica: Sirve para pasar de polar a binómica:



$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cos \alpha \\ \sin \alpha = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{a + bi = r \cos \alpha + r \sin \alpha \cdot i = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)}$$

(3)

Ejemplo 11: Pasar 2_{150° a binómica:



$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ$$

$$\boxed{2_{150^\circ} = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \boxed{-\sqrt{3} + i}}$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$$

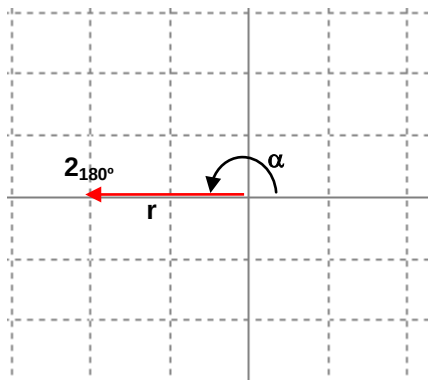
Por tanto:

$$\boxed{2_{150^\circ} = -\sqrt{3} + i}$$

Nótese que es el mismo resultado obtenido en el ejemplo 9.

Caso particular: Para pasar de polar a binómica, cuando se trate de los argumentos 0° , 90° , 180° y 270° , no es necesario pasar previamente a trigonométrica:

Ejemplo 12: Pasar 2_{180° a binómica:

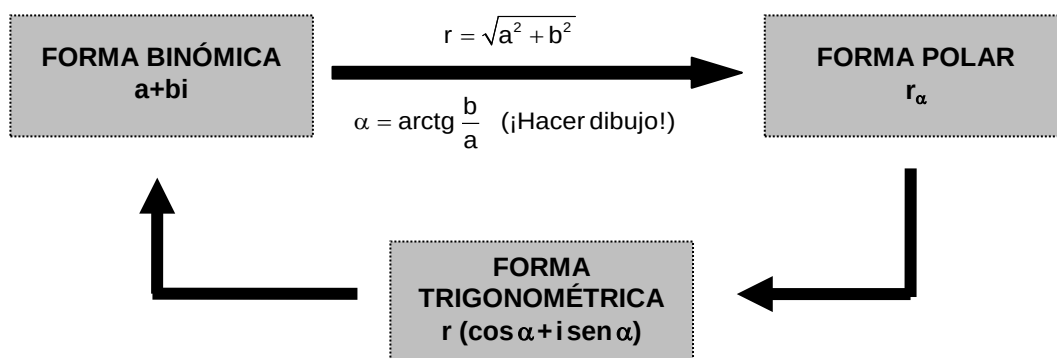


En el dibujo se ve que:

$$2_{180^\circ} = -2$$

(Puede comprobarse también, naturalmente, que si se pasa previamente a trigonométrica se obtiene el mismo resultado...)

■ Todo lo visto en este apartado se puede resumir en el siguiente diagrama, en el que se muestran las tres formas que hemos indicado de representar un complejo y todas las combinaciones de paso de una a otra:



Ejercicios final tema: 33 a 41

IV) OPERACIONES EN FORMA POLAR

IV.1) Producto y cociente en forma polar

«El producto de dos complejos en forma polar es otro complejo de módulo el producto de los módulos y argumento la suma de éstos»:

$$r_\alpha \cdot r'_{\alpha'} = (r \cdot r')_{\alpha + \alpha'} \quad (4)$$

Es decir, «El módulo del producto es el producto de los módulos, y el argumento del producto es la suma de los argumentos».

Dem:

$$\begin{aligned} r_\alpha \cdot r'_{\alpha'} &= r(\cos \alpha + i \sen \alpha) \cdot r'(\cos \alpha' + i \sen \alpha') = r \cdot r'(\cos \alpha + i \sen \alpha)(\cos \alpha' + i \sen \alpha') = \\ &= r \cdot r'(\cos \alpha \cos \alpha' + i \sen \alpha \cos \alpha' + i \cos \alpha \sen \alpha' + i^2 \sen \alpha \sen \alpha') = \\ &= r \cdot r'[(\cos \alpha \cos \alpha' - \sen \alpha \sen \alpha') + i(\sen \alpha \cos \alpha' + \cos \alpha \sen \alpha')] = \\ &= r \cdot r'[\cos(\alpha + \alpha') + i \sen(\alpha + \alpha')] = (r \cdot r')_{\alpha + \alpha'} \quad (\text{C.Q.D.}) \end{aligned}$$

Ejemplos: $3_{60^\circ} \cdot 2_{45^\circ} = 6_{105^\circ}$
 $\sqrt{3}_{135^\circ} \cdot 1_{270^\circ} = \sqrt{3}_{405^\circ} = \sqrt{3}_{45^\circ}$

Se puede generalizar a tres o más complejos:

$$\sqrt{3}_{120^\circ} \cdot 2_{150^\circ} \cdot \sqrt{3}_{90^\circ} = 6_{360^\circ} = 6_{0^\circ}$$

- «El cociente de dos complejos en forma polar es otro complejo de módulo el cociente de los módulos y argumento la resta de éstos»:

$$\frac{r_\alpha}{r'_{\alpha'}} = \left(\frac{r}{r'} \right)_{\alpha - \alpha'} \quad (5)$$

Es decir, «El módulo del cociente es el cociente de los módulos, y el argumento del cociente es la diferencia de los argumentos».

Dem: (se deja como ejercicio)

Ejemplos: $\frac{6_{85^\circ}}{3_{20^\circ}} = 2_{65^\circ}$
 $\frac{\sqrt{2}_{90^\circ}}{2_{120^\circ}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)_{-30^\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)_{330^\circ}$

Ejercicios final tema: 42 a 53

En resumen: 1º) Sumas y restas de complejos: sólo se pueden hacer en binómica.

2º) Productos, cocientes (y potencias y raíces, como veremos a continuación): se recomienda en polar (aunque también pueden hacerse, más prolijamente, en binómica).

IV.2) Potencia en forma polar

Vamos a obtener –en polar, que es la forma más cómoda para ello–, la fórmula para obtener la potencia de un complejo. Para ello, aplicaremos n veces el producto recién visto:

$$\boxed{(r_\alpha)^n} = \underbrace{r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \dots \cdot r_\alpha}_{n \text{ términos}} = \underbrace{(r \cdot r \cdot \dots \cdot r)}_{n \text{ sumandos}}_{\alpha + \alpha + \dots + \alpha} = \boxed{(r^n)_{n \cdot \alpha}}$$

Por tanto:

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n \cdot \alpha} \quad (6)$$

Es decir: «Para elevar un complejo en forma polar a un exponente se eleva su módulo al exponente y se multiplica su argumento por dicho exponente»:

Ejemplos: $(2_{30^\circ})^3 = (2^3)_{90^\circ} = 8_{90^\circ}$

$$(\sqrt{3}_{135^\circ})^4 = \left[(\sqrt{3})^4 \right]_{4 \cdot 135^\circ} = 9_{540^\circ} = 9_{180^\circ}$$

Ejercicios final tema: 54 a 58

Si pasamos ambos miembros de la anterior fórmula a forma trigonométrica obtenemos la **fórmula de De Moivre**³:

$$\left[r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \right]^n = r^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) \quad (7)$$

Esta fórmula es muy útil en Trigonometría, para hallar fórmulas de $\operatorname{sen} n\alpha$ y $\cos n\alpha$ en función de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$ (Ver **Ejercicio final tema: 59**)

IV.3) Raíces de un complejo

Es imposible hallar las raíces de un complejo directamente en forma binómica. Vamos a deducir a continuación las fórmulas para hallar la raíz de un complejo en polar.

Supongamos que nos dan el complejo r_α , y queremos hallar su raíz n -ésima, que vamos a llamar R_β ; por tanto, tendremos que:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = R_\beta$$

Por lo tanto, por definición de raíz n -ésima, tendremos que:

$$(R_\beta)^n = r_\alpha$$

Podemos aplicar ahora al primer miembro la fórmula de la potencia obtenida en el apartado anterior:

$$(R^n)_{n \cdot \beta} = r_\alpha$$

A continuación tendremos en cuenta que, según vimos en el apdo. III, dos complejos expresados en forma polar son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos también, salvo una diferencia de un múltiplo entero k de vueltas:

³ Descubierta por el francés *Abraham de Moivre* (1667-1754).

$$(R^n)_{n \cdot \beta} = r_\alpha \Rightarrow \begin{cases} R^n = r \Rightarrow R = \sqrt[n]{r} \\ n \cdot \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \beta = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}, \text{ donde } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (8)$$

Falta razonar que k solamente puede tomar los valores $0, 1, 2, \dots$, hasta $n-1$. Efectivamente, si $k=n$, entonces, al sustituir en la segunda fórmula recuadrada, obtendríamos $\beta = \alpha + 360^\circ$, con lo cual volveríamos al mismo ángulo.

El hecho de k sólo pueda tomar estos n valores desde $0, 1, 2, \dots$ hasta $n-1$ tiene una serie de consecuencias:

1º) Un complejo tiene n raíces n -ésimas.

2º) Las n raíces comparten el mismo módulo R (lo que varía es el argumento).

3º) Si las dibujamos, formarán un polígono regular de n lados.

Ejemplo 13: Hallar $\sqrt[3]{8_{90^\circ}}$

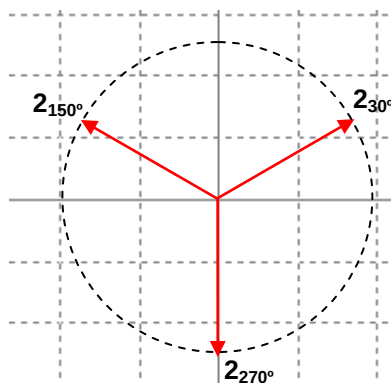
$$\sqrt[3]{8_{90^\circ}} = R_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \beta = \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} = 30^\circ + k \cdot 120^\circ; k = 0 \rightarrow \beta = 30^\circ \end{cases}$$

$$k = 1 \rightarrow \beta = 150^\circ$$

$$k = 2 \rightarrow \beta = 270^\circ$$

Soluc: $2_{30^\circ}, 2_{150^\circ}, 2_{270^\circ}$

Si dibujamos las tres raíces, comprobaremos que sus afijos forman un triángulo equilátero:



Ejercicios final tema: 60 y ss.

63 EJERCICIOS de NÚMEROS COMPLEJOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los números complejos:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ (Soluc: $1 \pm i$) b) $x^2 + 3 = 0$ (Soluc: $\pm \sqrt{3}i$) c) $x^2 - 2x + 4 = 0$ (Soluc: $1 \pm \sqrt{3}i$) d) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ (Soluc: $\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$)	e) $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$ (Soluc: $2, 2 \pm 3i$) f) $x^3 + 1 = 0$ (Soluc: $-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$) g) $x^4 - 1 = 0$ (Soluc: $\pm 1, \pm i$) h) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12 = 0$ (Soluc: $-2, 3, 1 \pm i$)
---	--

Forma binómica de un complejo:

2. Completar (en este cuaderno; obsérvese el primer ejemplo):

	COMPLEJO z	PARTE REAL Re(z)	PARTE IMAGINARIA Im(z)	OPUESTO -z	CONJUGADO $\bar{z}$
1	$z = 2 + 3i$	$\text{Re}(z) = 2$	$\text{Im}(z) = 3$	$-z = -2 - 3i$	$\bar{z} = 2 - 3i$
2	$z = 3 - 3\sqrt{3}i$				
3				$-z = -3 + i$	
4					$\bar{z} = 1 - i$
5	$z = 3$				
6	$z = -2i$				
7	$z = i$				

3. Dados los complejos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + 4i$ y $z_3 = 2 - 5i$, hallar:

a) $z_1 + z_2$ (Soluc: $1 + 7i$) b) $z_1 + z_3$ (Soluc: $4 - 2i$) c) $z_1 - z_2$ (Soluc: $3 - i$) d) $z_3 - z_2$ (Soluc: $3 - 9i$)	e) $3z_2 + 2z_3$ (Soluc: $1 + 2i$) f) $2z_1 - 3z_2$ (Soluc: $7 - 6i$) g) $z_3 - 3z_1 + 4z_2$ (Soluc: $-8 + 2i$) h) $z_1 + \bar{z}_2$ (Soluc: $1 - i$)	i) $z_3 - \bar{z}_3$ (Soluc: $-10i$) j) $2\bar{z}_1 - z_1$ (Soluc: $2 - 9i$)
--	---	--

4. Calcular x e y para que $(2 + xi) + (y + 3i) = 7 + 4i$ (Soluc: $x = 1, y = 5$)

5. Calcular:

a) $(2 + 5i)(3 + 4i)$ (Soluc: $-14 + 23i$) b) $(1 + 3i)(1 + i)$ (Soluc: $-2 + 4i$) c) $(1 + i)(-1 - i)$ (Soluc: $-2i$) d) $(2 - 5i)i$ (Soluc: $5 + 2i$) e) $(2 + 5i)(2 - 5i)$ (Soluc: 29)	f) $(1 + i)(1 - i)$ (Soluc: 2) g) $(5 + 2i)(3 - 4i)$ (Soluc: $23 - 14i$) h) $(3 + 5i)^2$ (Soluc: $-16 + 30i$) i) $(1 + 3i)(1 - 3i)$ (Soluc: 10) j) $(-2 - 5i)(-2 + 5i)$ (Soluc: 29)
--	--

- | | | | |
|--------------------------|---|--------------------------------------|-----------------------------------|
| k) $(a+bi)(c+di)$ | <i>(Soluc: $ac-bd+(ad+bc)i$)</i> | p) $(2+3i)(1-i)$ | <i>(Soluc: $5+i$)</i> |
| l) $(2+3i)3i$ | <i>(Soluc: $-9+6i$)</i> | q) $(1-3i)2i$ | <i>(Soluc: $6+2i$)</i> |
| m) $(3i)(-3i)$ | <i>(Soluc: 9)</i> | r) $(1+i)(2-3i)$ | <i>(Soluc: $5-i$)</i> |
| n) $(2+3i)^2$ | <i>(Soluc: $-5+12i$)</i> | s) $(5+i)(5-i)$ | <i>(Soluc: 26)</i> |
| o) $(6-3i)^2$ | <i>(Soluc: $27-36i$)</i> | t) $(4+3i)(4+2i)-(2+i)(3-4i)$ | <i>(Soluc: $25i$)</i> |

6. a) ¿Cómo es siempre el producto de dos complejos conjugados? Razonar la respuesta. *(Soluc: $\in \mathbb{R}^+$)*
 b) ¿Cómo son los complejos cuyo opuesto coincide con su conjugado? Indicar ejemplos.
 c) ¿Qué ocurre si a un complejo le sumamos su conjugado? ¿Y si lo restamos?

7. Dados los complejos del ejercicio 3, hallar:

- | | | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|--|--|
| a) $z_1 \cdot z_2$ | <i>(Soluc: $-14+5i$)</i> | f) $(z_1)^2$ | <i>(Soluc: $-5+12i$)</i> | j) $z_2(2z_1-3z_3)$ | <i>(Soluc: $-82-29i$)</i> |
| b) $z_1 \cdot z_3$ | <i>(Soluc: $19-4i$)</i> | g) $(z_1-z_3)^2$ | <i>(Soluc: -64)</i> | k) $(3z_1+2z_2)^2$ | <i>(Soluc: $-273+136i$)</i> |
| c) $z_3 \cdot z_2$ | <i>(Soluc: $18+13i$)</i> | h) $z_1 \cdot \overline{z_1}$ | <i>(Soluc: 13)</i> | l) $z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot z_3$ | <i>(Soluc: $75-28i$)</i> |
| d) $z_1(z_3+z_2)$ | <i>(Soluc: $5+i$)</i> | i) $z_1 - \overline{z_1}$ | <i>(Soluc: $6i$)</i> | m) $z_1^2 - \overline{z_1}^2$ | <i>(Soluc: $24i$)</i> |
| e) $z_1-z_2 \cdot z_3$ | <i>(Soluc: $-16-10i$)</i> | | | | |

8. Dados los complejos $2-mi$ y $3-ni$ hallar **m** y **n** para que su producto sea $8+4i$.
(Soluc: $m_1=-2$ y $n_1=1$; $m_2=2/3$ y $n_2=-3$)

9. Resolver la ecuación $(a+i)(b-3i)=7-11i$ *(Soluc: $a_1=4$ y $b_1=1$; $a_2=-1/3$ y $b_2=-12$)*

10. Calcular:

- | | | | |
|---|--|---|---|
| a) $\frac{1+3i}{1+i}$ | <i>(Sol: $2+i$)</i> | l) $\frac{2-i}{3+i} - \frac{1}{2i}$ | <i>(Sol: $\frac{1}{2}$)</i> |
| b) $\frac{2+5i}{3+4i}$ | <i>(Sol: $\frac{26}{25} + \frac{7}{25}i$)</i> | m) $i + \frac{1}{i}$ | <i>(Sol: 0)</i> |
| c) $\frac{1+i}{1-i}$ | <i>(Sol: i)</i> | n) $\frac{(5-3i)(1+i)}{1-2i}$ | <i>(Sol: $\frac{12}{5} - \frac{14}{5}i$)</i> |
| d) $\frac{3+5i}{1-i}$ | <i>(Sol: $-1+4i$)</i> | o) $\frac{(3+2i)^2 + 3-2i}{(5+i)^2}$ | <i>(Sol: $\frac{73}{169} + \frac{40}{169}i$)</i> |
| e) $\frac{2-5i}{i}$ | <i>(Sol: $-5-2i$)</i> | p) $\frac{(3-2i)(1+i)}{1+i-2i}$ | <i>(Sol: $\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$)</i> |
| f) $\frac{20+30i}{3+i}$ | <i>(Sol: $9+7i$)</i> | q) $\frac{\frac{1+i}{2+i}}{1-i}$ | <i>(Sol: $-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$)</i> |
| g) $\frac{i}{3-2i}$ | <i>(Sol: $-\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$)</i> | r) $\frac{3+2i}{i} - \frac{11+2i}{3+4i}$ | <i>(Sol: $1-i$)</i> |
| h) $\frac{1+i}{i}$ | <i>(Sol: $1-i$)</i> | s) $\frac{10-10i}{i} + \frac{15-25i}{2+i}$ | <i>(Sol: $1-17i$)</i> |
| i) $\frac{1+2i}{2-i}$ | <i>(Sol: i)</i> | t) $\frac{1+ai}{a-i}$ | <i>(Sol: i)</i> |
| j) $\frac{1-i}{2+3i}$ | <i>(Sol: $-\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$)</i> | u) $\frac{-a+bi}{b+ai}$ | <i>(Sol: i)</i> |
| k) $\frac{19-4i}{2-5i} + \frac{3+2i}{i}$ | <i>(Sol: 4)</i> | | |

v) $\frac{2-3i}{2+3i}$

(Sol: $-\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$)

w) $(1+i^{-1})^2 + (i-i^{-1})^2$

(Sol: -4)

11. Calcular el inverso de cada uno de los siguientes complejos:

a) $3i$

(Sol: $-\frac{1}{3}i$)

c) $2+3i$

(Sol: $\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$)

e) $-2+i$

(Sol: $-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$)

b) $1+i$

(Sol: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$)

d) $1-i$

(Sol: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$)

f) i

(Sol: $-i$)

12. Calcular las siguientes potencias sucesivas de i :

a) i^{12}

(Soluc: 1)

h) i^{-3}

(Soluc: i)

b) i^{77}

(Soluc: i)

i) i^{-4}

(Soluc: 1)

c) i^{121}

(Soluc: i)

j) i^{-5}

(Soluc: $-i$)

d) i^{723}

(Soluc: $-i$)

k) i^{-6}

(Soluc: -1)

e) i^{2344}

(Soluc: 1)

l) i^{544}

(Soluc: 1)

f) $i^{-1} = \frac{1}{i}$

(Soluc: $-i$)

m) i^{6254}

(Soluc: -1)

g) $i^{-2} = \frac{1}{i^2}$

(Soluc: -1)

n) i^{-17}

(Soluc: $-i$)

o) i^{-527}

(Soluc: i)

13. Calcular las siguientes operaciones combinadas en forma binómica:

a) $(2+i)^3$

(Soluc: $2+11i$)

k) $\frac{1-(2+3i)^2(1-2i)}{2i^{77}-i^{726}}$

(Soluc: $-\frac{62}{5} + \frac{14}{5}i$)

b) $(1+i)^3$

(Soluc: $-2+2i$)

l) $\frac{(2+3i)(3-2i)-(2-3i)^2}{17(1-i^{13})}$

(Soluc: i)

c) $(2-3i)^3$

(Soluc: $-46-9i$)

m) $-2-5i - \frac{10-10i-5(1+i)}{8+2i-(5+3i)}$

(Soluc: $-5-i$)

d) $(2-3i)^4$

(Soluc: $-119+120i$)

e) i^{-131}

(Soluc: i)

f) $\frac{i^7-1}{1+i}$

(Soluc: -1)

n) $\frac{(2-3i)^2-(2+3i)(3+2i)}{3i^{17}-1}$

(Soluc: $-\frac{17}{5} + \frac{34}{5}i$)

g) $\frac{2i-1}{i^{45}} + \frac{4-3i}{1+2i}$

(Soluc: $4+2i$)

o) $\frac{(3+i)(3+2i)-(2i-3)^2}{2i^{20}-i^{13}} + \frac{4}{5i}$

(Soluc: $\frac{3}{5} + 4i$)

h) $\frac{(\overline{3-2i})^2 + (2+\overline{3i})^2}{i^{12} + i^{-5}}$

(Soluc: $12-12i$)

i) $\frac{(2+3i)(1-i)-(3+4i)^2}{2i^{14}-i^{-7}}$

(Soluc: $-\frac{1}{5} + \frac{58}{5}i$)

j) $\frac{(\overline{3+2i})(\overline{3-i})-(2i-3)^2}{i^{23}-i^{13}}$

(Soluc: $-\frac{9}{2} + 3i$)

14. ¿Cuánto ha de valer m para que el complejo $z=(m-2i)(2+4i)$ sea un número real? ¿E imaginario puro?

↑
↓
¿De qué números se trata? (Soluc: $m=1$ o $m=-4$; $z=10$ y $z=-20i$, respectivamente)

15. Determinar x para que el producto $z=(2-5i)(3+xi)$ sea:

- a) Un número real. ¿Qué número resulta? (Soluc: $x=15/2$; $z=87/2$)
 b) Un número imaginario puro. ¿Qué complejo z se obtiene? (Soluc: $x=-6/5$; $z=-87i/5$)

16. a) Hallar x con la condición de que $(x-2i)^2$ sea un número imaginario puro. (Soluc: $x=\pm 2$)
 b) Ídem con $(3x-2i)^2$ (Soluc: $x=\pm 2/3$)
 c) Ídem con $(2+xi)^2$ (Soluc: $x=\pm 2$)

17. Hallar x e y de modo que $\frac{3-xi}{1+2i} = y+2i$ (Soluc: $x=-16$; $y=7$)

18. Hallar x para que el cociente $\frac{x+3i}{3+2i}$ sea un número imaginario puro. ¿De qué número imaginario se trata? (Soluc: $x=-2$; i)

19. Determinar k para que el cociente $z = \frac{-2+ki}{k-i}$ sea:
 a) Un número real. ¿Qué número resulta? (Sol: $k = \pm\sqrt{2}$; $z = \pm\sqrt{2}$)
 b) Un número imaginario puro. ¿Qué número es? (Sol: $k = 0$; $z = -2i$)

20. Demostrar la siguiente igualdad, obtenida de manera fortuita por el insigne filósofo y matemático alemán *Gottfried Leibniz* (1646-1716):

$$\sqrt{1+\sqrt{3}i} + \sqrt{1-\sqrt{3}i} = \sqrt{6}$$

21. Hallar dos complejos de los que sabemos que su diferencia es un número real, su suma tiene la parte real igual a 1 y su producto es $-7+i$ (Soluc: $3+i$ y $-2+i$)

22. Determinar los valores de a y b para que el complejo $z=a+bi$ satisfaga la ecuación $z^2 = \bar{z}$
 (Soluc: $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = 0$, $z_4 = 1$)

23. Comprobar que los números complejos $2\pm 3i$ verifican la ecuación $x^2-4x+13=0$

24. Hallar una ecuación polinómica cuyas raíces sean:

- a) $1\pm 3i$ (Soluc: $x^2-2x+10=0$)
 b) $5\pm 2i$ (Soluc: $x^2-10x+29=0$)
 c) $2+i$ y $3+5i$ (Soluc: $x^2-(5+6i)x+1+13i=0$)
 d) $\pm i$ (Soluc: $x^2+1=0$)

25. **TEORÍA:** Demostrar que si las raíces complejas de $Ax^2+Bx+C=0$ son $a\pm bi$, entonces:

$$A[(x-a)^2+b^2]=Ax^2+Bx+C$$

(Ayuda: Desarrollar el miembro izquierdo y aplicar las relaciones de Cardano-Vieta)

Forma polar de un complejo:

26. Representar los siguientes complejos, sus opuestos y sus conjugados:

- a) $z_1=3+4i$ b) $z_2=1-i$ c) $z_3=-3+i$ d) $z_4=-2-5i$ e) $z_5=7i$
f) $z_6=-7$ g) i h) $-\sqrt{2}i$

27. Pasar a forma polar los siguientes complejos (se recomienda representarlos previamente, para así elegir correctamente su argumento):

- | | | | |
|----------------------------|--------------------------------------|-------------|---------------------------------------|
| a) $4 + 4\sqrt{3}i$ | (Soluc: 8_{60°) | j) $-i$ | (Soluc: 1_{270°) |
| b) $3 - 3\sqrt{3}i$ | (Soluc: 6_{300°) | k) $3+4i$ | (Soluc: $5_{53^\circ 8'}$) |
| c) $-\sqrt{2} - i$ | (Soluc: $\sqrt{3}_{144^\circ 44'}$) | l) $3-4i$ | (Soluc: $5_{306^\circ 52'}$) |
| d) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ | (Soluc: 2_{225°) | m) $-3+4i$ | (Soluc: $5_{126^\circ 52'}$) |
| e) $\sqrt{3} - i$ | (Soluc: 2_{330°) | n) $-5+12i$ | (Soluc: $13_{112^\circ 37'}$) |
| f) $1+i$ | (Soluc: $\sqrt{2}_{45^\circ}$) | o) $-8i$ | (Soluc: 8_{270°) |
| g) $1-i$ | (Soluc: $\sqrt{2}_{315^\circ}$) | p) 8 | (Soluc: 8_{0°) |
| h) $-1-i$ | (Soluc: $\sqrt{2}_{225^\circ}$) | q) -8 | (Soluc: 8_{180°) |
| i) i | (Soluc: 1_{90°) | r) $3+2i$ | (Soluc: $\sqrt{13}_{33^\circ 41'}$) |
| | | s) $-2-5i$ | (Soluc: $\sqrt{29}_{248^\circ 12'}$) |

28. a) Hallar m para que el número complejo $m+3i$ tenga módulo 5. Justificar gráficamente la solución.
(Soluc: $m=\pm 4$)

b) Hallar m para que su argumento sea 60° (Soluc: $m=\sqrt{3}$)

29. Hallar un número complejo tal que $|z|=3$ e $\text{Im}(z)=-2$. Justificar gráficamente la solución.
(Soluc: $z_1 = \sqrt{5} - 2i$, $z_2 = -\sqrt{5} - 2i$)

30. Hallar un número complejo del 2º cuadrante que tiene por módulo 2 y tal que $\text{Re}(z)=-1$. Expresarlo en forma polar. Justificar gráficamente la solución. (Soluc: $-1 + \sqrt{3}i = 2_{120^\circ}$)

31. Hallar un complejo de argumento 45° tal que sumado a $1+2i$ dé un complejo de módulo 5 (Soluc: $2+2i$)

32. Encontrar un complejo tal que sumándolo con $1/2$ dé otro complejo de módulo $\sqrt{3}$ y argumento 60°

$$\left(\text{Soluc: } \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{3}{2}i \right)$$

33. Pasar a forma binómica (no vale pasar los radianes a grados):

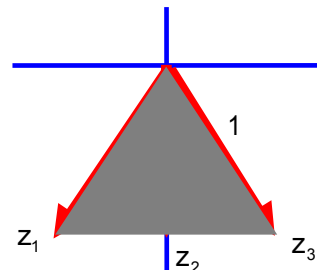
- | | | | |
|-------------------|----------------------------|--------------------|--|
| a) 4_{30° | (Soluc: $2\sqrt{3} + 2i$) | g) 1_{30° | (Soluc: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$) |
| b) 4_{90° | | h) 2_{60° | (Soluc: $1 + \sqrt{3}i$) |
| c) 2_{0° | | i) 6_{225° | (Soluc: $-3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$) |
| d) 5_π | | j) 3_{50° | (Soluc: $\cong (1,928 + 2,298i)$) |
| e) $2_{3\pi/2}$ | | k) 4_{120° | (Soluc: $-2 + 2\sqrt{3}i$) |
| f) 1_{90° | | | |

- l) 2_{150° (Soluc: $-\sqrt{3} + i$)
 m) $3_{\pi/3}$ (Soluc: $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$)
 n) 2_{100° (Soluc: $\cong(0,3473+1,9696i)$)
 o) 2_{180° (Soluc: -2)

- p) $1_{7\pi/6}$ (Soluc: $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$)
 q) $(\sqrt{3})_{5\pi/6}$ (Soluc: $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$)

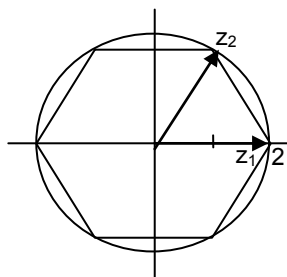
34. Dado el triángulo equilátero de lado 1 de la figura, hallar **razonadamente**, en forma **polar y binómica**, z_1 , z_2 y z_3 :

$$\left(\text{Soluc: } z_1 = 1_{240^\circ} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)_{270^\circ}; z_3 = 1_{300^\circ} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$



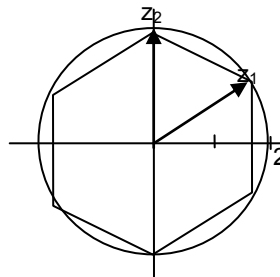
35. Hallar los números complejos, en forma polar y binómica, que corresponden a los vértices de estos hexágonos:

a)



$$(\text{Sol: } z_1=2_{0^\circ}; z_2=2_{60^\circ}=1+\sqrt{3}i; z_3=-z_6; z_4=-z_1; z_5=-z_2; z_6=\bar{z}_2)$$

b)



$$(\text{Sol: } z_1=2_{30^\circ}=\sqrt{3}+i; z_2=2_{90^\circ}=2i; z_3=-z_6; z_4=-z_1; z_5=-z_2; z_6=\bar{z}_1)$$

36. Determinar el valor de **a** para que el complejo $z=(3-6i)(2-ai)$ sea:

- a) Un número real. ¿De qué número se trata? (Sol: $a=-4; 30$)
 b) Un número imaginario puro. ¿De qué número se trata? (Sol: $a=1; -15i$)
 c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1^{er} y 3^{er} cuadrantes. ¿De qué número se trata? (Sol: $a=6; -30-30i$)

37. Determinar el valor de **m** para que el complejo $z = \frac{2-mi}{8-6i}$ sea:

- a) Un número real. ¿Qué número es? (Soluc: $m=3/2; 1/4$)
 b) Imaginario puro. ¿Cuál en concreto? (Soluc: $m=-8/3; i/3$)
 c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes. ¿De qué complejo se trata? (Soluc: $m=14; 1-i$)

38. Determinar el valor de **a** para que el complejo $z=(2+3i)(-2+ai)$ sea:

- a) Un número real. ¿Qué número es? (Soluc: $a=3$)
 b) Un número imaginario puro. ¿De qué número se trata? (Soluc: $a=-4/3$)
 c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1^{er} y 3^{er} cuadrantes. ¿Cuál es? (Soluc: $a=2/5; -26/5-26i/5$)

39. a) Dado $z=2_{45^\circ}$, hallar $\bar{z}$ en polar. (Soluc: 2_{315°)

b) Dado $z=1_{30^\circ}$, hallar $-z$

c) Si $z=2_{150^\circ}$, hallar su conjugado y su opuesto.

d) Hallar un número complejo y su opuesto sabiendo que su conjugado es $\bar{z} = 3_{70^\circ}$

40. Representar razonadamente las siguientes regiones del plano complejo:

- | | |
|---|--|
| a) $\text{Im}(z) = -2$ (Sol: recta horizontal) | g) $-1 \leq z < 3$ (Sol: anillo) |
| b) $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$ (Sol: bisectriz del 1 ^{er} cuadrante) | h) $\text{Arg}(z) = 30^\circ$ (Sol: recta) |
| c) $-1 < \text{Re}(z) \leq 3$ (Sol: banda vertical) | i) $\text{Re}(z) = -3$ (Sol: recta vertical) |
| d) $\text{Im}(z) < 2$ (Sol: semiplano) | j) $ z \geq 4$ |
| e) $ z = 5$ (Sol: circunferencia) | k) $\text{Arg}(z) = 90^\circ$ |
| f) $ z < 3$ (Sol: región circular) | |

41. TEORÍA:

- Demostrar que $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
- Si $z = r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha+180^\circ}$ y $r_{360^\circ-\alpha}$?
- El producto de dos complejos imaginarios, ¿puede ser real? Poner un ejemplo.
- ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?
- ¿Qué condición debe cumplir un número complejo z para que $\bar{z} = \frac{1}{z}$ (Soluc: Su módulo tiene que ser 1)

Producto y cociente en forma polar:

- a) Dados los números complejos 3_{30° y 5_{60° , comprobar que el producto en forma polar y en forma binómica dan el mismo complejo. (Soluc: $15i$)
- b) Ídem con $3i$ y $2-2i$ (Soluc: $6 + 6i = 6\sqrt{2}_{45^\circ}$)
- c) Ídem con el cociente entre 4_{120° y 2_{60° (Soluc: $1 + \sqrt{3}i = 2_{60^\circ}$)

43. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

- | | |
|---|--|
| a) $3_{45^\circ} \cdot 2_{15^\circ}$ (Soluc: $6_{60^\circ} = 3 + 3\sqrt{3}i$) | f) $9_{37^\circ} : 3_{97^\circ}$ (Soluc: $3_{300^\circ} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$) |
| b) $3_{150^\circ} \cdot 4_{45^\circ}$ (Soluc: $12_{195^\circ} \cong -11,59 - 3,11i$) | g) $(2_{40^\circ})^3$ (Soluc: $8_{120^\circ} = -4 + 4\sqrt{3}i$) |
| c) $1_{33^\circ} \cdot 2_{16^\circ} \cdot 3_{41^\circ}$ (Soluc: $6_{90^\circ} = 6i$) | h) $1_{33^\circ} : 2_{16^\circ} \cdot 3_{41^\circ}$ (Soluc: $\left(\frac{3}{2}\right)_{58^\circ} \cong 0,79 + 1,27i$) |
| d) $3_{12^\circ} \cdot 4_{17^\circ} \cdot 2_{1^\circ}$ (Soluc: $24_{30^\circ} = 12\sqrt{3} + 12i$) | i) $3_{12^\circ} : 4_{17^\circ} : 2_{1^\circ}$ (Soluc: $\left(\frac{3}{8}\right)_{354^\circ} \cong 0,37 - 0,04i$) |
| e) $2_{106^\circ} : 1_{61^\circ}$ (Soluc: $2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$) | |

44. El complejo de argumento 80° y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50° . Escribir en forma binómica el otro complejo. (Soluc: $2\sqrt{3} + 2i$)

45. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

- $\frac{2_{15^\circ} \cdot 4_{135^\circ}}{8_{170^\circ}}$ (Soluc: $1_{340^\circ} \cong 0,94 - 0,34i$)
- $\frac{2_{15^\circ} \cdot (1+i)}{2_{-15^\circ} \cdot (1-i)}$ (Soluc: $1_{120^\circ} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$)

c) $(1 + \sqrt{3}i)(1-i)(\sqrt{3}-i)$ (Soluc: $4\sqrt{2} \angle 75^\circ \cong 1,46 + 5,46i$)

d) i^2 (Soluc: $1_{180^\circ} = -1$)

46. Hallar el valor de α para que el producto $3_{\pi/2} \cdot 1_\alpha$ sea:



a) Un número real positivo. ¿De qué número se trata? (Soluc: $\alpha = 3\pi/2$; 3)

b) Un número real negativo. Ídem. (Soluc: $\alpha = \pi/2$; -3)

47. Hallar el valor de α para que el cociente $5_\pi : 3_\alpha$ sea:

a) Un número real positivo. (Soluc: $\alpha = \pi$)

b) Un número real negativo. (Soluc: $\alpha = 0$)

c) Un número imaginario puro con su parte imaginaria positiva. (Soluc: $\alpha = \pi/2$)

d) Un número imaginario puro con su parte imaginaria negativa. (Soluc: $\alpha = 3\pi/2$)

e) “ “ “ situado en la bisectriz del 2º cuadrante. (Soluc: $\alpha = \pi/4$)

48. Sin necesidad de efectuar el producto en binómica, hallar cuánto ha de valer m para que el complejo



$z = (m-2i)(2+4i)$ tenga módulo 10 (Soluc: $m = \pm 1$)

49. Sin necesidad de efectuar el cociente, determinar el valor de a para que el módulo del complejo $z = \frac{a+2i}{1-i}$ sea 2 (Soluc: $a = \pm 2$)

50. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es -8 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es la unidad. (Ayuda: utilizar la forma polar) (Soluc: $z_1 = 4_{120^\circ}$ y $z_2 = 2_{60^\circ}$)



51. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es 4 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es 2 (Soluc: $z_1 = (2\sqrt[3]{4})_{0^\circ}$ y $z_2 = (\sqrt[3]{2})_{0^\circ}$)

52. Interpretar geoméricamente el resultado de multiplicar el complejo $z = a+bi = r_\alpha$ por la unidad imaginaria i . (Soluc: Se trata de una rotación de 90° en el plano complejo)

53. Calcular $\cos 75^\circ$ y $\sin 75^\circ$ mediante el producto $1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ}$ (Soluc: $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)

Potencias en forma polar:

54. Calcular, aplicando el método más apropiado (es decir, operando en polar o en binómica) en cada caso; dar el resultado en forma binómica:

a) $(1+i)^2$ (Soluc: $2i$)

b) $(2-2i)^2$ (Soluc: $-8i$)

c) $(1+i)^3$ (Soluc: $-2+2i$)

d) $(2+3i)^3$ (Soluc: $-46+9i$)

e) $(1-i)^4$ (Soluc: -4)

f) $(-2+i)^5$ (Soluc: $38+41i$)

g) $\frac{(1+i)^2}{4+i}$ (Soluc: $\frac{2}{17} + \frac{8}{17}i$)

h) $\frac{2+i}{(1+i)^2}$ (Soluc: $\frac{1}{2} - i$)

i) $(i^4 + i^{-13})^3$ (Soluc: $-2-2i$)

j) $(1+i)^{20}$ (Soluc: -1024)

k) $(-2-2\sqrt{3}i)^6$ (Soluc: 4096)

l) $\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$ (Soluc: -1)

m) $(4 - 4\sqrt{3}i)^3$ (Soluc: -512)

n) $(-2 + 2\sqrt{3}i)^4$ (Soluc: $-128 + 128\sqrt{3}i$)

o) $(\sqrt{3} - i)^5$ (Soluc: $-16\sqrt{3} - 16i$)

p) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}\right)^3$ (Soluc: $27i$)

q) $(-1+i)^{30}$ (Soluc: $2^{15}i$)

r) $\frac{(-1+i)^2}{(-i+1)^3}$ (Soluc: $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$)

s) $(2 + 2\sqrt{3}i)^4$ (Soluc: $-128 - 128\sqrt{3}i$)

t) $(4 + 4\sqrt{3}i)^4$ (Soluc: $-2048 - 2048\sqrt{3}i$)

u) $(2 + 2\sqrt{3}i)^2$ (Soluc: $-8 + 8\sqrt{3}i$)

v) $(1+i)^5$ (Soluc: $-4-4i$)

w) $(1+2i)^3$ (Soluc: $-11-2i$)

x) $(2+i)^3$ (Soluc: $2+5i$)

y) $(3+3i)^5$ (Soluc: $-972-972i$)

z) $\frac{(\sqrt{3}i+1)^2}{i+\sqrt{3}}$ (Soluc: $-\sqrt{3}+i$)

α) $\frac{(\sqrt{3}i+1)^2}{(1+i)(1-i)}$ (Soluc: $\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}i$)

55. Ídem (más complicados, tipo examen):

a) $\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)^4}{\left(\frac{-9\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2}i\right) \cdot 3i}$ (Soluc: $3_{180^\circ} = -3$)

b) $\frac{(2\sqrt{3} - 2i)^8}{(-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^6}$ (Soluc: $\left(\frac{1}{4}\right)_{30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i$)

c) $\frac{(1-\sqrt{3}i)^3 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)}{(-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i)^2}$ (Soluc: $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$)

d) $\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^2 (-1-i)^4}{(-1-i)^3 i^7}$ (Soluc: $4\sqrt{2}_{135^\circ} = -4 + 4i$)

e) $\frac{(-2\sqrt{3} - 2i)^5}{(-4 + 4\sqrt{3}i)^3 \cdot 2i}$ (Soluc: $1_{240^\circ} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$)

f) $\frac{(-2\sqrt{3} - 2i)^4}{(-1 + \sqrt{3}i)^3 (2+2i)^2}$ (Soluc: $4_{210^\circ} = -2\sqrt{3} - 2i$)

g) $\frac{(2-2\sqrt{3}i)^3}{(-\sqrt{3}+i)^4 \cdot i}$ (Soluc: $4_{210^\circ} = -2\sqrt{3} - 2i$)

h) $\left[\frac{(-\sqrt{3}+i) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)}{-6}\right]^3$ (Soluc: i)

i) $\frac{(\sqrt{3}-i)^4}{(-2+2i)^3 \cdot 3i^{-18}}$ (Soluc: $\cong 0,2277 + 0,0610i$)

j) $\frac{i^{-13} \cdot (1-\sqrt{3}i)^3}{(-i-1)^4 \cdot (-\sqrt{3}-i)}$ (Soluc: $1_{60^\circ} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$)

k) $\frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}{(1-i)^2}$ (Soluc: $1+i$)

56. a) Operar $\frac{(1+2i)(1-2i)}{(2+i)^2}$ en binómica. (Soluc: $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$)

b) Operar en forma polar y pasar (utilizando la calculadora) el resultado a binómica. (Soluc: $\cong 1_{305^\circ 52' 12''}$)

57. Dados los complejos $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 3i$ y $z_3 = 1+i$, calcular las siguientes expresiones, dando el resultado en binómica:

a) $\frac{z_1 + z_2}{z_3}$ b) $z_1 \cdot z_3$ c) $(z_1)^4$ d) $\overline{z_2}$ (Sol: a) $\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$; b) $(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$; c) $-8 + 8\sqrt{3}i$; d) $-3i$)

58. Dado el complejo $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, calcular $z^5 \cdot \bar{z}$ (Soluc: -64)

59. a) Aplicando la fórmula de De Moivre¹, hallar $\sin 3\alpha$ y $\cos 3\alpha$. Comprobar las expresiones obtenidas sustituyendo valores apropiados de α (p.ej. $\alpha=30^\circ$) (Soluc: $\sin 3\alpha=3\sin \alpha-4\sin^3 \alpha$; $\cos 3\alpha=4\cos^3 \alpha-3\cos \alpha$)

b) Ídem para $\sin 4\alpha$ y $\cos 4\alpha$

c) Ídem para las ya conocidas $\sin 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$

Raíces de un n° complejo:

60. Calcular las siguientes raíces (dando el resultado en binómica en aquellos apartados marcados con (*)), y representarlas en el plano complejo:

a) $\sqrt[4]{1+i}$ (Soluc : $\sqrt[4]{2}_{11,25^\circ}$; $\sqrt[4]{2}_{101,25^\circ}$; $\sqrt[4]{2}_{191,25^\circ}$; $\sqrt[4]{2}_{281,25^\circ}$)

b) $\sqrt[3]{1-i}$ (Soluc : $\sqrt[3]{2}_{105^\circ}$; $\sqrt[3]{2}_{225^\circ}$; $\sqrt[3]{2}_{345^\circ}$)

(*) c) $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-\sqrt{3}i}}$ (Soluc : $\sqrt[4]{2}_{60^\circ}$; $\sqrt[4]{2}_{150^\circ}$; $\sqrt[4]{2}_{240^\circ}$; $\sqrt[4]{2}_{330^\circ}$)

d) $\sqrt[3]{\frac{-1+3i}{2-i}}$ (Soluc : $\sqrt[3]{2}_{45^\circ}$; $\sqrt[3]{2}_{165^\circ}$; $\sqrt[3]{2}_{285^\circ}$)

(*) e) $\sqrt[3]{-i}$ (Soluc : i ; $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$)

(*) f) $\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}$ (Soluc : $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-0,97 + 0,26i$; $0,26 - 0,97i$)

(*) g) $\sqrt{i}$ (Soluc : $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$)

h) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ (Soluc : $0,89_{95^\circ}$; $0,89_{215^\circ}$; $0,89_{335^\circ}$)

(*) i) $\sqrt[3]{8i}$ (Soluc : $2i$; $\pm\sqrt{3}+i$)

(*) j) $\sqrt[4]{-1}$ (Soluc : $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$)

(*) k) $\sqrt[3]{8}$ (Soluc : 2 ; $-1 \pm \sqrt{3}i$)

(*) l) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$ (Soluc : $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$; $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$)

m) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$ (Soluc : 2_{100° ; 2_{220° ; 2_{340°)

(*) n) $\sqrt[3]{\frac{8+8i}{1-i}}$ (Soluc : $-2i$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+i$)

o) $\sqrt[4]{-2+2i}$ (Soluc : $\sqrt[4]{8}_{33,75^\circ}$; $\sqrt[4]{8}_{123,75^\circ}$; $\sqrt[4]{8}_{213,75^\circ}$; $\sqrt[4]{8}_{303,75^\circ}$)

(*) p) $\sqrt[4]{-16}$ (Soluc : $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$)

¹ Abraham De Moivre (1667-1754), matemático francés. Como dato curioso, parece ser que al final de sus días predijo exactamente la fecha de su propia muerte: se dio cuenta de que cada día dormía 15 minutos más que el día anterior; a partir de ahí, conjeturó que el descanso eterno le llegaría el día que durmiera durante 24 horas. Ese día aciago, calculado por él mismo, fue el 27 de noviembre de 1754.



q) $\sqrt[5]{-243}$ (Soluc : $3_{30^\circ}; 3_{108^\circ}; 3_{180^\circ}; 3_{252^\circ}; 3_{324^\circ}$)

(*) r) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ (Soluc : $\sqrt{3}+i; -1+\sqrt{3}i; -\sqrt{3}-i; 1-\sqrt{3}i$)

(*) s) $\sqrt[3]{\frac{-1-i}{-1+i}}$

(*) t) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

(*) u) $\sqrt[3]{\frac{-8+8i}{1+i}}$

(*) v) $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-\sqrt{3}i}}$

(*) w) $\sqrt[4]{\frac{-16i}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}}$

x) $\sqrt[3]{-1}$

y) $\sqrt{-36}$

z) $\sqrt[3]{-27}$

a) $\sqrt[6]{729i}$

β) $\sqrt[4]{16_{180^\circ}}$

(*) γ) $\sqrt[4]{\frac{8\sqrt{3}+8i}{-\sqrt{3}+i}}$ (Soluc : $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}+\frac{\sqrt[4]{72}}{2}i; -\frac{\sqrt[4]{72}}{2}+\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i; -\frac{\sqrt[4]{8}}{2}-\frac{\sqrt[4]{72}}{2}i; \frac{\sqrt[4]{72}}{2}-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i$)

(*) δ) $\sqrt[3]{\frac{i^6+i^{-6}}{-2i}}$

61. TEORÍA:

- El número $4+3i$ es la raíz cuarta de un cierto complejo z ; hallar las otras tres raíces.
- ¿Pueden ser $2+i$, $-2+i$, $-1-2i$ y $1-2i$ las raíces cuartas de un complejo? Justificar la respuesta.
- ¿Pueden ser 2_{28° , 2_{100° , 2_{172° , 2_{244° y 2_{316° las raíces de un complejo? ¿De cuál?
- El complejo 3_{40° es vértice de un pentágono regular. Hallar los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.
- Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es $i+i$. Hallar z y las otras raíces cúbicas.

62. a) Hallar las raíces cúbicas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

(Soluc : $1; \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$)

b) Hallar las raíces cuartas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

(Soluc : $\pm 1; \pm i$)

c) Hallar las raíces quintas de la unidad en forma polar, y dibujarlas.

(Soluc : $1_{0^\circ}; 1_{72^\circ}; 1_{144^\circ}; 1_{216^\circ}; 1_{288^\circ}$)

d) Hallar las raíces sextas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas. (Soluc : $\pm 1; \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$)

63. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos. Dibujar los afijos de las raíces:

a) $x^3+8=0$ (Soluc: $-2, 1\pm\sqrt{3}i$)

b) $x^4-16=0$ (Soluc: $\pm 2, \pm 2i$)

c) $ix^4+16=0$

d) $x^4+1=0$ (Soluc: $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}-\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$)

Ejercicio 21

Dados los números complejos $z = 1 - 3i$, $w = -3 + 2i$, $t = -2i$, calcula:

a) zwt

b) $zt - w(t + z)$

c) $\frac{w}{z}t$

d) $\frac{2z - 3t}{w}$

e) $\frac{3z + it}{3}w$

f) $\frac{z^2 - wt^2}{2}$

$$z = 1 - 3i; \quad w = -3 + 2i; \quad t = -2i$$

$$\begin{aligned} \text{a) } zwt &= (1 - 3i)(-3 + 2i)(-2i) = (-3 + 2i + 9i - 6i^2)(-2i) = \\ &= (3 + 11i)(-2i) = -6i - 22i^2 = 22 - 6i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } zt - w(t + z) &= (1 - 3i)(-2i) - (-3 + 2i)(-2i + 1 - 3i) = \\ &= (-2i + 6i^2) - (-3 + 2i)(1 - 5i) = (-6 - 2i) - (-3 + 2i)(1 - 5i) = \\ &= (-6 - 2i) - (-3 + 15i + 2i - 10i^2) = (-6 - 2i) - (7 + 17i) = -13 - 19i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{w}{z}t &= \frac{-3 + 2i}{1 - 3i}(-2i) = \frac{6i - 4i^2}{1 - 3i} = \frac{(4 + 6i)(1 + 3i)}{1^2 - (3i)^2} = \\ &= \frac{4 + 12i + 6i + 18i^2}{1 + 9} = \frac{-14 + 18i}{10} = -\frac{7}{5} + \frac{9}{5}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{2z - 3t}{w} &= \frac{2(1 - 3i) - 3(-2i)}{-3 + 2i} = \frac{2 - 6i + 6i}{-3 + 2i} = \frac{2(-3 - 2i)}{(-3)^2 - (2i)^2} = \\ &= \frac{-6 - 4i}{9 + 4} = -\frac{6}{13} - \frac{4}{13}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{3z + it}{3}w &= \frac{3(1 - 3i) + i(-2i)}{3}(-3 + 2i) = \frac{3 - 9i + 2}{3}(-3 + 2i) = \\ &= \left(\frac{5}{3} - 3i\right)(-3 + 2i) = -5 + \frac{10}{3}i + 9i - 6i^2 = 1 + \frac{37}{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{z^2 - wt^2}{2} &= \frac{(1 - 3i)^2 - (-3 + 2i)(-2i)^2}{2} = \frac{1 - 6i + 9i^2 - (-3 + 2i)(-4)}{2} = \\ &= \frac{-8 - 6i - 12 + 8i}{2} = \frac{-20}{2} + \frac{2}{2}i = -10 + i \end{aligned}$$

Ejercicio 22

Halla el valor de b para que el producto $(3 - 6i)(4 + bi)$ sea un número:

a) Imaginario puro.

b) Real.

$$(3 - 6i)(4 + bi) = 12 + 3bi - 24i + 6b = (12 + 6b) + (3b - 24)i$$

a) $12 + 6b = 0 \rightarrow b = -2$

b) $3b - 24 = 0 \rightarrow b = 8$

Ejercicio 23

Calcula x para que el resultado del producto $(x + 2 + ix)(x - i)$ sea un número real.

$$\begin{aligned}(x + 2 + ix)(x - i) &= x^2 - xi + 2x - 2i + x^2i - xi^2 = \\ &= x^2 - xi + 2x - 2i + ix^2 + x = (x^2 + 3x) + (x^2 - x - 2)i\end{aligned}$$

Para que sea real, ha de ser:

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 24

Calcula y representa gráficamente el resultado:

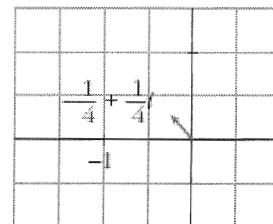
a) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

b) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}}$

a) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}_{315^\circ}}{2_{30^\circ}}\right)^3 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{285^\circ}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{855^\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135^\circ} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$



b) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}} = \sqrt[3]{\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}} = \sqrt[3]{\frac{1+3i}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i} =$

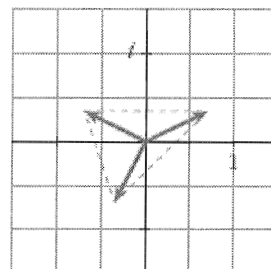
$$= \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71^\circ 34'}} = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{(71^\circ 34' + 360^\circ k)/3} = \sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{23^\circ 51' + 120^\circ k}; k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{23^\circ 51'} = 0,785 + 0,347i$$

$$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{143^\circ 51'} = -0,693 + 0,56i$$

$$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{263^\circ 51'} = -0,092 - 0,853i$$



Ejercicio 25

Calcula y representa las soluciones:

a) $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i}$

b) $\sqrt[4]{-16}$

c) $\sqrt[3]{8i}$

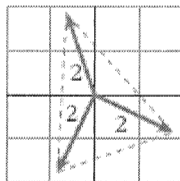
a) $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i} = \sqrt[3]{8_{300^\circ}} = 2_{(300^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{100^\circ + 120^\circ k}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{100^\circ} = -0,35 + 1,97i$

$2_{220^\circ} = -1,53 - 1,26i$

$2_{340^\circ} = 1,88 - 0,68i$



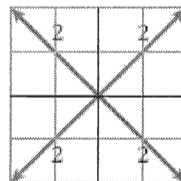
Ejercicio 26

b) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{45^\circ + 90^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ $2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

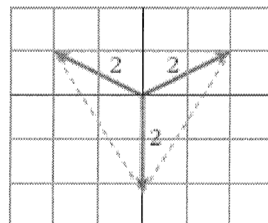
$2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ $2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$



c) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{30^\circ + 120^\circ k}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i$ $2_{150^\circ} = -\sqrt{3} + i$ $2_{270^\circ} = -2i$



Ejercicio 27

Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\pi/3$, y la suma de sus módulos 8.

☛ Llámalos r_α y s_β y escribe las ecuaciones que los relacionan:

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = 3_{0^\circ} \quad (0^\circ \text{ es el argumento del cociente, } \alpha - \beta = 0^\circ); \quad r + s = 8 \quad \text{y} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}.$$

$$\frac{r}{s} = 3$$

$$r + s = 8$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha - \beta = 0^\circ$$

Hallamos sus módulos:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = 3s \\ 3s + s = 8; \quad 4s = 8; \quad s = 2; \quad r = 6 \end{array}$$

Hallamos sus argumentos:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \\ \alpha - \beta = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha = \beta; \quad 2\beta = \frac{\pi}{3}; \quad \beta = \frac{\pi}{6}; \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \end{array}$$

Los números serán: $6_{\pi/6}$ y $2_{\pi/6}$

Ejercicio 28

El producto de dos números complejos es -8 y el primero es igual al cuadrado del segundo. Calcúlalos.

$$\left. \begin{array}{l} z \cdot w = -8 \\ z = w^2 \end{array} \right\} w^3 = -8$$

$$w = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{60^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Hay tres soluciones:

$$w_1 = 2_{60^\circ} \rightarrow z_1 = 4_{120^\circ}$$

$$w_2 = 2_{180^\circ} \rightarrow z_2 = 4_{0^\circ} = 4$$

$$w_3 = 2_{300^\circ} \rightarrow z_3 = 4_{600^\circ} = 4_{240^\circ}$$

Ejercicio 29

De dos números complejos sabemos que:

- Tienen el mismo módulo, igual a 2.
- Sus argumentos suman $17\pi/6$.
- El primero es opuesto del segundo.

¿Cuáles son esos números?

Llamamos a los números: $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$

Tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} r = s = 2 \\ \alpha + \beta = \frac{17\pi}{6} \end{array} \right\} \rightarrow 2\alpha = \frac{17\pi}{6} + \pi \rightarrow \alpha = \frac{23}{12}\pi \rightarrow \beta = \frac{23}{12}\pi - \pi = \frac{11}{12}\pi$$

Por tanto, los números son: $1_{23\pi/12}$ y $2_{11\pi/12}$; o bien $1_{11\pi/12}$ y $2_{23\pi/12}$

Ejercicio 30

Halla dos números complejos conjugados cuya suma es 8 y la suma de sus módulos es 10.

$$\left. \begin{array}{l} z + \bar{z} = 8 \\ |z| + |\bar{z}| = 10 \end{array} \right\} \text{ Como } |z| = |\bar{z}| \Rightarrow |z| = 5$$

Si llamamos:

$$z = a + bi \rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = 8 \rightarrow a = 4$$

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + b^2} = 5 \rightarrow 16 + b^2 = 25 \rightarrow$$

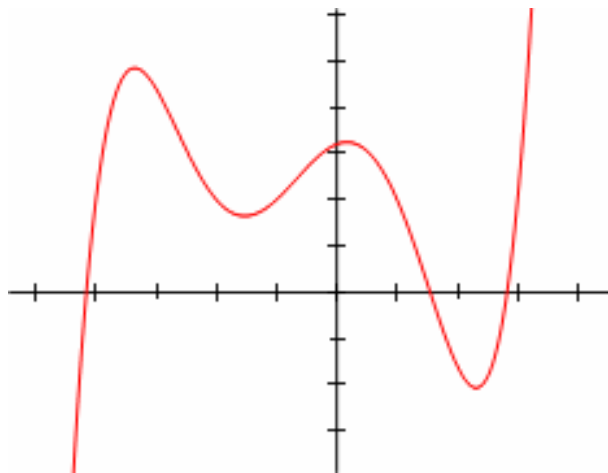
$$\rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Hay dos soluciones:

$$z_1 = 4 + 3i \rightarrow \bar{z}_1 = 4 - 3i$$

$$z_2 = 4 - 3i \rightarrow \bar{z}_2 = 4 + 3i$$

FUNCIONES



MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato CCNN

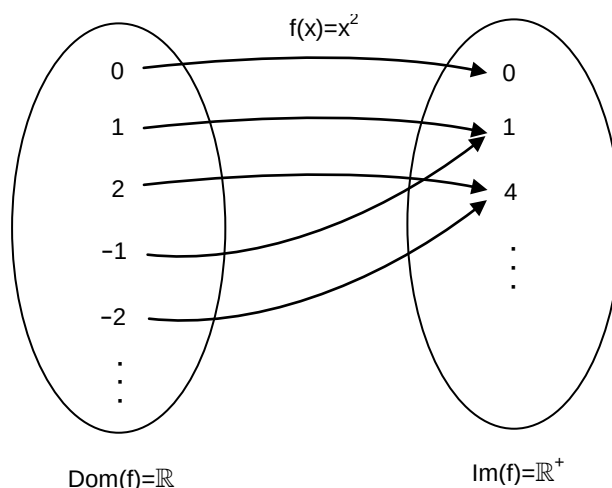


**Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas**

I) CONCEPTO DE FUNCIÓN. DEFINICIONES

Ejemplo 1: Considerar la función $y=f(x)=x^2$

Podemos estudiar su comportamiento utilizando un diagrama de conjuntos o diagrama de Venn¹:



Ahora bien, en la práctica lo anterior se suele indicar más bien mediante tabla de valores:

x		-2	-1	0	1	2	3	
$f(x)=x^2$		4	1	0	1	4	9	

(NOTA: más adelante veremos que esta función se trata de una parábola...)

Por ejemplo, se dice que la imagen de 3 a través de la función anterior es 9, y se designa como $f(3)=9$

¡Muy importante!: **Para que una función esté bien definida, cada x no puede tener más de una imagen.**

Definiciones:

« Una función es una aplicación entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento –llamado x, o variable independiente– del conjunto inicial le corresponde un único elemento a lo sumo –llamado imagen de x, o $f(x)$ – del conjunto final ».

Como acabamos de indicar, x se llama **variable independiente**, mientras que $y=f(x)$ es la **variable dependiente** (ya que, obviamente, depende de x).

$f(x)$ se llama **imagen** de x, mientras que x se llama **antiimagen** de $f(x)$. En el ejemplo anterior, la antiimagen de $y=9$ sería $x=\pm 3$.

Dominio de definición de la función: « Es el conjunto formado por todos los x para los que existe imagen »; se suele designar como $\text{Dom}(f)$, o $\text{Dom}f(x)$, etc. En el ejemplo anterior sería, lógicamente, $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$, como se indica en el propio diagrama de conjuntos.

¹ Introducidos en 1880 por el matemático y filósofo británico John Venn (1834-1923)

Imagen o Recorrido de la función: «Es el conjunto formado por todas las imágenes $f(x)$ posibles que recorre la función»; se puede designar como $\text{Im}(f)$, o $R(f)$, etc. En el ejemplo anterior sería, lógicamente, $\text{Im}(f)=\mathbb{R}^+$, como también se indica en el diagrama.

Por tanto, la definición completa y exhaustiva de esta función sería:

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longrightarrow & f(x)=x^2 \end{array}$$

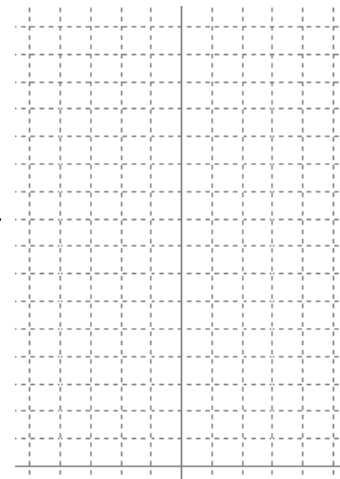
pero en la práctica, por comodidad, se suele abreviar diciendo simplemente $f(x)=x^2$

Ejercicios final tema: 1 y 2

II) GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Ejemplo 2: Construir la gráfica de $f(x)=x^2$ mediante tabla de valores.

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$f(x)=x^2$	...												...



Definición: «La gráfica de una función $y=f(x)$ está formada por los ∞ puntos (x,y) que verifican la expresión $y=f(x)$ ».

Observaciones:

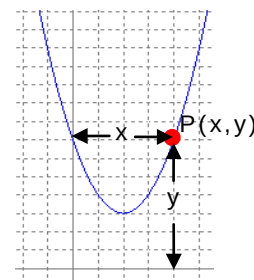
1º) Podemos obtener gráficamente el $\text{Dom}(f)$ si nos desplazamos imaginariamente de izquierda a derecha a lo largo del eje x y vamos viendo -hacia arriba o hacia abajo- cuándo existe imagen, es decir, cuándo hay gráfica.

De la misma forma, podemos obtener el $\text{Im}(f)$ a partir de la gráfica si nos vamos desplazando imaginariamente a lo largo del eje y de abajo a arriba y vamos viendo -a izquierda y derecha- cuándo existe antiimagen(es), es decir, cuándo hay gráfica.

2º) El hecho de que un mismo x no pueda tener más de una imagen se traduce gráficamente en que «**Toda recta vertical que se desplace imaginariamente a lo largo de la gráfica sólo puede cortar a ésta a lo sumo en un punto**»².

3º) Es importante tener en cuenta qué es x e y en una gráfica (ver dibujo):

Dado un punto $P(x,y)$,
la abscisa x es la distancia (>0 o <0) al eje y
la ordenada y es la altura (distancia al eje x , >0 o <0)



Ejemplo 3: Dada $f(x)=\sqrt{x}$, se pide: **a)** Representarla gráficamente.

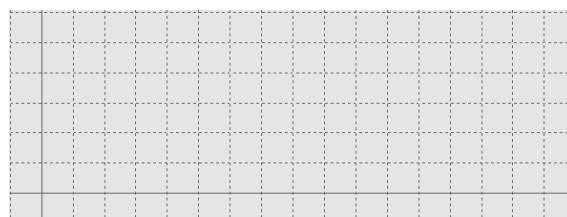
b) Deducir su $\text{Dom}(f)$ e $\text{Im}(f)$ a la vista de lo anterior.

x															
$f(x)=\sqrt{x}$															



$\text{Dom}(f)=$

$\text{Im}(f)=$



² En cambio, una recta horizontal que se desplace imaginariamente por la gráfica puede cortar a ésta en varios puntos, lo que corresponde al hecho de que un mismo $f(x)$ puede tener varias antiimágenes ... (como ocurre en el ejemplo 2)

Ejercicios final tema: 3 a 6

III) CÁLCULO DEL Dom(f) DE LAS FUNCIONES MÁS HABITUALES

Vamos a ver una serie de "recetas" para deducir el dominio de definición de una función a partir exclusivamente del tipo de expresión analítica, es decir, sin necesidad de dibujar su gráfica previamente.

III.1) Función polinómica: «Dom[f(x) polinómica]= $\mathbb{R}$ »

La explicación es obvia: recordemos que el dominio de una función está formado por todos los x para los que existe imagen, y es evidente que, sea cual sea el polinomio, siempre va a existir imagen $\forall x \in \mathbb{R}$.

III.2) Función racional: Recordar que una función racional es toda aquella que se puede expresar como un cociente, es decir, una función del tipo $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

Pues bien, es obvio que para una función tal existirá imagen siempre que el denominador no se anule; por lo tanto: «El Dom(f) de una función racional está formado por todos los x para los que no se anula el denominador». Expresado en lenguaje matemático:

$$\text{Dom} \left[f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \right] = \{ x / h(x) \neq 0 \}$$

En la práctica, esto se traduce en ver cuándo se anula la expresión del denominador, es decir, resolver una ecuación; aquellos x que sean raíces del denominador tendremos que excluirlas del dominio:

Ejemplo 4: Obtener, razonadamente, el Dom(f) de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \frac{2}{x-4}$ (Sol: Dom(f)= $\mathbb{R}-\{4\}$)

b) $f(x) = \frac{2}{x^2-4}$ (Sol: Dom(f)= $\mathbb{R}-\{\pm 2\}$)

c) $f(x) = \frac{2}{x^2+4}$ (Sol: Dom(f)= $\mathbb{R}$)

III.3) Función irracional: Recordar que una función irracional es aquella en la que la x figura dentro de una raíz.

En este tipo de funciones es evidente que, si el índice de la raíz es par, entonces existirá imagen siempre que el radicando sea ≥ 0 ; ahora bien, si el índice es impar, no hay ningún problema en que el radicando sea negativo. Por lo tanto: «El Dom(f) de una función irracional de índice par está formado por todos los x para los que su radicando es ≥ 0 ». Expresado en lenguaje matemático:

$$\text{Dom} \left[f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \right] = \{ x / g(x) \geq 0 \}$$

En la práctica, esto se traduce en resolver una inecuación:

Ejemplo 5: Obtener, razonadamente, el Dom(f) de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x) = \sqrt{x-9}$

(Sol: $\text{Dom}(f)=[9, \infty)$)

b) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

(Sol: $\text{Dom}(f)=(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$)

c) $f(x) = \sqrt[4]{x^2-4x+3}$

(Sol: $\text{Dom}(f)=(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$)

d) $f(x) = \sqrt{x^2+9}$

(Sol: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$)

e) $f(x) = \sqrt[3]{x-9}$

(Sol: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$)

f) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

(Sol: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$)

NOTA: Para hallar también analíticamente el $\text{Im}(f)$ habría que obtener, previamente, la inversa de $f(x)$ –como veremos en el apartado VIII–, y hallar a continuación el dominio de ésta; como ello puede resultar complicado, se recomienda preferiblemente hallar el $\text{Im}(f)$ gráficamente.

Ejercicios final tema: 7 y 8

IV) PROPIEDADES QUE SE DEDUCEN DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

IV.1) Continuidad: «Una función es continua si puede dibujarse su gráfica sin levantar el lápiz del papel³. En caso contrario, se dice que es discontinua»

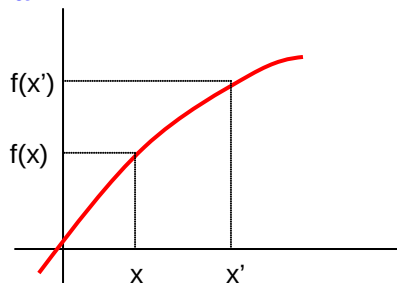
³ En el tema 8 (Límites y continuidad) veremos una definición más formal de continuidad, que nos permitirá, además, obtener la continuidad de una función sin tener que representarla. De momento, nos contentaremos con esta definición "intuitiva", a partir de la gráfica.

¡IMPORTANTE!: La continuidad se indica siempre respecto al eje x.

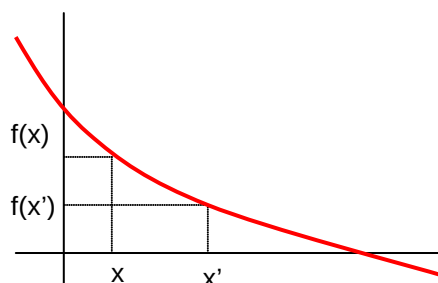
Ejercicio final tema: 9

IV.2) Crecimiento y decrecimiento. M y m:

Idea intuitiva:



FUNCIÓN CRECIENTE



FUNCIÓN DECRECIENTE

Def: « Una función es **creciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple que, a medida que aumentan las x, aumentan también las imágenes f(x) correspondientes».

« Una f(x) es **decreciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple que, a medida que aumentan las x, disminuyen las imágenes f(x) correspondientes».

Más formalmente:

f(x) es **creciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$

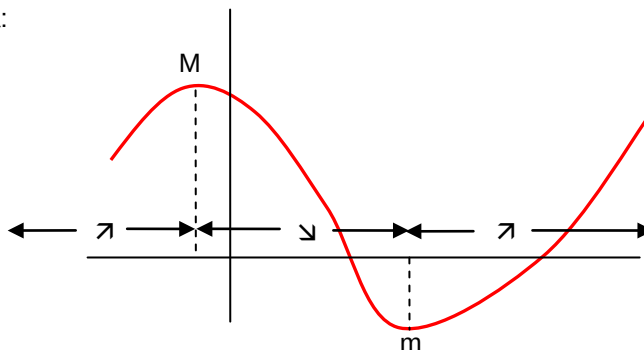
f(x) es **decreciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

Observaciones:

1º) Para indicar que una función es creciente utilizaremos el símbolo ↗, y ↘ si es decreciente.

2º) En el caso de una función constante, la definición sería: $x < x' \Rightarrow f(x) = f(x')$

- En general, las funciones no son siempre crecientes o siempre decrecientes, sino que presentan intervalos de crecimiento o monotonía:



Def: « Una función presenta un **máximo** (M) en un punto si en las proximidades de dicho punto pasa de forma continua de creciente (↗) a decreciente (↘) ».

« Una función presenta un **mínimo** (m) en un punto si en las proximidades de dicho punto pasa de forma continua de decreciente (↘) a creciente (↗) ».

Más formalmente:

$f(x)$ tiene un M en $x=a$ si en todos los x próximos a ese punto se verifica $f(x)<f(a)$

$f(x)$ tiene un m en $x=a$ si en todos los x próximos a ese punto se verifica $f(x)>f(a)$

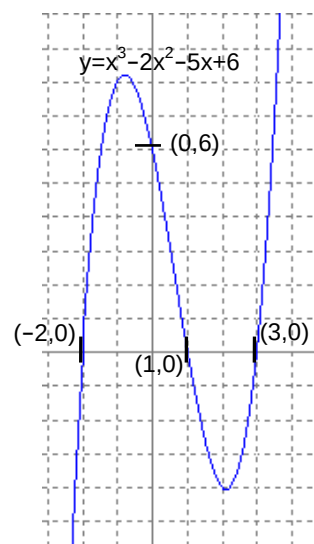
Observaciones:

- 1º) Los intervalos de crecimiento, también llamados de monotonía, se indican respecto al eje x .
- 2º) Los M y m que hemos definido se llaman extremos relativos⁴.
- 3º) Cuando veamos el último tema (Derivadas), veremos una forma rápida y cómoda de obtener los intervalos de crecimiento y los extremos relativos, no gráfica sino analíticamente.
- 4º) Puede haber varios M o m , no haber, o infinitos.
- 5º) Si la $f(x)$ es continua, entre dos M siempre hay un m , y viceversa.
- 6º) Nótese que, por ejemplo, si $f(x)$ es ↗ a la izquierda de un punto y ↘ a la derecha, pero no es continua en dicho punto, no podemos decir que hay un M en dicho punto. Lo mismo es aplicable a un m .

Ejercicio final tema: 10

IV.3) Cortes con los ejes:

Observando la siguiente gráfica ejemplo:



es fácil entender la forma de obtener analíticamente –es decir, sin necesidad de dibujar previamente su gráfica– los puntos donde una función corta a los ejes de coordenadas, y que se resume en la siguiente tabla:

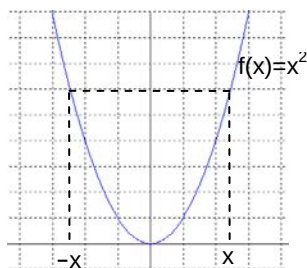
CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	Haciendo $y=0$ (Supone resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	Sustituyendo $x=0$	uno o ninguno

Ejercicio final tema: 11 y 12

⁴ El máximo y mínimo que estamos definiendo se llaman extremos relativos o locales; el próximo curso los definiremos más formalmente, y también veremos que hay extremos absolutos...

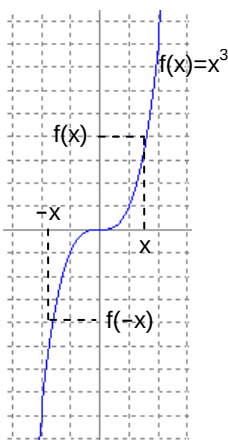
IV.4) Simetría:

a) $f(x)$ PAR:



$$f(-x)=f(x) \Rightarrow f(x) \text{ simétrica respecto al eje } y \quad [f(x) \text{ SIMÉTRICA PAR}]$$

b) $f(x)$ IMPAR:



$$f(-x)=-f(x) \Rightarrow f(x) \text{ simétrica respecto al origen} \quad [f(x) \text{ SIMÉTRICA IMPAR}]$$

Observaciones:

1º) En la práctica, para ver si una función es simétrica a priori, es decir, sin necesidad de representarla gráficamente, tenemos que hallar $f(-x)$, es decir, reemplazar x por $-x$ (¡utilizando, cuando sea necesario, paréntesis!), y simplificar la expresión resultante; a continuación, tenemos que ver si $f(-x)$ corresponde a alguno de los siguientes tres casos:

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \Rightarrow \text{PAR} \\ -f(x) & \Rightarrow \text{IMPAR} \\ \text{ninguno de los anteriores} & \Rightarrow \text{no es simétrica} \end{cases}$$

2º) Existen más tipos de simetría, pero nosotros este curso sólo vamos a ver estos dos.

3º) Una función no tiene por qué ser siempre simétrica; de hecho, la mayoría de las funciones no lo son.

4º) **Utilidad de advertir** a priori –sin necesidad de hacer previamente una tabla de valores para dibujar su gráfica– **si una función es simétrica:** en caso de ser simétrica, podemos dedicar nuestros esfuerzos a la parte positiva del eje x , y dibujar cómodamente su mitad negativa sabiendo que será simétrica...

Por ejemplo, si una función es par y presenta un $M(2,5)$, necesariamente tendrá otro en $M(-2,5)$; ahora bien, si fuera impar, lo que presentaría es un $m(-2,-5)$.

5º) Se utiliza el adjetivo "par" porque la función simétrica par típica es $y=x^2$, es decir, con exponente par (también tendría la misma simetría $y=x^4$, $y=x^2-2x^6$, etc.). De la misma forma, la función impar por antonomasia es $y=x^3$.

Ejercicio final tema: 13 a 16 (Simetría)

17 y 18 (Estudio completo de una función)

V) TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

FUNCIÓN ORIGINAL	TIPO DE TRANSFORMACIÓN	FUNCIÓN TRANSFORMADA	GRÁFICA	RESULTADO
	TRASLACIONES	$y=f(x)\pm k$		TRASLACIÓN hacia ARRIBA
				TRASLACIÓN hacia ABAJO
		$y=f(x\pm k)$		TRASLACIÓN hacia la IZQUIERDA
				TRASLACIÓN hacia la DERECHA
	CONTRACCIONES o EXPANSIONES	$y=k \cdot f(x)$	$k>1$ 	CONTRACCIÓN
			$0<k<1$ 	EXPANSIÓN
			$-1<k<0$ 	(Reflexión +) EXPANSIÓN
			$k<-1$ 	(Reflexión +) CONTRACCIÓN
	REFLEXIONES	$y=-f(x)$		REFLEXIÓN respecto al EJE X
		$y=f(-x)$		REFLEXIÓN respecto al EJE Y

Ejercicios final tema: 19 y 20

VI) ALGUNOS CASOS PARTICULARES DE FUNCIONES

VI.1) Hipérbolas⁵: Son curvas cuya expresión es de la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde $c \neq 0$

Ejercicio final tema: 21 y 22

A la vista de los ejercicios anteriores, para representar una hipérbola ya no es necesario hacer una tabla de valores, sino seguir los siguientes pasos:

1º) CORTES EJES: $x=0 \Rightarrow$

$y=0 \Rightarrow$

2º) ASÍNTOTAS:

A.H: $y = \frac{a}{c}$

A.V: $cx+d=0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$

VI.2) Función "parte entera" $f(x)=\text{Ent}(x)$

«Es la función que asocia a cada x el entero más próximo situado a su izquierda en la recta real».

Por ejemplo: $\text{Ent}(5,3)=5$

$\text{Ent}(5)=5$

$\text{Ent}(-4,7)=-5$

$\text{Ent}(-3)=-3$

etc...

Gráfica de la función $\text{Ent}(x)$: **Ejercicio final tema: 23**

VI.3) Funciones a trozos

Para obtener la gráfica de una función definida a trozos, también llamada definida por ramas, hay que representar cada rama en su dominio particular de definición, como puede observarse en los siguientes ejercicios:

Ejercicio final tema: 24 y 25

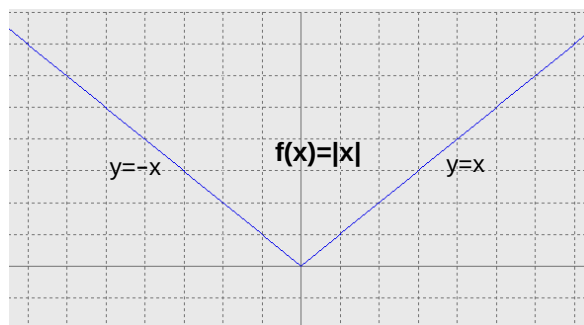
⁵ En realidad las hipérbolas que aquí definimos se llaman hipérbolas equiláteras; el caso más general se verá en el apdo. VIII.

VI.4) Función valor absoluto:

Definición:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

REPRES. GRÁFICA



NOTA: Compruébese que $|x| = \sqrt{x^2}$.

Conviene tener en cuenta las **propiedades del valor absoluto**:

1º) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

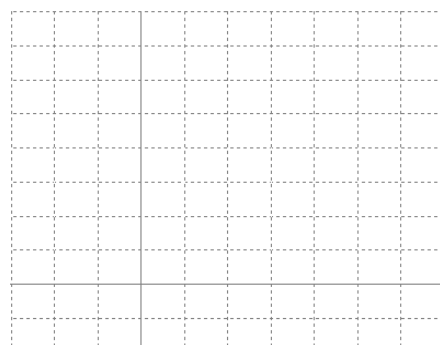
2º) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{|A|}{|B|}$$

3º) $|A - B| = |B - A|$

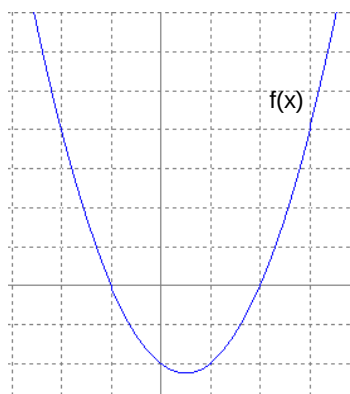
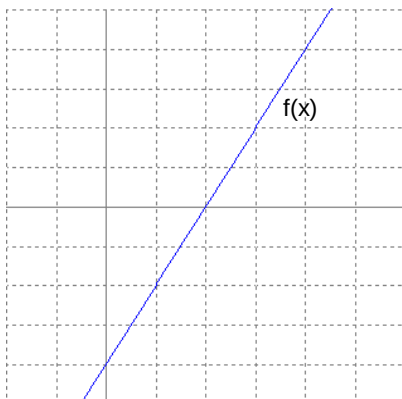
¡Ojo! En general, $|A + B| \neq |A| + |B|$

Ejemplo 6: Representar $f(x) = |2x - 4|$ y expresarla como función definida a trozos.

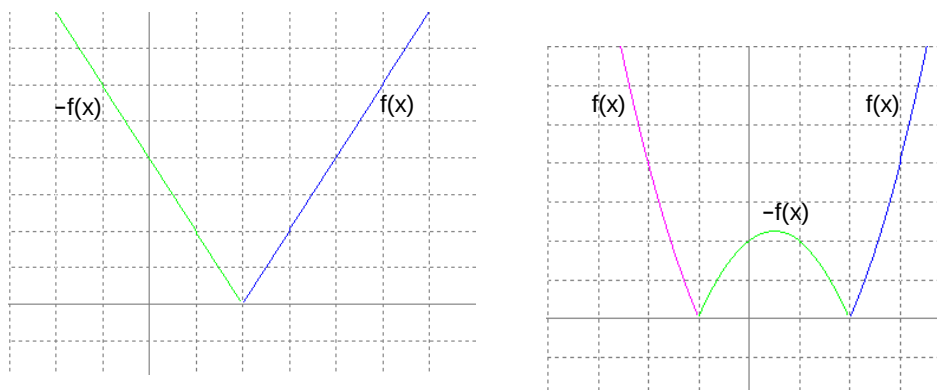


Conclusión: Pasos a seguir para representar $|f(x)|$:

1º) Representar $f(x)$:



2º) Las partes positivas (i.e. por encima del eje x) de $f(x)$ se dejan igual, y las negativas se reflejan respecto al eje x:



Por lo tanto, la clave a la hora de **dibujar $|f(x)|$** es **ver cuándo se anula la función del interior del valor absoluto -es decir, $f(x)$ -, y reflejarla en los intervalos convenientes.**

Ejercicios final tema: 26 a 28

VII) COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. FUNCIÓN INVERSA

Supongamos $\left. \begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix} \right\}$

Se define:

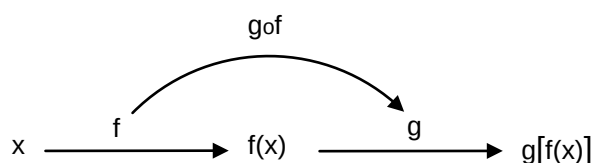
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \text{introducir } f \text{ en } g$$

Se lee "f compuesta con g"

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \text{introducir } g \text{ en } f$$

Se lee "g compuesta con f"

Más en detalle:



Ejemplo 7: Sean

$$\left. \begin{matrix} f(x) = x^2 + 1 \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{matrix} \right\}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] =$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] =$$

introducir g en f

introducir f en g

Ejercicios final tema: 29 y 30

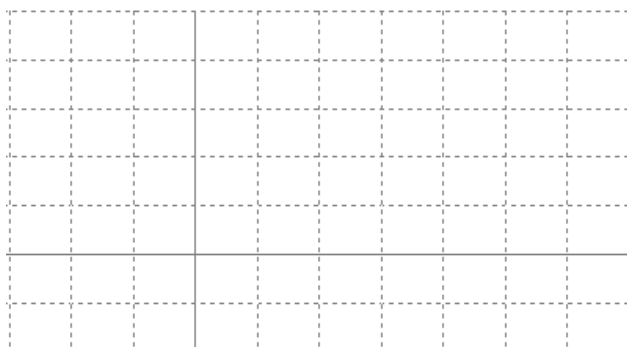
¿Para qué se define todo esto? Para entender el concepto de **función inversa**:

«Cuando dos funciones son tales que al componerlas entre sí se neutralizan (es decir, se obtiene x), entonces se dice que son inversas entre sí».

Notación: «A la función inversa de f se le denomina f^{-1} ».

Ejemplo 8: Comprobar que $\left. \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ f^{-1}(x) = x^2 \end{array} \right\}$ son inversas: $(f \circ f^{-1})(x) =$
 $(f^{-1} \circ f)(x) =$

Representarlas gráficamente sobre los mismos ejes, y sacar conclusiones:



Conclusiones:

1º) Se llama función inversa de f , y se designa como f^{-1} , a otra función que verifica:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

2º) «La gráfica de f^{-1} se obtiene a partir de la de f intercambiando la x y la $y \Rightarrow$ las gráficas de f^{-1} y f son simétricas respecto a la recta $y=x$, bisectriz del 1º cuadrante».

Ejercicio final tema: 31

Método para hallar analíticamente la función inversa de otra: 1º) Intercambiar x y y

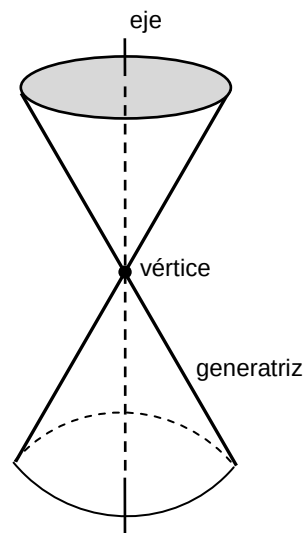
2º) Despejar la nueva y

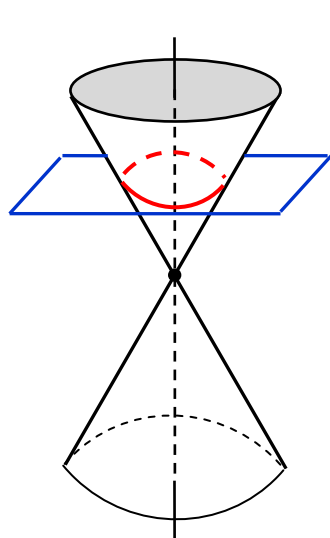
Ejercicio final tema: 32 (Problemas de aplicación: 33 a 42)

VIII) CÓNICAS

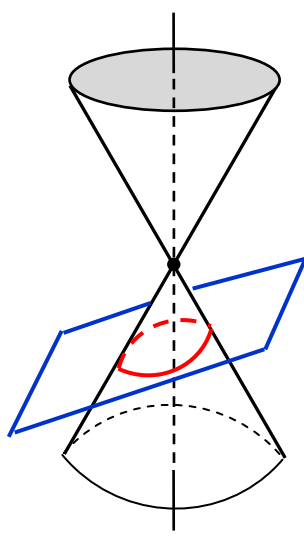
Si giramos una recta (llamada **generatriz**) alrededor de un eje, se obtiene la superficie cónica de la figura, formada por dos conos opuestos por el vértice.

Si dicha superficie es cortada por un plano en diferentes posiciones se obtendrá toda una variedad de cónicas, que se pueden concretar básicamente en 4 casos:

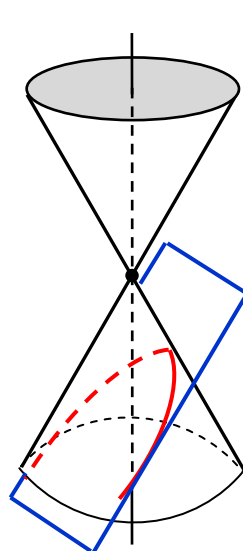




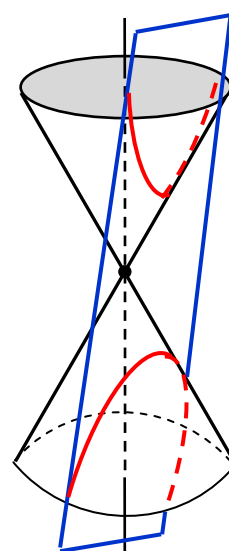
CIRCUNFERENCIA



ELIPSE



PARÁBOLA



HIPÉRBOLA

Todo ello se puede resumir en la siguiente tabla:

CÓNICAS CERRADAS	CIRCUNFERENCIA		El plano que corta es $\perp$ al eje (y no pasa por el vértice)	Si el plano pasa por el vértice, la cónica degenerada es UN PUNTO
	ELIPSE		El plano que corta es oblicuo al eje y corta a todas las generatrices (y no pasa por el vértice)	
CÓNICAS ABIERTAS	PARÁBOLA		El plano que corta es $\parallel$ a una de las generatrices -por lo tanto corta a un solo cono- (y no pasa por el vértice)	Si el plano pasa por el vértice, la cónica degenerada es UNA RECTA
	HIPÉRBOLA		El plano corta a los dos conos (y no pasa por el vértice)	Si el plano pasa por el vértice, la cónica degenerada son DOS RECTAS

Reseña histórica:

Apolonio de Perga (Asia Menor, ca. 262–190 a.C.), discípulo de Euclides, descubrió y estudió con detalle las cónicas en su famosa obra homónima, en la que define estas curvas como secciones de un cono. De hecho, inventó los términos elipse, hipérbola y parábola. Sin embargo, parece ser que **Menecmo**, un matemático de la escuela platónica, del siglo IV a.C. pudo haberlas descubierto antes.

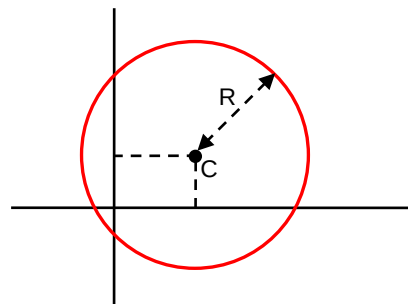
En el siglo XVII empezaron a definirse las cónicas como lugares geométricos en el plano, en vez de como secciones de un cono, que era la definición tradicional de Apolonio. El francés **Pierre Fermat** (1601-1655) fue el primero en utilizar coordenadas, en su caso oblicuas, lo cual le ayudó a obtener ecuaciones de elipses, hipérbolas, etc.. El inglés **John Wallis** (1616-1703) dedujo las ecuaciones de las cónicas en 1655 catalogándolas como curvas de 2º grado en x e y , y probó propiedades de las cónicas mediante ecuaciones.

Veamos a continuación sucintamente las ecuaciones de estas curvas:

VIII.1) Circunferencia:

Su ecuación es de la forma⁶: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Ejercicio final tema: 43



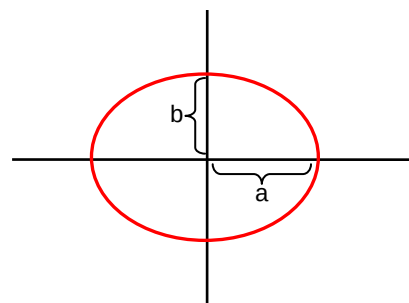
VIII.2) Elipse:

La ecuación reducida (i.e. centrada en los ejes) de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde **a**: semieje mayor

b: semieje menor



Nótese que la circunferencia es un caso particular de la elipse.

Ejercicios final tema: 44 y 45

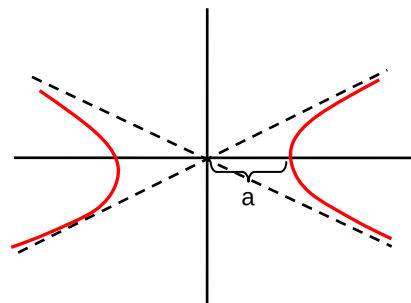
VIII.3) Hipérbola:

La ecuación reducida (i.e. centrada en los ejes) de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde **a**: distancia de un vértice al origen

Nótese que la hipérbola tiene dos asíntotas⁷.



Ejercicio final tema: 46

VIII.1) Parábola: Ya hemos visto repetidamente a lo largo del tema que toda curva de 2º grado es una parábola, y viceversa:

$$y = ax^2 + bx + c$$

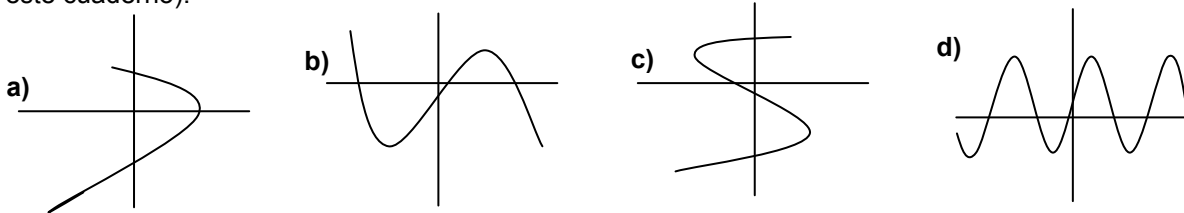
⁶ En realidad, para que se trate de una circunferencia, los coeficientes A, B y C deben cumplir una determinada relación, la cual por cierto nos permite conocer el centro C y el radio R de la circunferencia; pero todo ello excede los contenidos del presente curso...

⁷ Si éstas son $\perp$, entonces la hipérbola se llama equilátera, y su ecuación es de la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; estas son precisamente las hipérbolas que habíamos visto en el apartado VI.1.

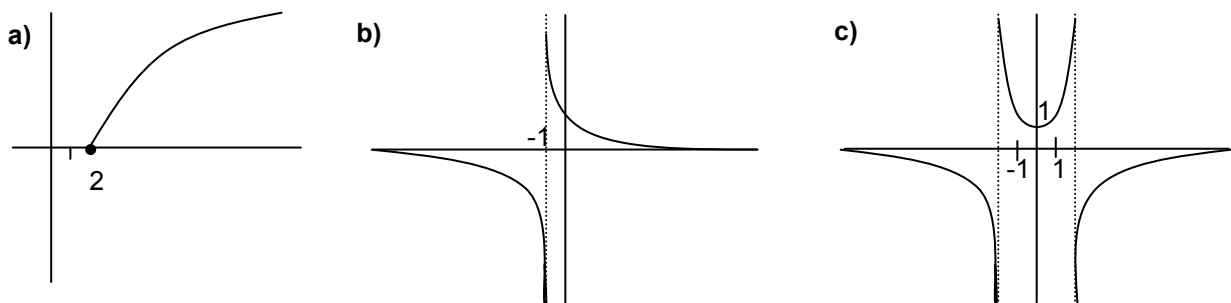
46 EJERCICIOS de FUNCIONES

Concepto de función:

- Dada $f(x) = \sqrt{x}$, se pide:
 - Razonar que se trata de una función.
 - Calcular $f(4)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(-9)$, $f(1/4)$, $f(2)$ y $f(\sqrt{2})$
 - Hallar la antiimagen de 3, de 25 y de -4
 - Razonar cuál es su $\text{Dom}(f)$ e $\text{Im}(f)$
- Ídem para $f(x) = 2x + 1$
- ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta, en este cuaderno):

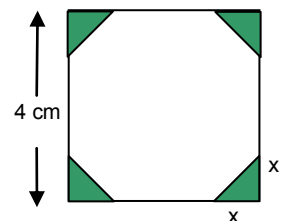


- ¿Cuál es el $\text{Dom}(f)$ e $\text{Im}(f)$ de cada una de estas funciones? (responder en este cuaderno):



- De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x .

- Escribir el área del octógono que resulta, en función de x (Sol: $A(x) = 16 - 2x^2$)
- ¿Cuál es el dominio y recorrido de esa función? (Sol: $\text{Dom}(f) = [0, 2]$; $\text{Im}(f) = [8, 16]$)



Gráfica de una función:

- Para cada una de las funciones que figuran a continuación se pide:

- Tabla de valores apropiada y representación gráfica.
- $\text{Dom}(f)$ e $\text{Im}(f)$ a la vista de la gráfica.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

a) $f(x) = 3x + 5$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ¿vértice?

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = x^4$

e) $f(x) = 2$

f) $f(x) = \sqrt{x - 9}$

g) $f(x) = \frac{1}{x}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$?

h) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$? | i) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ¿asíntotas?

Cálculo del Dom(f):

7. Obtener **analíticamente**, de forma razonada, el Dom(f) de las funciones del ejercicio anterior, comprobando que se obtiene el mismo resultado que gráficamente.

8. Sin necesidad de representarlas, hallar **analíticamente** el Dom(f) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \frac{8x}{x+5}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$

d) $f(x) = \frac{2}{4x - x^2}$

e) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 16}$

f) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 16}$

g) $f(x) = \sqrt{x+5}$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}}$

i) $f(x) = \sqrt{2x-5}$

j) $f(x) = \sqrt{4-x}$

k) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

l) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$

m) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 4}$

n) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 - 16}}$

o) $f(x) = \frac{x+1}{(2x-3)^2}$

p) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2 - x - 6}}$

q) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-12}}$

r) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}$

s) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

t) $f(x) = \frac{14}{x^2 + 2x + 1}$

u) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 5x + 4}$

v) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

w) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+3}{x^2 - 4}}$

(Soluc: a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R} - \{-5\}$; c) $\mathbb{R} - \{-2, 4\}$; d) $\mathbb{R} - \{0, 4\}$; e) $\mathbb{R} - \{\pm 4\}$; f) $\mathbb{R}$; g) $[-5, \infty)$; h) $(-5, \infty)$; i) $[5/2, \infty)$; j) $(-\infty, 4]$; k) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$; l) $(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$; m) $\mathbb{R}$; n) $(-4, 0] \cup (4, \infty)$; o) $\mathbb{R} - \{3/2\}$; p) $[-3, -2) \cup (3, \infty)$; q) $(4, \infty)$; r) $\mathbb{R}$; s) $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$; t) $\mathbb{R} - \{-1\}$; u) $\mathbb{R}$; v) $\mathbb{R}$; w) $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$)

Propiedades que se deducen de la gráfica de una función:

9. A la vista de sus gráficas, indicar la **continuidad** de las funciones del ejercicio 6.

10. A la vista de sus gráficas, indicar los **intervalos de crecimiento** y los posibles **M y m** relativos de las funciones del ejercicio 6.

11. Hallar analíticamente los posibles puntos de **corte con los ejes** de las funciones del ejercicio 6, y comprobar que lo obtenido coincide con la gráfica.

12. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones (en el caso de las cuatro primeras, dibujar además, únicamente con esa información, la gráfica):

a) $y = 2x - 6$

b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

c) $f(x) = x^2 + x + 1$

d) $f(x) = x^3 - x^2$

e) $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

f) $f(x) = \sqrt{2x + 4}$

g) $f(x) = \sqrt{2x} + 4$

h) $y = \frac{x+4}{2x+2}$

i) $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$

j) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

k) $y = \sqrt{x^2 + 9}$

l) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

m) $y = \frac{x^2 + 4}{x + 2}$

n) $f(x) = \frac{4}{x - 4}$

o) $f(x) = x^4 - 1$

p) $y = \frac{x^3 + 8}{x^3 - 8}$

q) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$

r) $f(x) = 6x^3 - 7x^2 - 7x + 6$

(Soluc: **a)** (3,0),(0,-6); **b)** (-3,0),(1,0),(0,-3); **c)** (0,1); **d)** (0,0),(1,0); **e)** (-2,0),(2,0),(0,-2); **f)** (-2,0),(0,2); **g)** (0,4);
h) (-4,0),(0,2); **i)** ($\sqrt{3},0$), $(-\sqrt{3},0)$,(0,3); **j)** (-2,0),(1,0); **k)** (0,3); **l)** (1,0),(2,0),(3,0),(0,-6); **m)** (0,2); **n)** (0,-1);
o) (-1,0),(1,0),(0,-1))

13. Hallar analíticamente la posible simetría de las funciones del ejercicio 6, y comprobar que lo obtenido coincide con la gráfica.

14. Hallar la posible simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4$	g) $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$	j) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 6}$	m) $y = \frac{5x^2}{x - 1}$
b) $f(x) = x^3$	h) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$	k) $y = \frac{3x}{2x^2 - 1}$	n) $f(x) = x + \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3}$
c) $f(x) = x^4 - x^2$	i) $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$	l) $f(x) = \frac{x}{x - 5}$	o) $y = \frac{\sqrt{x - 2}}{x^2 + 3}$
d) $f(x) = x^2 - x^3$			
e) $f(x) = 2x - 3$			
f) $f(x) = x^5 - x^3$			

(Soluc: **a)** par; **b)** impar; **c)** par; **d)** no simétrica; **e)** no simétrica; **f)** impar; **g)** par; **h)** impar; **i)** impar; **j)** par; **k)** impar; **l)** no simétrica; **m)** no simétrica; **n)** no simétrica; **o)** no simétrica)

15. **a)** ¿Una función puede ser simétrica par e impar al mismo tiempo? Razonar la respuesta.

b) Demostrar que toda función impar definida en el origen necesariamente pasa por éste

16. Estudiar los puntos de corte con los ejes y la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ **b)** $y = \frac{x + 3}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \frac{14}{x^3}$ **d)** $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 1}$ **e)** $f(x) = \frac{4x + 12}{3x + 6}$

Estudio completo de una función (I):

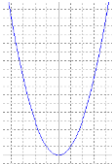
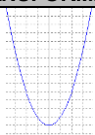
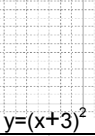
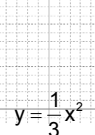
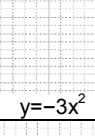
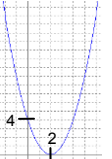
17. Dada $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ se pide: **i)** Dom(f) **ii)** Posible simetría. **iii)** Posibles cortes con los ejes. **iv)** Tabla de valores apropiada y representación gráfica. **v)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **vi)** ¿Es continua? **vii)** A la vista de la gráfica, indicar su Im(f) **viii)** Ecuación de las posibles asíntotas.
ix) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ **x)** Hallar la antiimagen de $y = -1$

18. Ídem para:

a) $f(x) = x^3 - 3x$	Antiimagen de $y = 2$	j) $f(x) = \frac{16 - 8x}{x^2}$	Antiimagen de $y = -2$
b) $y = \frac{x + 2}{x - 1}$	Antiimagen de $y = 1$	k) $y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$	Antiimagen de $y = -1/2$
c) $y = x^4 - 2x^2$	Antiimagen de $y = -1/2$	l) $y = \frac{x}{x^2 - x + 1}$	Antiimagen de $y = -1/2$
d) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$	Antiimagen de $y = 4/5$	m) $y = \frac{4x}{(x - 1)^2}$	
e) $f(x) = x^3 - 3x^2$	Antiimagen de $y = -2$	n) $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$	
f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$	Antiimagen de $y = 2$	o) $y = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$	Antiimagen de $y = -6$
g) $y = -x^3 + 12x$	Antiimagen de $y = -11$	p) $y = \sqrt{x^2 + 4}$	Antiimagen de $y = 0$
h) $y = x + \frac{9}{x}$		q) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$	Antiimagen de $y = 2$
i) $f(x) = \frac{9}{x^2 - 9}$	Antiimagen de $y = -1/3$		

Transformaciones de funciones:

19. Completar la siguiente tabla (véase el primer ejemplo):

FUNCIÓN ORIGINAL	TIPO DE TRANSFORMACIÓN		FUNCIÓN TRANSFORMADA	RESULTADO
 $y=x^2$	TRASLACIONES	$f(x)\pm k$	 $y=x^2+4$	TRASLACIÓN hacia ARRIBA
			 $y=x^2-2$	TRASLACIÓN hacia ABAJO
		$f(x\pm k)$	 $y=(x-2)^2$	TRASLACIÓN hacia la DERECHA
			 $y=(x+3)^2$	TRASLACIÓN hacia la IZQUIERDA
	CONTRACCIONES o EXPANSIONES		 $y=2x^2$	CONTRACCIÓN
			 $y=\frac{1}{3}x^2$	EXPANSIÓN
			 $y=-3x^2$	(Reflexión +) CONTRACCIÓN
 $y=x^2-4x+4$	REFLEXIONES		 $y=-(x^2-4x+4)=-x^2+4x-4$	REFLEXIÓN respecto al EJE X
			 $y=(-x)^2-4(-x)+4=x^2+4x+4$	REFLEXIÓN respecto al EJE Y

20. a) A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, representar las gráficas de $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 3$, $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^2}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2$ y $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ (cada una en distintos ejes), indicando el nombre de la transformación obtenida.

b) Ídem con $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ y las funciones $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$, $f(x) = \frac{1}{3(x^2 + 1)}$ y $f(x) = \frac{-1}{x^2 + 1}$

c) Ídem con $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y las funciones $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ y $f(x) = -\sqrt[3]{x}$

21. A partir de la gráfica de la hipérbola $f(x) = \frac{1}{x}$, representar sucesivamente (cada una en distintos ejes) las hipérbolas $f(x) = \frac{1}{x+2}$ y $f(x) = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$

22. a) Representar gráficamente la hipérbola $f(x) = -\frac{1}{x-2} + 3$ partiendo de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$

b) Ídem con $f(x) = \sqrt[3]{-x+2}$, partiendo de $f(x) = \sqrt[3]{x}$

23. Representar la función $f(x) = \text{Ent}(x)$

Estudio completo de una función (II):

24. Dadas las siguientes **funciones definidas a trozos** se pide: **i)** Gráfica. **ii)** Dom(f) e Im(f) **iii)** Posibles cortes con los ejes. **iv)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **v)** Continuidad. **vi)** Ecuación de las posibles asíntotas. **vii)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ **viii)** Responder, además, a las preguntas particulares de cada apartado:

a)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

¿f(1), f(2) y f(3)?

¿Antiimagen de y=3?

b)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x - 2 & \text{si } x \in [2, 4] \\ 5 & \text{si } x \in (4, \infty) \end{cases}$$

Hallar la antiimagen de y=16

Hallar la antiimagen de y=1

c)
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 1 - 2x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

¿f(1) y f(-1)?

¿Antiimagen de y=2?

¿Antiimagen de y=-3?

d)
$$f(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -2 & \text{si } x = 2 \\ x/2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

¿f(1), f(3/2), f(2) y f(-3)?

¿Antiimagen de y=1?

¿Antiimagen de y=2?

¿Antiimagen de y=18?

e)
$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -5 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$
 ¿f(-6), f(0)?

f)
$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \in (-\infty, 1] \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

g)
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{4}{x-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

h)
$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x \in (-\infty, 2] \\ x^2 - 4x & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

i) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

¿f(0) y f(3)?

j) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-5} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{10}{x+2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

¿f(0) y f(3)?

¿Qué x tiene por imagen y=0?

¿Qué x tiene por imagen y=3/2?

¿Qué x tiene por imagen y=1/2?

k) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x - 4 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

¿Vértice de la parábola?

l) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 7 & \text{si } x \leq -2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ \frac{5x-18}{2x-8} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Hallar la antiimagen de 1 y -8

m) $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 2x & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=1

n) $f(x) = \begin{cases} x+15 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ -x+7 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=6

o) $f(x) = \begin{cases} x+10 & \text{si } x \leq -4 \\ x^2 + 2x & \text{si } -4 < x \leq 1 \\ 3/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Hallar qué x tiene por imagen 0

p) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 4 \\ x-3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=4

q) $f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } -2 < x \leq 6 \\ 24 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=14

r) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x-2 & \text{si } x \in [2, 5] \\ -x+6 & \text{si } x \in (5, \infty) \end{cases}$

¿Cuáles son las antiimágenes de 1 y 16?

s) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 7 & \text{si } x < -3 \\ x-5 & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

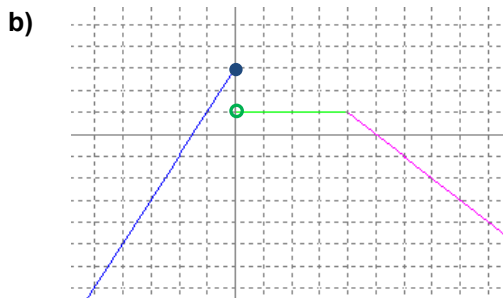
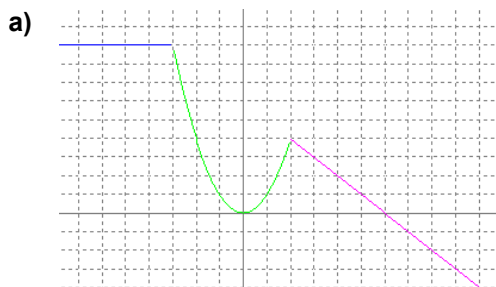
Hallar la antiimagen de -5

t) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

u) $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x < -3 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ \frac{5}{x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Hallar la antiimagen de 1

25. Hallar la expresión analítica —es decir, como función definida por ramas— de las siguientes funciones (puede indicarse en este cuaderno):



- 26.** Dadas las siguientes **funciones valor absoluto** se pide: i) Definición analítica por ramas. ii) Gráfica. iii) Dom(f) e Im(f) iv) Posibles cortes con los ejes. v) Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. vi) Continuidad. vii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

a) $f(x) = x - 1 $	b) $f(x) = -3x + 3 $	c) $f(x) = 3x + 6 $	d) $f(x) = x^2 - 5x + 6 $
e) $f(x) = x^2 - 4x + 3 $	f) $f(x) = -x^2 - 4x - 5 $	g) $f(x) = \left \frac{1}{2}x^2 - x - 4 \right $	h) $f(x) = x^2 - 4x + 5 $
i) $f(x) = -x^2 + x - 1 $	j) $f(x) = x^2 - 4x $	k) $f(x) = \left \frac{x}{x} \right $	l) $f(x) = 9 - x^2 $
m) $f(x) = \left \frac{1}{x} \right $	n) $f(x) = -x^2 + 4x - 4 $	o) $f(x) = 2x - x^2 $	

- 27.** Ídem (más elaboradas):

a) $f(x) = x + x$	b) $f(x) = x + 1 + x - 1 $	c) $f(x) = 3x + 6 - 2x - 2 $	d) $f(x) = \sqrt{\frac{ x }{x}}$
e) $f(x) = 2 - x $	f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$	g) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < -1 \\ (x - 1)^2 - 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$	
h) $f(x) = x + x - 2 $	i) $f(x) = \frac{ x }{x} - x$	j) $f(x) = x + x + 1$	k) $f(x) = 2 x^3 - 8 $
l) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$			

- 28.** A partir de la gráfica de $f(x) = |x|$, representar sucesivamente (cada una en distintos ejes) $f(x) = |x| + 3$, $f(x) = |x - 2|$, $f(x) = -|x|$, $f(x) = |2x|$ y $f(x) = \left| \frac{x}{3} \right|$

Composición de funciones. Función inversa:

- 29.** Hallar $f \circ g$ (léase *g compuesta con f*) y $g \circ f$ (*f compuesta con g*) en los siguientes casos:

a) $f(x) = 3x - 5$	$g(x) = 1/x$	c) $f(x) = 1/x$	$g(x) = \sqrt{x}$	e) $f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$
b) $f(x) = x^2$	$g(x) = 3x - 5$	d) $f(x) = x^2$	$g(x) = \sqrt{x}$		

- 30.** ¿Se puede componer una función consigo misma? ¿Qué obtenemos si hacemos $(f \circ f)(x)$ para $f(x) = 2x + 1$?

Hacerlo también para $f(x) = \frac{1}{x}$ y $f(x) = \frac{1-x}{x+1}$

- 31.** Comprobar que las siguientes funciones son inversas y representarlas gráficamente sobre los mismos ejes:

a) $f(x) = 2x$	$g(x) = \frac{x}{2}$	b) $f(x) = x^3$	$g(x) = \sqrt[3]{x}$	c) $f(x) = x + 1$	$g(x) = x - 1$
----------------	----------------------	-----------------	----------------------	-------------------	----------------

¿Qué conclusión se obtiene a la vista de sus gráficas?

32. Hallar la función inversa de (y comprobar):

a) $y = \sqrt{x+4}$

b) $y = 3 + 2(x-1)$

c) $y = 2\sqrt{x+1}$

d) $y = 3/x$

e) $y = x^2 - 1$

(Soluc: f coincide con f^{-1})

f) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

g) $y = 2 + \sqrt{x}$

h) $y = \frac{x+1}{3x-1}$

(Soluc: f coincide con f^{-1})

Problemas de aplicación:

33. Una fotocopiadora cobra 5 cent por cada fotocopia, pero ofrece también un servicio de multicopia por el que cobra 50 cent por el cliché y 0,15 cent por cada copia de un mismo ejemplar. **a)** Obtener, para cada caso, la función que nos muestra lo que hay que pagar según el número de copias realizadas. **b)** Representar ambas funciones ¿A partir de cuántas copias es más económico utilizar la multicopista? **c)** Resolverlo analíticamente, mediante una inecuación. (Sol: **b)** A partir de 15 copias inclusive)

34. Para fabricar un determinado producto hace falta un gasto inicial fijo de 1000 € más 50 € por cada unidad producida. Se pide: **a)** Razonar que el coste por unidad de fabricación disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función

$$y = \frac{50x + 1000}{x}$$

- b)** Hacer la gráfica correspondiente ¿Cuál es su Dom(f)? **c)** ¿Cuál será el coste cuando el número de unidades se haga muy grande? (Sol: **c)** El coste tenderá a ser de 50 €)

35. En una academia de mecanografía han llegado a la conclusión de que el número de pulsaciones por minuto de un alumno promedio viene dado por la función

$$y = \frac{400(x+1)}{x+25}$$

donde x representa el número de clases recibidas. Se pide: **a)** Representarla gráficamente ¿Cuál es su Dom(f)? **b)** ¿Cuántas clases necesita un alumno para conseguir 300 pulsaciones? **c)** Según este modelo, ¿un alumno podría llegar a tener más de 400 pulsaciones? ¿Por qué? (Sol: **b)** A partir de 71 clases. **c)** NO)

36. En una fábrica de montajes se ha estimado que el número de montajes realizados por un aprendiz dependen de los días de prácticas, según la función:

$$y = \frac{60x}{x+5}$$

donde x es el tiempo, en días. **a)** ¿Cuántos montajes realizará el primer día? ¿Y el día vigesimoquinto? **b)** ¿Cuántos días tiene que practicar para superar los 60 montajes al día? **c)** Dibujar la gráfica de $f(x)$ (Sol: **a)** 10 y 50 respectivamente **b)** Nunca)

37. Un técnico de una compañía ha calculado que los costes de producción (en €) de un determinado producto vienen dados por la siguiente expresión:

$$C(x)=x^2+20x+40000$$

donde x representa el número de unidades producidas. Por otra parte, cada unidad se vende al público a un precio de 520 €.

a) Expresar, en función del número de artículos producidos x , el beneficio y representarlo gráficamente.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

(Sol: **b**) 250 unidades; 22500 €)

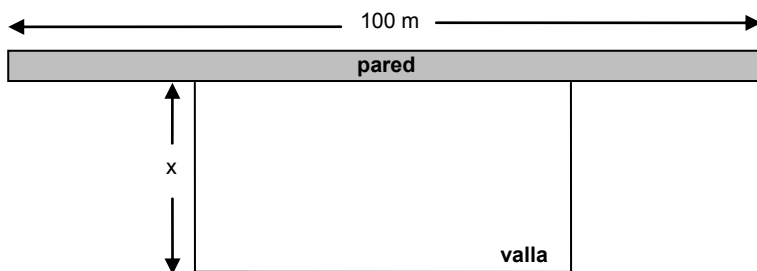
38. La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.

a) Representar la función que describe este enunciado y determinar su expresión analítica, como función definida por ramas.

b) Indicar cuál es su dominio y recorrido. (Sol: **b**) $Dom(f)=[0,25]$; $Im(f)=[0,20]$)

Resolución gráfica de problemas de optimización:

39. Con un listón de madera de 4 m de largo queremos fabricar un marco para un cuadro. a) Razonar que el valor de la superficie para una base cualquiera x viene dado por $S(x)=2x-x^2$ b) Representar gráficamente la función anterior ¿Cuál es el valor de la base para el que se obtiene la superficie máxima? c) ¿Cuánto vale dicha superficie? (Sol: **b**) 1 m **c**) 1 m²)



40. Con 100 m de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared de 100 m de largo, como indica la figura.

a) Llamar x a uno de los lados y construir la función que nos da el área. Representarla gráficamente ¿Cuál es su $Dom(f)$?

b) ¿Cuáles serán las dimensiones del recinto de área máxima?

c) ¿Cuánto vale esa área? (Sol: **a**) $S(x)=100x-2x^2$ **b**) 25 m x 50 m **c**) 1250 m²)

41. Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderán a 40 cent/kg. Se estima que cada día que pase se estropeará 1 kg, pero el precio aumentará 1 cent/kg.

a) Razonar que el beneficio que obtendremos al vender pasados x días viene dado por $B(x)=-x^2+160x+8000$

b) Representarla gráficamente y hallar su dominio de definición.

c) ¿Cuándo hemos de venderlas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio? (Sol: **c**) Interesará venderlas pasados 80 días)

42. Una cooperativa ha cosechado 200 000 kg de tomates que puede vender a 25 cent/kg. Se sabe que, por cada semana que transcurre, se pierden 4 000 kg de tomates pero el precio de cada kg aumenta en 5 cent. Expresar el valor total de los tomates en función del tiempo. Representar la gráfica de dicha función e indicar al cabo de cuántas semanas nos interesará vender. (Sol: $B(x)=-20\,000x^2+900\,000x+5\,000\,000$; 22,5 semanas $\Rightarrow$ 151 250 €)

Cónicas:

43. Dadas las siguientes expresiones, razonar en cada caso si corresponden a una **circunferencia** y, en caso afirmativo, dibujar su gráfica e indicar el centro y el radio:

a) $x^2 + y^2 + 25 = 0$ (Soluc: $C(0,0); R=5$)
 b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ (Soluc: $C(2,-1); R=3$)
 c) $x^2 + y^2 - 2xy + 8 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$ (Soluc: $C(5,-3); R=7$)
 e) $x^2 + 2y^2 - 3x - 6y + 5 = 0$
 f) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

44. Dadas las siguientes expresiones, razonar en cada caso si corresponden a una **elipse** y, en caso afirmativo, obtener su gráfica:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
 b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y}{4} = 1$
 c) $x^2 + 4y^2 = 4$

d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$
 e) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
 f) $25x^2 + 9y^2 = 225$

45. Hallar la ecuación reducida o canónica de una elipse de semieje mayor 4 y menor 3. Comprobarlo gráficamente.

46. Representar las siguientes **hipérbolas**:

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
 b) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{36} = 1$
 c) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

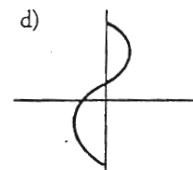
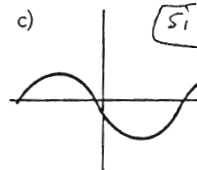
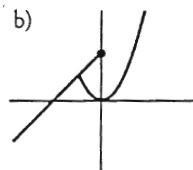
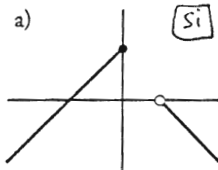
d) $4y^2 - x^2 = 4$
 e) $4x^2 - 9y^2 = 36$
 f) $2x^2 - y^2 + 2 = 0$

FUNCIONES ELEMENTALES (EJERCICIOS de REPASO)

1.1 CONCEPTO DE FUNCIÓN. DOMINIO DE DEFINICIÓN Y RECORRIDO

- Una **función** numérica permite asociar a cada número, x , un **único** número, y , llamado imagen de x . Se nombra así: $y = f(x)$.
- El conjunto, D , de los valores que puede tomar la variable independiente, x , se llama **dominio de definición** de la función.
- El conjunto de valores que toma la función se llama **recorrido**.

1 Indica cuáles de estas gráficas corresponden a funciones. Razona tu respuesta:

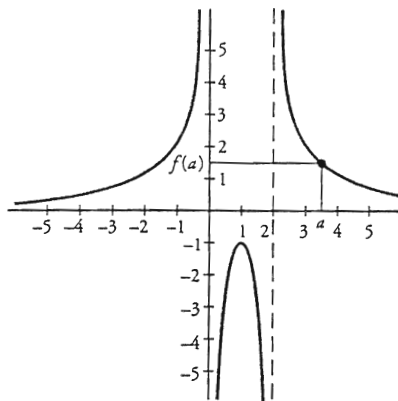


2 ¿Puede haber una función con los siguientes valores?
Justifica tu respuesta. (Soluc: No)

x	0	1	2	1	3	2	4
y	3	4	3	5	2	4	5

EJERCICIO RESUELTO

Indica cuál es el dominio y el recorrido de la función cuya gráfica es:



RESOLUCIÓN

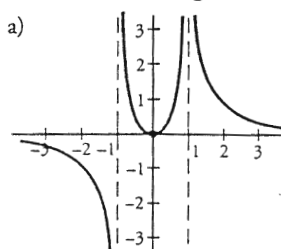
- Dominio: Los valores de x para los que existe una imagen, y , son todos los números reales excepto $x = 0$ y $x = 2$, en los que no está definida la función.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

- Recorrido: Los valores de y que son imagen de alguna x son todos los números negativos hasta $y = -1$ (incluido), y todos los positivos (desde $y = 0$, sin incluir, en adelante).

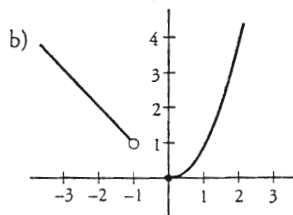
$$\text{Recorrido} = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

3 Observando la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición y cuál es su recorrido:



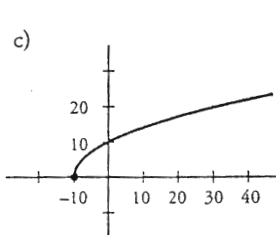
$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{Recorrido} = \mathbb{R}$$



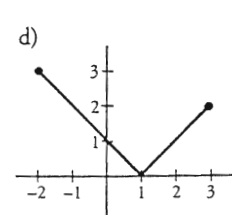
$$\text{Dominio} = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$$

$$\text{Recorrido} = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$$



$$\text{Dominio} = [-10, \infty)$$

$$\text{Recorrido} = \mathbb{R}^+$$



$$\text{Dominio} = [-2, 3]$$

$$\text{Recorrido} = [0, 3]$$

FUNCIONES CUADRÁTICAS

- Las **funciones cuadráticas** $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se representan mediante **parábolas**.
- Si $a > 0$, las ramas van hacia arriba; si $a < 0$, las ramas van hacia abajo.
- La abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es $x_0 = -\frac{b}{2a}$.



EJERCICIO RESUELTO

Representa gráficamente la función $y = -x^2 + 2x + 3$.

RESOLUCIÓN

- Su gráfica es una parábola con las ramas hacia abajo ($a = -1 < 0$).

- Vértice:

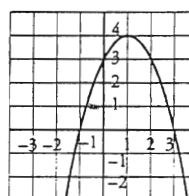
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \rightarrow y_0 = -1 + 2 + 3 = 4 \rightarrow V(1, 4)$$

- Puntos de corte con los ejes:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow$ Punto $(0, 3)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \rightarrow \text{Punto } (-1, 0) \\ x = 3 \rightarrow \text{Punto } (3, 0) \end{cases}$

- Si quisiéramos más precisión (o si la parábola no cortara al eje X), podríamos obtener algunos puntos más, próximos al vértice, dándole valores a x .

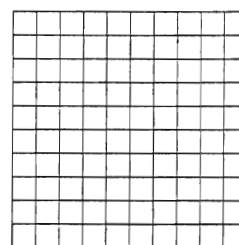
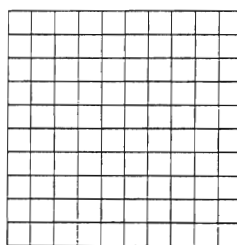
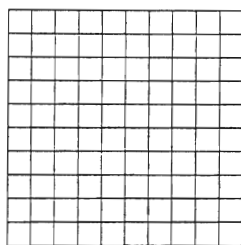
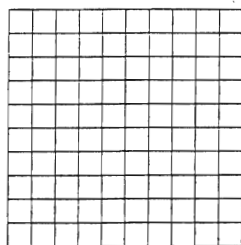


x	-2	-1	0	①	2	3	4
y	-5	0	3	4	3	0	-5



Representa gráficamente las siguientes parábolas:

- a) $y = x^2 - 2x - 8$ b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ c) $y = (x + 2)(x - 1)$ d) $y = -x^2 + 3x - 4$, $x \in [0, 4]$



Asocia a cada una de estas ecuaciones una de las parábolas que aparecen debajo:

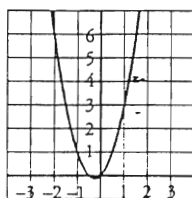
a) $y = -x^2 + 2x$
(Soluc: IV)

b) $y = x^2 - 2x$
(Soluc: II)

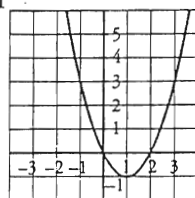
c) $y = 2x^2 + x$
(Soluc: I)

d) $y = -2x^2 + x$
(Soluc: III)

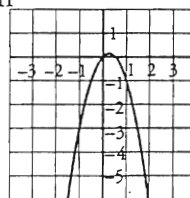
I



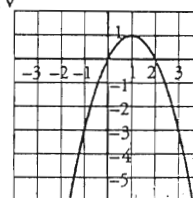
II



III



IV

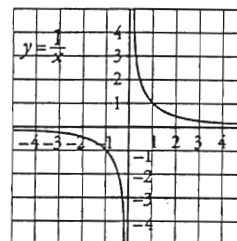


FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

- La ecuación de una función de proporcionalidad inversa es $y = \frac{k}{x}$.

Su gráfica es una **hipérbola**.

- También son hipérbolas las gráficas de las funciones $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.



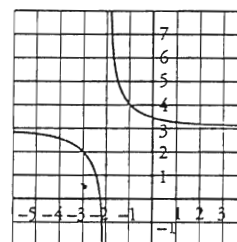
EJERCICIO RESUELTO

Representa gráficamente $y = \frac{3x + 7}{x + 2}$.

RESOLUCIÓN

$$y = \frac{3x + 7}{x + 2} = 3 + \frac{1}{x + 2} \quad \text{puesto que} \quad \begin{array}{r} 3x + 7 \\ -3x - 6 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x + 2 \\ 3 \end{array}$$

La gráfica de $y = 3 + \frac{1}{x + 2}$ es como la de $y = \frac{1}{x}$ desplazada 2 unidades a la izquierda y 3 hacia arriba.



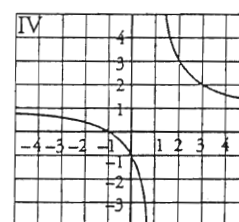
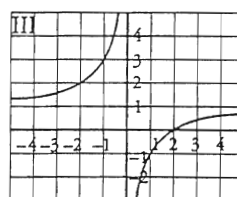
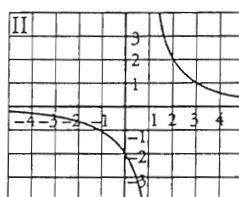
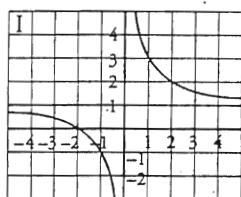
Asocia cada una de las siguientes expresiones a su gráfica:

a) $y = \frac{2}{x - 1}$
(Soluc: II)

b) $y = 1 + \frac{2}{x - 1}$
(Soluc: IV)

c) $y = 1 + \frac{2}{x}$
(Soluc: I)

d) $y = 1 - \frac{2}{x}$
(Soluc: III)



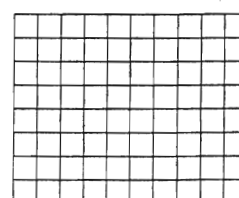
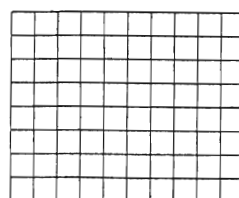
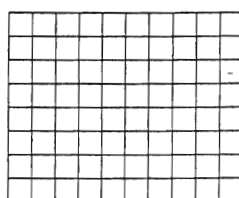
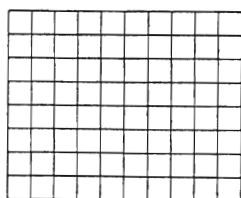
Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \frac{2}{x - 3}$

b) $y = \frac{2}{x} - 3$

c) $y = \frac{4x - 7}{x - 2}$

d) $y = \frac{-2x - 3}{x + 1}$



Halla el valor de k para que la gráfica de $y = \frac{k}{x}$ pase por $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

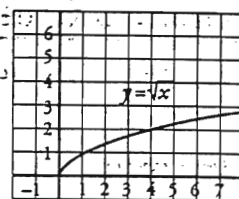
(Soluc: $k = 3/4$)

FUNCIONES RADICALES

• La función $y = \sqrt{x}$ es continua y creciente. Su crecimiento es cada vez más lento.

• Solo está definida para $x \geq 0$: su dominio es $[0, +\infty)$.

• Pasa por los puntos $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 2)$, $(9, 3)$...



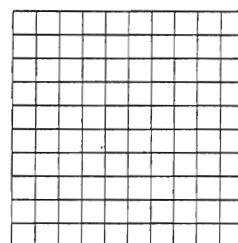
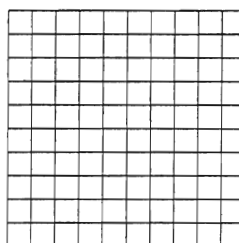
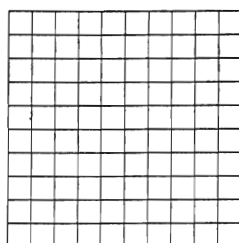
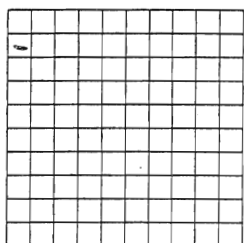
1 Representa gráficamente las funciones:

a) $y = 2 + \sqrt{x-1}$

b) $y = -\sqrt{x+2}$

c) $y = \sqrt{-x-1}$

d) $y = \sqrt{x+2}$



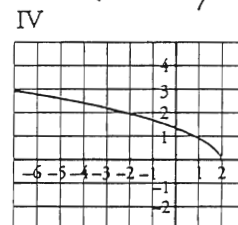
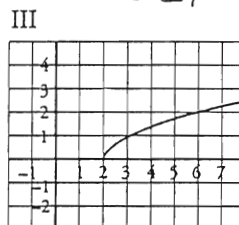
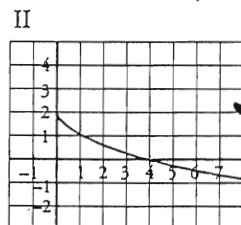
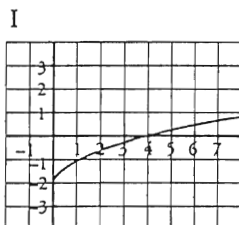
2 Asocia cada una de las siguientes expresiones a su gráfica:

a) $y = 2 - \sqrt{x}$
(Soluc: II)

b) $y = \sqrt{x-2}$
(Soluc: III)

c) $y = \sqrt{2-x}$
(Soluc: IV)

d) $y = \sqrt{x-2}$
(Soluc: I)



3 Recuerda que el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$.

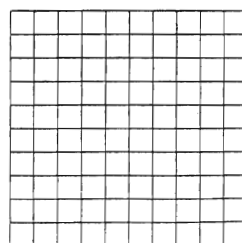
a) Obtén la expresión analítica de la función que nos da el radio de un círculo en función de su área.
¿Cuál es su dominio?

b) Representala gráficamente.

a) Función $\rightarrow$

Dominio =

b)



FUNCIONES DEFINIDAS "A TROZOS"



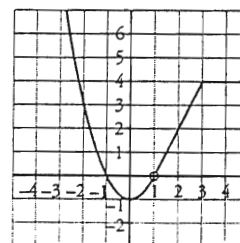
EJERCICIO RESUELTO

Representa gráficamente la función $f(x)$ y di cuál es su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

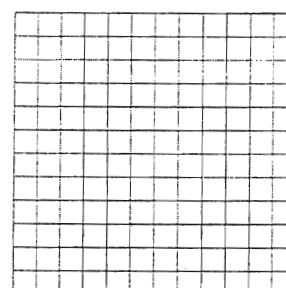
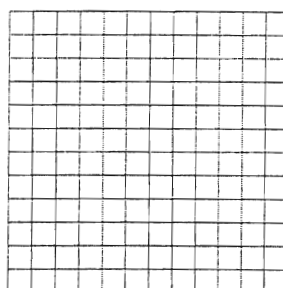
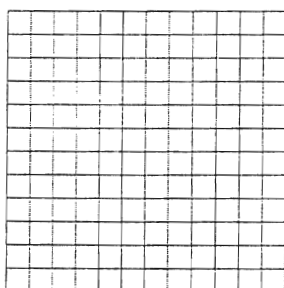
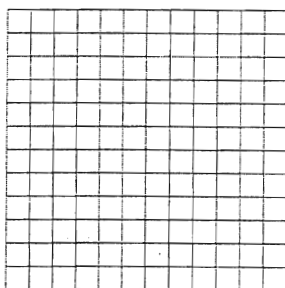
RESOLUCIÓN

- Representamos la parábola $y = x^2 - 1$ para $x < 1$.
(Es como $y = x^2$, pero trasladada una unidad hacia abajo. El punto de abscisa $x = 1$ no está incluido).
- Representamos la recta $y = 2x - 2$ para $1 < x < 3$.
- Representamos la recta horizontal $y = 4$ para $x \geq 3$.
- El dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$.



Representa estas funciones e indica el dominio de cada una de ellas:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad y &= \begin{cases} 3 - 2x, & x \leq 2 \\ -1, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{x+1}{2}, & x > 3 \end{cases} & \text{b)} \quad y &= \begin{cases} -\frac{x}{3}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 4 \\ 2, & x > 4 \end{cases} & \text{c)} \quad y &= \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2 - 3x, & 0 \leq x \leq 3 \\ x - 3, & 3 < x < 5 \end{cases} & \text{d)} \quad y &= \begin{cases} x + 2, & x \leq -1 \\ -x^2 + 2x, & -1 < x < 1 \\ 1/x, & x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$



(Soluc: $D = \mathbb{R}$)

(Soluc: $D = \mathbb{R}$)

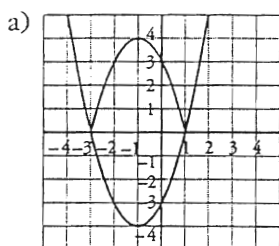
(Soluc: $D = (-\infty, 5)$)

(Soluc: $D = \mathbb{R} - \{1\}$)

a) Representa gráficamente la función $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$.

b) Ayudándote de la gráfica, expresa $f(x)$ como función "a trozos".

RESOLUCIÓN



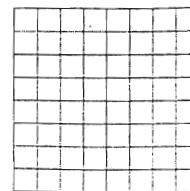
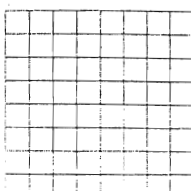
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 < x < 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



Representa y define como función "a trozos" en cada caso:

a) $y = |-2x - 2|$

b) $y = |x^2 - 9|$



DOMINIO DE DEFINICIÓN DE FUNCIONES NO ELEMENTALES

- Entre otras causas (ver página 4), el dominio de definición queda restringido por la imposibilidad de efectuar alguna operación. Por ejemplo:

$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ no está definida en los puntos en los que $Q(x) = 0$, porque no se puede dividir entre cero.

$y = \sqrt{Q(x)}$ solo está definida en los puntos en los que $Q(x) \geq 0$, pues no existe la raíz cuadrada de un número negativo.



EJERCICIO RESUELTO

Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $g(x) = \frac{3x+1}{2x-3}$ c) $y = \sqrt{x}$ d) $y = \sqrt{6-2x}$

RESOLUCIÓN

a) El denominador se hace cero cuando $x = 0$. Por tanto, podemos calcular $f(x)$ para cualquier valor de x , excepto para $x = 0$.

Así, $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

b) Veamos para qué valores de x se hace cero el denominador: $2x - 3 = 0 \rightarrow x = 3/2$.

Por tanto, $D = \mathbb{R} - \{3/2\}$.

c) Solo podemos calcular $\sqrt{x}$ para valores positivos de x y para el cero; es decir, cuando $x \geq 0$.

$D = [0, +\infty)$.

d) Solo podemos calcular $\sqrt{6-2x}$ cuando $6-2x \geq 0$.

$6-2x \geq 0 \rightarrow 6 \geq 2x \rightarrow 3 \geq x \rightarrow x \leq 3$.

$D = (-\infty, 3]$.



Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \frac{3}{4}x^3 - 2x + \sqrt{5}$

b) $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{3}$

c) $y = \frac{1}{x+1}$

d) $y = \frac{x^2 - 2x}{2x+5}$

(Sol: $D = \mathbb{R}$)

(Sol: $D = \mathbb{R}$)

(Sol: $D = \mathbb{R} - \{-1\}$)

(Sol: $D = \mathbb{R} - \{-5/2\}$)

e) $y = \frac{3x+1}{2x}$

f) $y = \sqrt{2x}$

g) $y = \sqrt{3x-2}$

h) $y = \sqrt{2-3x}$

(Sol: $D = \mathbb{R} - \{0\}$)

(Sol: $D = \mathbb{R}^+$)

(Sol: $D = [2/3, \infty)$)

(Sol: $D = (-\infty, 2/3]$)

i) $y = \sqrt{2x+5}$

j) $y = \sqrt{\frac{x+1}{3}}$

k) $y = \sqrt{\frac{3x-2}{5}}$

l) $y = \sqrt{-x-1}$

(Sol: $D = [-5/2, \infty)$)

(Sol: $D = [-1, \infty)$)

(Sol: $D = [2/3, \infty)$)

(Sol: $D = (-\infty, -1]$)

EJERCICIO RESUELTO

Halla el dominio de definición de las funciones:

a) $y = \frac{2x+1}{x^2+2x-3}$

b) $y = \sqrt{x^2+2x-3}$

RESOLUCIÓN

a) La función *no* está definida cuando $x^2+2x-3=0$. Veamos para qué valores de x sucede esto:

$$x^2+2x-3=0 \rightarrow x=-3, x=1$$

Por tanto, $D = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$.

b) La función solo está definida cuando $x^2+2x-3 \geq 0$, pues no se puede obtener la raíz cuadrada de un número negativo.

1.ª forma: $x^2+2x-3=0 \rightarrow x=-3, x=1$.

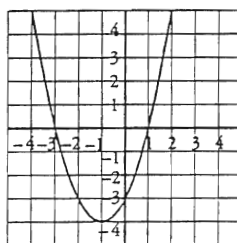
Estudiamos el signo de x^2+2x-3 en cada intervalo.

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de x^2+2x-3	+	-	+

x^2+2x-3 es positiva en $(-\infty, -3)$ y $(1, +\infty)$; y vale cero en $x=-3$ y en $x=1$.

$$D = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$$

2.ª forma: Dibujamos $y = x^2+2x-3$ y vemos para qué valores de x la función es positiva (es decir, su gráfica está por encima del eje X).



La gráfica está por encima del eje X para $x < -3$ y para $x > 1$ y corta el eje X en $x = -3$ y en $x = 1$.

$$D = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$$

2 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \frac{3x+1}{x^2+5x+7}$

b) $y = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$

c) $y = \frac{x+4}{x^2+1}$

d) $y = \frac{3x-2}{2x^2+4x+2}$

(Sol: $D = \mathbb{R}$)

(Sol: $D = \mathbb{R} - \{-4, 2\}$)

(Sol: $D = \mathbb{R}$)

(Sol: $D = \mathbb{R} - \{-1\}$)

e) $y = \frac{2x+5}{x^2-1}$

f) $y = \frac{1}{x^2-2x}$

g) $y = \frac{1}{x^3-2x^2}$

h) $y = \frac{3x+2}{x^3+3x^2-x-3}$

(Sol: $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$)

(Sol: $D = \mathbb{R} - \{0, 2\}$)

(Sol: $D = \mathbb{R} - \{0, 2\}$)

(Sol: $D = \mathbb{R} - \{-3, -1, 1\}$)

i) $y = \sqrt{x^2+5x+7}$

j) $y = \sqrt{x^2+2x-8}$

k) $y = \sqrt{2x^2+4x+2}$

l) $y = \sqrt{x^2-1}$

(Sol: $D = \mathbb{R}$)

(Sol: $D = (-\infty, -4] \cup [2, \infty)$)

($D = \mathbb{R}$)

(Sol: $D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$)

m) $y = \sqrt{x^2-2x}$

n) $y = \sqrt{x^2+1}$

o) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

p) $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x+2}}$

(Sol: $D = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$)

($D = \mathbb{R}$)

(Sol: $D = (0, \infty)$)

(Sol: $D = (-2, \infty)$)

LOGARITMOS



John Neper (1550-1617)



Henry Briggs (1561-1630)

MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato CCNN



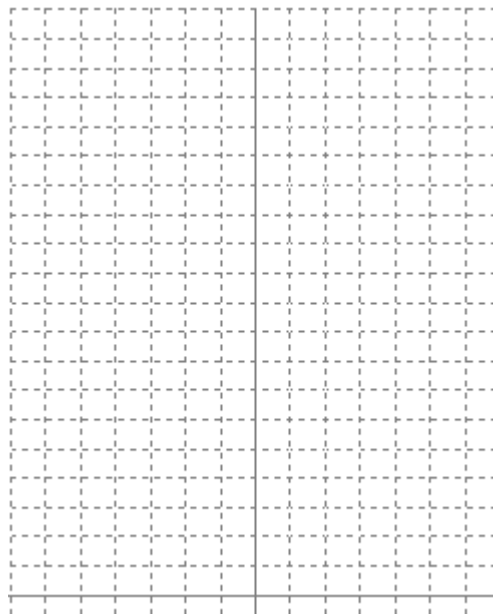
**Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas**

I) FUNCIÓN EXPONENCIAL de BASE a $f(x)=a^x$

«Es aquella función en la que la variable independiente figura en un exponente, es decir, toda función¹ del tipo $f(x)=a^x$, donde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ».

Ejemplo 1: Construir una tabla de valores apropiada y representar $f(x)=2^x$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=2^x$									



Consecuencias:

1º) Signo de $f(x)$:

2º) Crecimiento:

3º) $\text{Dom}(f)=$ $\text{Im}(f)=$

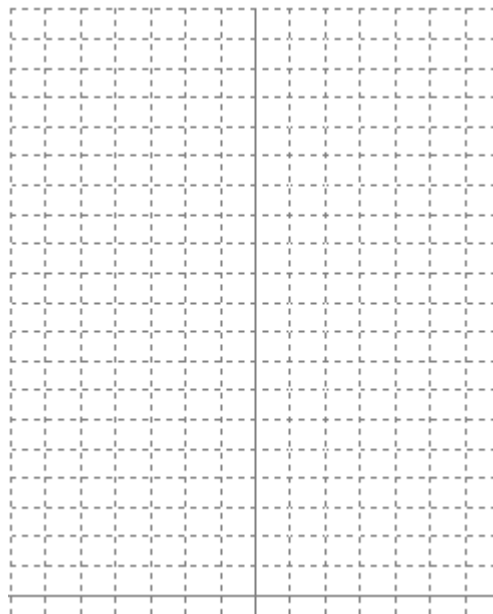
4º) Asíntotas:

5º) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x =$

Ejemplo 2: Ídem con $f(x) = 0,5^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$									



Consecuencias:

1º) Signo de $f(x)$:

2º) Crecimiento:

3º) $\text{Dom}(f)=$ $\text{Im}(f)=$

4º) Asíntotas:

5º) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$

¹ En la siguiente página se explica por qué se impone que $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Definición:

Función exponencial de base $a > 0$ ($a \neq 1$): $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ - \{0\}$
 $x \rightarrow a^x$

NOTA: Se considera $a > 0$ porque, en caso contrario, obtendríamos una función poco "congruente"; por ejemplo, para $f(x) = (-2)^x$:

$$f(2) = (-2)^2 = 4 > 0$$

Pero $f(3) = (-2)^3 = -8 < 0$

$$f(1/2) = (-2)^{1/2} = \sqrt{-2} = \nexists$$

etc.

Propiedades de la función exponencial:

1º) La función a^x siempre pasa por (0,1) y (1,a)

2º) $a > 1 \Rightarrow a^x$ CRECIENTE

$a < 1 \Rightarrow a^x$ DECRECIENTE

3º) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, es decir, «La función exponencial a^x siempre está definida²»

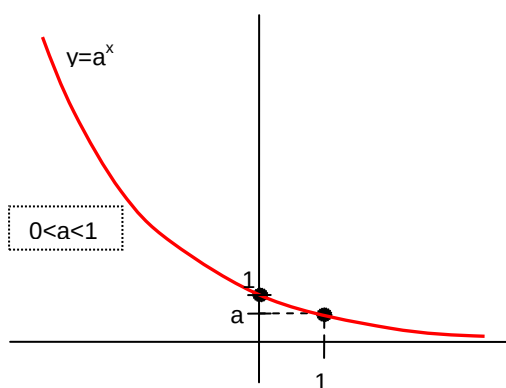
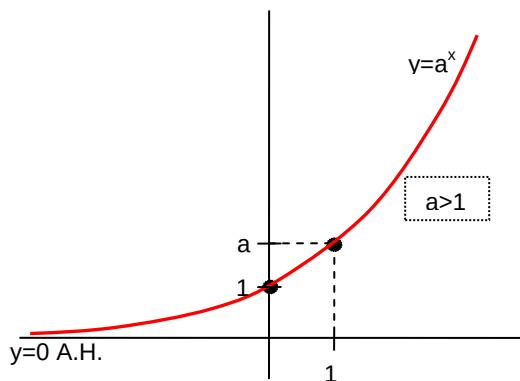
4º) $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ - \{0\}$, o dicho de otra forma, $a^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, es decir, «La función exponencial siempre es estrictamente positiva»

5º) $a > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$

$0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0^+$

6º) $y=0$ A.H., es decir, «La función exponencial a^x siempre presenta el eje x como A.H.³»

■ Todo lo visto hasta ahora se puede resumir en las siguientes gráficas:



² Nótese que nos referimos a a^x ; por ejemplo, $a^{1/x}$ no estará definida en $x=0$

³ De nuevo, nos referimos a a^x ; por ejemplo, $a^{1/x}$ presenta la A.H. $y=1$

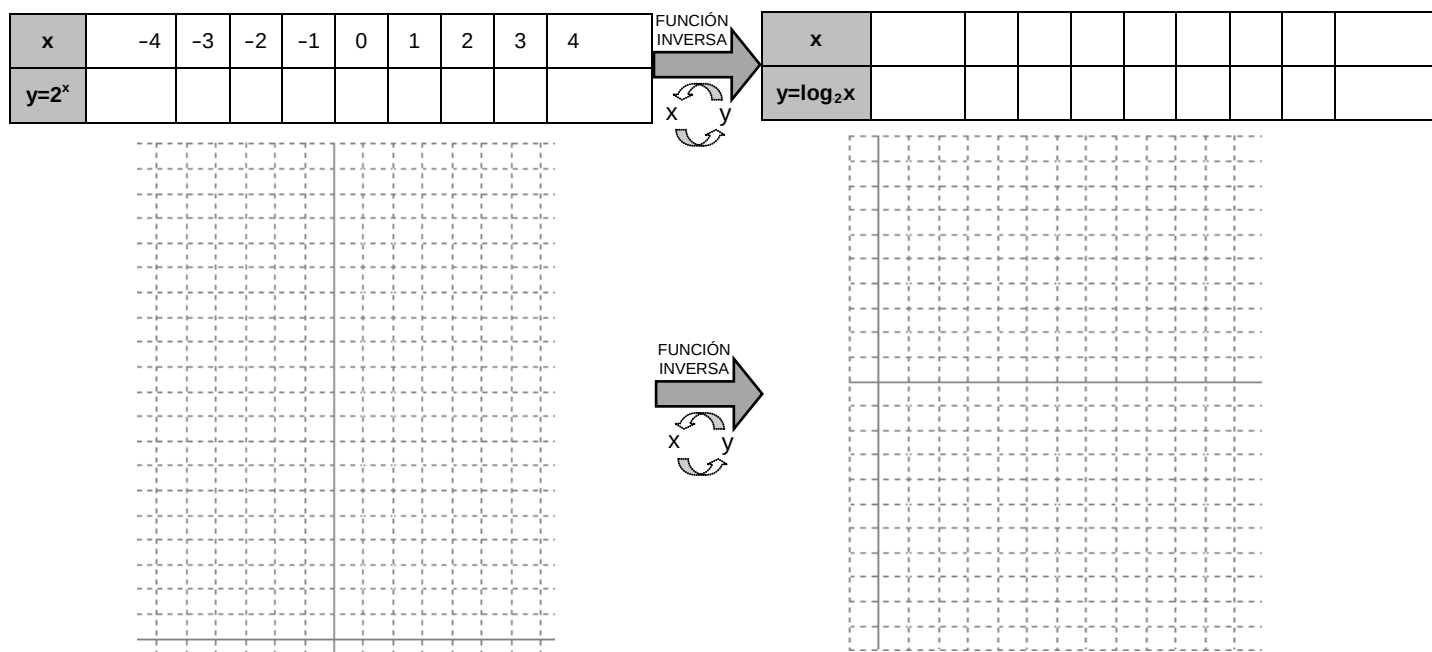
- **Caso particular:** Cuando la base es $e \simeq 2,718281828459...$ (cte. de Euler⁴), tenemos la función exponencial de base e, es decir, $y=e^x$, utilizada muy frecuentemente. (Construiremos su gráfica en el ejercicio 1 del final del tema).

II) FUNCIÓN LOGARÍTMICA de BASE a $f(x)=\log_a x$

La enorme complejidad de los cálculos que se presentaron durante el siglo XVI en los estudios astronómicos dio lugar a numerosos intentos de simplificación, entre ellos la sustitución de multiplicaciones por sumas. Se debe al escocés *John Napier* (en latín, Neper) la invención en aquella época de los logaritmos, lo cual trajo consigo la función logarítmica. En cambio, el reciente desarrollo de la electrónica ha originado que en la actualidad prácticamente haya desaparecido la importancia de su utilización como técnica de cálculo, aunque no como concepto matemático.

Definición: « La función logarítmica $y=\log_a x$ (con $a>0$ y $a\neq 1$) es la inversa de la función exponencial $y=a^x$ »

Ejemplo 3: Utilizando la tabla de la función $y=2^x$ (ejemplo 1), obtener la tabla de $y=\log_2 x$ y su gráfica.



Ejercicio final tema: 1 y 2

⁴ El número e, llamado constante de Euler –en honor al matemático suizo *Leonhard Euler* (1707-1783)–, surge como límite de la siguiente sucesión:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Por ejemplo, $n=1 \Rightarrow a_1=2$

$n=2 \Rightarrow a_2=1,5^2=2,25$

$n=3 \Rightarrow a_3=1,33^3 \simeq 2,3704$

(completar) $n=4 \Rightarrow a_4=1,25^4 \simeq$

$n=5 \Rightarrow a_5 \simeq$

$n=100 \Rightarrow a_{100} \simeq$

$n=1\,000 \Rightarrow a_{1\,000} \simeq$

$n=10\,000 \Rightarrow a_{10\,000} \simeq$

$n=100\,000 \Rightarrow a_{100\,000} \simeq$

$n \rightarrow \infty \Rightarrow e \simeq 2,718281828459...$

Se trata de un número irracional, es decir, consta de ∞ cifras decimales no periódicas.

Nótese en la tabla que:

$\log_2 4=2$	$(pq \ 2^2=4)$
$\log_2 8=3$	$(pq \ 2^3=8)$
$\log_2 16=4$	$(pq \ 2^4=16)$
$\vdots$	

Y, en general:

Definición: «El logaritmo en base a de un número N es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número»

argumento o antilogaritmo

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N \quad (1)$$

base
logaritmo

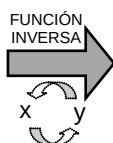
Ejemplos:

$\log_3 81=$	pq
$\log_{10} 100=$	pq
$\log_2 64=$	pq
$\log_2 1/2=$	pq
$\log_9 3=$	pq
$\log_3 (-9)=$	pq

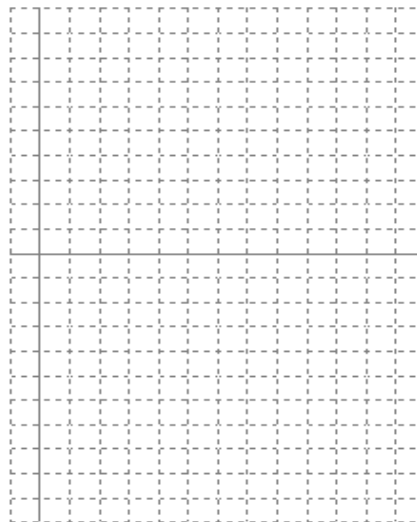
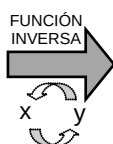
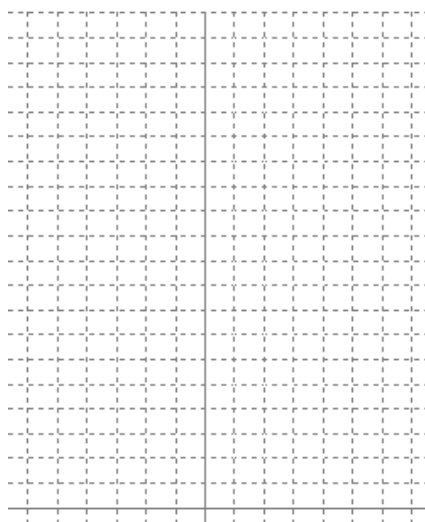
Nótese que en todo esto hay cierta analogía con la conocida definición de $\sqrt[n]{a} = x$ como inversa de x^n

Ejemplo 4: Utilizando la tabla de la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (ejemplo 2), obtener la tabla de $y = \log_{1/2} x$ y su gráfica.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$									



x									
$y = \log_{1/2} x$									



CONCLUSIÓN: Propiedades de la función logarítmica:

1º) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ - \{0\}$, o dicho de otra forma, « **No existe el logaritmo de un número negativo** »⁵»

2º) $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, por lo que podemos añadir: « **...pero un logaritmo puede ser negativo** »

3º) $\log_a a = 1$ (porque $a^1 = a$) « **El logaritmo de la base siempre es 1** »

$\log_a 1 = 0$ (porque $a^0 = 1$) « **El logaritmo de 1, sea cual sea la base, siempre es 0** »

4º) $a > 1 \Rightarrow \log_a x$ CRECIENTE

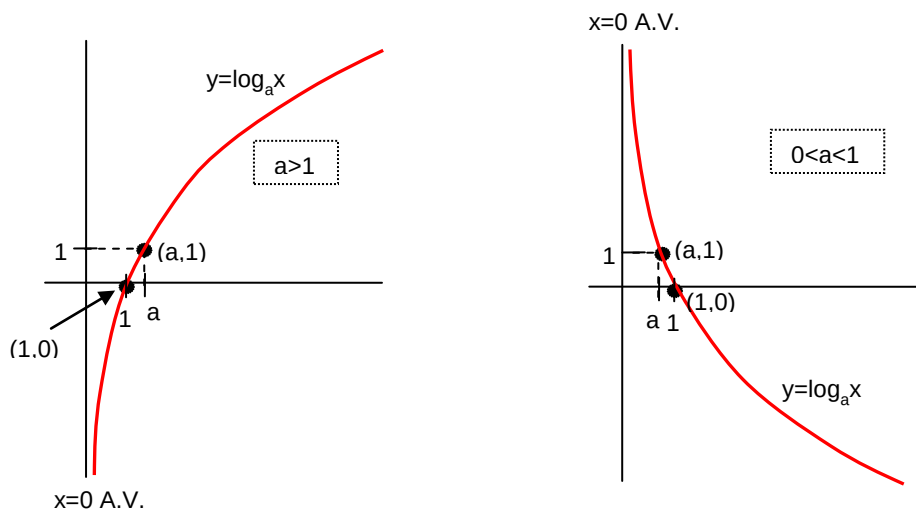
$0 < a < 1 \Rightarrow \log_a x$ DECRECIENTE

5º) $a > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$

$a < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$

6º) $x=0$ A.V., es decir, « **La función logarítmica $\log_a x$ siempre presenta el eje y como A.V.** »⁶»

■ Todo lo visto hasta ahora se puede resumir en las siguientes gráficas:



■ **Caso particular: LOGARITMOS NEPERIANOS⁷:** Son los que utilizan como base $e \approx 2,718281828459...$; tienen una notación especial:

$$\log_e x = \ln x$$

Ejercicio final tema: 3 a 5

⁵ Nótese que, puesto que la función exponencial y la logarítmica son inversas, el dominio de una coincide con el recorrido de la otra, y viceversa.

⁶ Nótese que nos referimos a $\log_a x$; por ejemplo, $\log_{\frac{2-x}{x-1}}$ presenta únicamente A.V. en $x=1$ y $x=2$

⁷ Se llaman así en honor a *John Neper* (1550-1617), matemático escocés que, como ya se ha dicho, ideó los logaritmos para simplificar cálculos.

- Las calculadoras normalmente disponen de sendas teclas $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$ para calcular logaritmos decimales o neperianos ¿Cómo obtener logaritmos en cualquier base?:

	$\log x$	$\ln x$	$\log_a x$
DERIVE	LOG(x,10)	LN(x) o LOG(x)	LOG(x,a)
GRAPH	log(x)	ln(x)	logb(x,a)
CALCULADORA	$\boxed{\log} x$	$\boxed{\ln} x$	$\boxed{\log} x \boxed{:} \boxed{\log} a$

NOTA: La última fórmula, llamada del cambio de base, se explicará en el apdo. V

Reseña histórica:

Como ya hemos indicado, el matemático escocés John **Neper** (1550-1617) fue el inventor hacia 1594 de los logaritmos – fue él quien acuñó esa palabra– para simplificar los tediosos cálculos de productos en Trigonometría esférica aplicada a la Astronomía, pero empleaba una base incómoda, en concreto 10^7 . Neper también popularizó su curiosa máquina de multiplicar, llamada «Rodillos de Neper». Su contemporáneo Henry **Briggs** (1561-1630), catedrático de Oxford, le sugirió en 1615 el empleo de la base 10 y, a su muerte, perfeccionó sus ideas, decantándose por el empleo de dicha base decimal. En 1617 publicó las primeras tablas de logaritmos, similares a las actuales, y definió el logaritmo de un número tal y como hoy se conoce.

El italiano Evangelista **Torricelli** (1608-1647) estudió la curva exponencial en 1644 y la relacionó con los logaritmos. Posteriormente, el inglés William **Jones** (1675-1749) sistematizó lo que ya antes se intuía: que la función logarítmica era la inversa de la exponencial.

El sacerdote jesuita belga Grégoire de **Saint-Vicent** (1584-1667) en 1647 encontró la conexión entre el área encerrada bajo la hipérbola $y=1/x$ y los logaritmos, al igual que **Newton** en 1665

Los logaritmos neperianos –que utilizan la base e, siendo $e \cong 2,7182818...$ un número irracional- reciben tal nombre en honor de Neper, si bien él no llegó a utilizar dicha base. Fueron en realidad introducidos por John **Speidell** en 1619 y definitivamente asentados por el matemático suizo Leonhard **Euler** (1707-1783) en 1728.

III) CÁLCULO LOGARÍTMICO

III.1) Logaritmo de un producto: $\log(p \cdot q) = \log p + \log q$

Es decir, «El logaritmo de un producto es la suma de logaritmos» (2)

Dem:

conocemos p y q

$$\left. \begin{array}{l} \log_a p = x \Rightarrow a^x = p \\ \log_a q = y \Rightarrow a^y = q \end{array} \right\} p \cdot q = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow \log_a(p \cdot q) = x + y = \log_a p + \log_a q \quad (\text{C.Q.D.})$$

Observaciones: 1) Esta fórmula es válida en cualquier base.

2) Esta fórmula se puede generalizar a 3 o más argumentos:

$$\log(p \cdot q \cdot r) = \log p + \log q + \log r \quad \text{etc.}$$

3) Esta fórmula –y las siguientes que veremos a continuación– nos puede servir para comprender cómo surgieron los logaritmos en el siglo XVI como instrumento para facilitar los cálculos astronómicos con cantidades elevadísimas para la época (como ya indicamos al comienzo del apartado II). Vamos a explicarlo con un ejemplo:

Supongamos que queremos hallar el valor de $N = 1638457 \cdot 1968334$

(Recordar que, antes de la aparición de las calculadoras, operaciones de este tipo eran muy laboriosas) Tomamos logaritmos en ambos miembros:

$$\log 1638457 + \log 1968334 = \log N$$

Se disponía de tablas de logaritmos muy completas, con las que se podía reemplazar cada logaritmo por su valor (evidentemente, era más fácil sumar a mano decimales que multiplicar números de muchas cifras):

$$6,2144... + 6,2940... = \log N$$

Es decir: $12,5085... = \log N$

A continuación, se buscaba en las tablas el caso inverso, es decir, cuál es el número cuyo logaritmo es 12,5085... (lo que se conoce como **antilogaritmo**⁸):

$$\log N = 12,5085... \Rightarrow N = \boxed{3\,225\,030\,620\,638}$$

Hoy en día todo esto se nos puede antojar algo laborioso, pero situémonos en aquellos tiempos –no muy remotos⁹–, sin ordenadores ni calculadoras...

III.2) Logaritmo de un cociente:

$$\log \frac{p}{q} = \log p - \log q$$

Es decir, «**El logaritmo de un cociente es la resta de logaritmos**» (3)

Dem:

III.3) Logaritmo de una potencia:

$$\log p^n = n \cdot \log p$$

(Válido $\forall n \in \mathbb{R}$) (4)

Es decir, «**El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base**»

Dem: Vamos a probarlo para $n \in \mathbb{N}$:

$$\log p^n = \log(\underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{n \text{ términos}}) = \log p + \log p + \dots + \log p = \underbrace{\log p + \log p + \dots + \log p}_{n \text{ términos}} = n \cdot \log p \quad (\text{C.Q.D.})$$

Observaciones: 1) En realidad esta fórmula es válida $\forall n \in \mathbb{R}$

2) Caso particular: LOGARITMO DE UNA RAÍZ:

$$\log \sqrt[n]{p} = \log p^{1/n} = \frac{1}{n} \cdot \log p \quad (\text{C.Q.D.}) \quad (5)$$

Es decir: «**El logaritmo de una raíz es el inverso del índice multiplicado por el logaritmo del radicando**»

Ejercicios final tema: 6 al 23

⁸ En la calculadora, para hallar un antilogaritmo, normalmente se utiliza la combinación **SHIFT**-**log**:

$$\log N = 12,5085... \Rightarrow N = \boxed{\text{SHIFT}}-\boxed{\log} 12,5085... = 3\,225\,030\,620\,638$$

⁹ Por ejemplo, el uso generalizado de las calculadoras se produjo en la década de los 70 del siglo pasado...

IV) ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

«Una **ecuación exponencial** es aquella en la que la incógnita aparece como exponente». Existen varios procedimientos para su resolución, dependiendo del tipo de ecuación; básicamente, se pueden resumir en tres:

1^{er} caso: Algunas ecuaciones exponenciales se resuelven consiguiendo una igualdad entre dos potencias de la misma base, con lo cual los exponentes tendrán que ser iguales.

Ejemplo 5: $4^{2x+1} = 8^{2x}$

2^o caso: Cuando figuran sumas y/o restas de expresiones exponenciales, lo que suele funcionar es aplicar un cambio de variable del tipo $a^x = t$ (donde a suele ser primo), con lo cual la ecuación exponencial se transforma en una ecuación algebraica en t .

Ejemplo 6: $9^x + 3^x = 6642$

3^{er} caso: En otros casos lo que suele funcionar es tomar logaritmos decimales (o también neperianos, según convenga...) en ambos miembros (¡evidentemente, esto no funciona cuando al menos uno de los miembros es una suma!).

Ejemplo 7: $2^{2x-1} = 3^x$

NOTA: El saber cuál de los tres procedimientos aplicar a una ecuación exponencial concreta es una técnica que requiere práctica y sentido común; en algunos casos sólo funciona uno de los tres métodos, mientras que en otros es posible que se pueda elegir entre dos de ellos, o cualquiera de los tres... Para adquirir destreza en dicha técnica, resultarán útiles los siguientes ejercicios:

Ejercicios final tema: 24 al 26

- «Una **ecuación logarítmica** es aquella en la que la incógnita aparece en el argumento de un logaritmo».

En principio, hay dos casos:

¡IMPORTANTE! En ambos casos **es fundamental comprobar las posibles soluciones obtenidas** sustituyéndolas en la ecuación del principio, y descartar aquellas que conduzcan a un logaritmo con argumento negativo.

1^{er} caso: Aplicando las propiedades de los logaritmos en orden inverso comprimimos la expresión original hasta lograr una igualdad de logaritmos de la misma base, con lo cual sus argumentos serán iguales (esto se conoce como **propiedad inyectiva**):

$$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y \quad (6)$$

Ejemplo 8: $\log x = 2 \log 4$

Ejemplo 9: $4 \log x - 1 = \log 4 + \log (2x)$

(Soluc : $x = 2 \sqrt[3]{10}$)

2^o caso: Cuando lo anterior no es posible, suele funcionar un cambio de variable del tipo **$\log x = t$** :

Ejemplo 10: $\log^2 x - 3 \log x + 2 = 0$

(Sol: $x_1=10$; $x_2=100$)

Ejercicio final tema: 27

28 (Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas)

29 a 32 (Problemas de aplicación)

V) CAMBIO DE BASE

Fórmula del cambio de base de sistema de logaritmos:

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x \quad (7)$$

Dem: Puesto que el logaritmo y la exponencial son funciones inversas, es evidente que:

$$x = a^{\log_a x}$$

Tomando $\log_b$ en ambos miembros, y aplicando la fórmula del logaritmo de una potencia, obtenemos la fórmula anterior (desordenada):

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a \quad (\text{C.Q.D.})$$

Utilidad: La fórmula del cambio de base permite calcular logaritmos en cualquier base con las calculadoras habituales, que sólo disponen de logaritmos decimales (o neperianos); en efecto, para ello basta con tomar $b=10$ en la fórmula, con lo cual se obtiene:

$$\log x = \log_a x \cdot \log a$$

Despejando:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

Ejemplo 11: $\log_3 9 = \frac{\log 9}{\log 3} = \frac{0,9542...}{0,4771...} = 2$ (Como puede comprobarse, aplicando la definición...)

Ejercicios final tema: 33 al 35

35 EJERCICIOS de LOGARITMOS

Función exponencial y logarítmica:

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, se pide: **i)** Tabla de valores y representación gráfica. **ii)** Signo de $f(x)$. **iii)** Cortes con los ejes. **iv)** Intervalos de crecimiento. **v)** Dominio y recorrido. **vi)** Asíntotas. **vii)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

a) $f(x) = 10^x$ y $f(x) = \log x$

b) $f(x) = 0,1^x$ y $f(x) = \log_{0,1} x$

c) $f(x) = e^x$ y $f(x) = \ln x$

d) $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \log_3 x$

e) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{2x}{x-5} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

2. El matemático suizo *Leonhard Euler* (1707-1783) obtuvo en 1743 las siguientes fórmulas:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{sen } \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Comprobar que verifican $\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

Definición de logaritmo:

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

(donde $a > 0$, $a \neq 1$)

Sistemas de logaritmos más utilizados:

NOMBRE	BASE	NOTACIÓN	DEFINICIÓN
Logaritmo decimal	$a=10$	log	$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$
Logaritmo neperiano. ¹	$a=e$	Ln, ln	$\ln N = x \Leftrightarrow e^x = N$

donde $e \cong 2,718281828459...$ se llama cte. de Euler; es un número irracional.

3. Utilizando la definición, hallar los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 9$

e) $\log_2 \sqrt{2}$

i) $\log_4 64$

m) $\log_4 256$

q) $\log_2 1024$

b) $\log_3 81$

f) $\log_2 \sqrt{8}$

j) $\log_{10} 0,01$

n) $\log_4 1/64$

r) $\log_2 1/64$

c) $\log_3 1/9$

g) $\log_{10} 1000$

k) $\log_4 1/16$

o) $\log_2 0,125$

s) $\log_3 \sqrt{27}$

d) $\log_3 (-9)$

h) $\log_4 2$

l) $\log_5 0,2$

p) $\log_4 1$

t) $\log_2 \log_2 4$

(Soluc: **a)** 2; **b)** 4; **c)** -2; **d)** $\nexists$; **e)** 1/2; **f)** 3/2; **g)** 3; **h)** 1/2; **i)** 3; **j)** -2; **k)** -2; **l)** -1; **m)** 4; **n)** -3; **o)** -3; **p)** 0; **q)** 10; **r)** -6; **s)** 3/2; **t)** 1)

4. Calcular los logaritmos decimales de los siguientes números (sin calculadora) y comprobar el resultado:

¹ En honor a *John Napier* (*Neper*, en latín), matemático inglés (1550-1617) inventor de los logaritmos.

- a) 10.000 b) 1.000.000 c) 0,001 d) 1/1.000.000 e) 10^8 f) 10^{-7}
g) 10 h) 1

(Soluc: a) 4; b) 6; c) -3; d) -6; e) 8; f) -7; g) 1; h) 0)

5. Utilizando la definición de logaritmo, hallar el valor de x en cada una de las igualdades siguientes:

- | | | | | |
|-------------------|------------------|-------------------------|------------------------|-----------------|
| a) $\log_2 8=x$ | f) $\log_3 x=-2$ | k) $\log_x 25=-1$ | p) $\log_x 2=0$ | u) $\log_x 1=0$ |
| b) $\log_2 1/8=x$ | g) $\log_x 49=2$ | l) $\log_{1/100} 100=x$ | q) $\log_{0,25} x=2$ | |
| c) $\log 100=x$ | h) $\log_x 8=3$ | m) $\log_x 0.01=2$ | r) $\log_2 (-16)=x$ | |
| d) $\log_3 x=3$ | i) $\ln e^3=x$ | n) $\ln x=-1/2$ | s) $\log_x 125=-3$ | |
| e) $\ln x=2$ | j) $\log_x 64=1$ | o) $\log_{1/36} x=2$ | t) $\log_3 \log_3 3=x$ | |

(Soluc: a) 3; b) -3; c) 2; d) 27; e) e^2 ; f) $1/9$; g) 7; h) 2; i) 3; j) 64; k) $1/25$; l) -1; m) 0,1; n) $1/e$; o) $1/1296$; p) $\frac{1}{2}$; q) 0,0625; r) $\frac{1}{2}$; s) $1/5$; t) 0 u) $\forall \mathbb{R}$)

Cálculo logarítmico:

■ Fórmulas del cálculo logarítmico:

$$\log(p \cdot q) = \log p + \log q$$

$$\log \frac{p}{q} = \log p - \log q$$

$$\log p^n = n \cdot \log p$$

$$\log \sqrt[n]{p} = \frac{1}{n} \log p$$

(todas son válidas en cualquier base)

Casos particulares:

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

6. Aplicando las fórmulas anteriores, calcular (y hacer doble comprobación, algebraica y con calculadora):

- | | | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1. $\log_6 \frac{1}{36}$ | 9. $\log_4 2$ | 17. $\ln \frac{\sqrt{e}}{e}$ | 25. $\log \frac{\sqrt[3]{100}}{10}$ | 32. $\log_5 \frac{1}{5 \sqrt[3]{25}}$ |
| 2. $\log_3 \sqrt[4]{27}$ | 10. $\log_8 2$ | 18. $\log_4 (-4)$ | 26. $\log_3 \frac{1}{27 \sqrt[3]{9}}$ | 33. $\ln \frac{1}{e^2 \sqrt{e}}$ |
| 3. $\log_3 \frac{\sqrt{243}}{3}$ | 11. $\log_8 \sqrt{32}$ | 19. $\log_2 \sqrt[3]{32}$ | 27. $\ln \frac{e}{\sqrt[4]{e}}$ | 34. $2 \log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4}$ |
| 4. $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$ | 12. $\ln \sqrt[3]{e}$ | 20. $\log_3 \sqrt{27}$ | 28. $\log \frac{\sqrt{10}}{0,1}$ | 35. $\log_5 \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt[3]{5}}$ |
| 5. $\ln e^2$ | 13. $\log_2 64$ | 21. $\log_2 \frac{\sqrt[5]{64}}{8}$ | 29. $\ln \frac{e}{\sqrt[3]{e^2}}$ | 36. $\ln \frac{e \sqrt{e}}{\sqrt[3]{e^2}}$ |
| 6. $\log_4 \frac{1}{\sqrt[5]{64}}$ | 14. $\log_4 \frac{1}{64}$ | 22. $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ | 30. $\log_3 \frac{1}{3 \sqrt[4]{27}}$ | 37. $\log (10 \sqrt[3]{10}) + \ln \frac{1}{e^2}$ |
| 7. $\log_3 \sqrt[3]{9}$ | 15. $\log_3 \frac{3}{\sqrt[5]{81}}$ | 23. $\log_3 \frac{1}{\sqrt{243}}$ | 31. $\log_{1/5} 125$ | |
| 8. $\ln \frac{1}{e}$ | 16. $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{9}$ | 24. $\log \sqrt{20} + \log \sqrt{5}$ | | |

(Soluc: **1)** -2; **2)** $3/4$; **3)** $3/2$; **4)** $-1/2$; **5)** 2; **6)** $-3/5$; **7)** $2/3$; **8)** -1; **9)** $1/2$; **10)** $1/3$; **11)** $5/6$; **12)** $1/3$; **13)** 6;
14) -3; **15)** $1/5$; **16)** $-3/2$; **17)** $-1/2$; **18)** $\frac{1}{3}$; **19)** $5/3$; **20)** $3/2$; **21)** $-9/5$; **22)** $-2/3$; **23)** $-5/2$; **24)** 1; **25)** $-1/3$;
26) $-11/3$; **27)** $3/4$; **28)** $3/2$; **29)** $1/3$; **30)** $-7/4$; **31)** -3; **32)** $-5/3$; **33)** $-5/2$; **34)** 1; **35)** $7/15$; **36)** $5/6$; **37)** $-2/3$)

7. Volver a hacer el ejercicio 3, pero esta vez aplicando las fórmulas del cálculo logarítmico.

8. Expresar en función de $\log 2$ los logaritmos decimales siguientes, y comprobar con la calculadora:

a) $\log 16$	d) $\log 0,25$	g) $\log 1/40$	j) $\log 0,32$	m) $\log \sqrt[3]{0,08}$
b) $\log 5$	e) $\log 0,625$	h) $\log \sqrt[3]{16}$	k) $\log 0,08$	n) $\log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4}$
c) $\log 32/5$	f) $\log 250$	i) $\log 16/5$	l) $\log \sqrt[5]{80}$	

(Soluc: **a)** $4\log 2$; **b)** $1-\log 2$; **c)** $-1+6\log 2$; **d)** $-2\log 2$; **e)** $1-4\log 2$; **f)** $3-2\log 2$; **g)** $-1-2\log 2$; **h)** $\frac{4}{3}\log 2$; **i)** $-1+5\log 2$;
j) $-2+5\log 2$; **k)** $-2+3\log 2$; **l)** $\frac{1}{5} + 3\log 2$; **m)** $-\frac{2}{3} + \log 2$; **n)** $1-\log 2$)

9. Expresar en función de $\ln 2$ o $\ln 3$:

a) $\ln 8$	b) $\ln \frac{e}{2}$	c) $\ln \frac{e^3}{4}$	d) $\ln \frac{4}{\sqrt{e}}$	e) $\ln \frac{9e^3}{\sqrt[3]{3e}}$	f) $\ln \sqrt{2e}$	g) $\ln \frac{9e}{\sqrt[3]{3e}}$	h) $\ln \frac{9e^3}{\sqrt[3]{3e}}$
------------	----------------------	------------------------	-----------------------------	------------------------------------	--------------------	----------------------------------	------------------------------------

(Soluc: **a)** $3\ln 2$; **b)** $1-\ln 2$; **c)** $3-2\ln 2$; **d)** $-\frac{1}{2} + 2\ln 2$; **e)** $3+2\ln 3$; **f)** $\frac{1+\ln 2}{2}$; **g)** $\frac{5}{3}\ln 3 + \frac{2}{3}$; **h)** $\frac{8}{3} + \frac{5}{3}\ln 3$)

10. Expresar en función de $\log 2$ y $\log 3$ los logaritmos siguientes, y comprobar con la calculadora:

a) $\log 25$	d) $\log 9/4$	g) $\log 162$	j) $\log 90$	m) $\log \sqrt{3,6}$
b) $\log 24$	e) $\log \sqrt[3]{6}$	h) $\log 3,6$	k) $\log 0,27$	
c) $\log 4/3$	f) $\log 30$	i) $\log 1,2$	l) $\log 0,72$	

(Sol: **a)** $2-2\log 2$; **b)** $3\log 2 + \log 3$; **c)** $2\log 2 - \log 3$; **d)** $2\log 3 - 2\log 2$; **e)** $\frac{\log 2 + \log 3}{3}$; **f)** $1+\log 3$; **g)** $\log 2 + 4\log 3$;
h) $-1+2\log 2 + 2\log 3$; **i)** $-1+2\log 2 + \log 3$; **j)** $1+2\log 3$; **k)** $-2+3\log 3$; **l)** $-2+3\log 2 + 2\log 3$; **m)** $-1/2 + \log 2 + \log 3$)

11. Expresar en función de $\log 2$, $\log 3$ y $\log 7$ los logaritmos siguientes:

a) $\log 84$	b) $\log 0,128$	c) $\log 0,125$	d) $\log 14,4$	e) $\log \sqrt[3]{12}$
--------------	-----------------	-----------------	----------------	------------------------

12. Calcular: a) $e^{5\ln 2}$ (Sol: 32)	c) $2e^{\ln 3 - \ln 2}$ (Sol: 3)
b) $e^{4\ln 2} - 5e^{3\ln 2} + 5e^{2\ln 2} + 5e^{\ln 2}$ (Sol: 6)	d) $9e^{-3\ln 3} - 8e^{-2\ln 3} + e^{-\ln 3}$ (Sol: -2/9)

13. Justificar las siguientes igualdades:

a) $\frac{\log 6 + \log 2}{\log 9 + \log 8 - \log 6} = 1$	b) $\log 125 = 3(1 - \log 2)$	c) $\frac{\log 6 + \log 3 - \log 2}{\log 9 - \log 3} = 2$	d) $10^{-2\log 2} = \frac{1}{4}$
e) $\frac{1 + \log 8}{\log 5 + 2\log 4} = 1$	(*) f) $4^{\log 3 / \log 2} = 9$	g) $4\log \sqrt[3]{80} - 1 = \log 4 + \log (2\log \sqrt[3]{80})$	

14. Sabiendo que $\log 7,354 = 0,866524\dots$, hallar (sin calculadora):

- a) $\log 735,4$ b) $\log 0,007354$ c) $\log 7354$

15. Utilizando las fórmulas del cálculo logarítmico, desarrollar al máximo las expresiones siguientes:

- | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|--|---|
| a) $\log (2x)^3$ | g) $\log \frac{mnp}{qr}$ | l) $\ln \sqrt{x^3}$ | q) $\log (10 \sqrt[3]{x})$ |
| b) $\log (2x^3)$ | h) $\log a^{3/4}$ | m) $\log (x^2 - y^2)$ | r) $\log \sqrt{\frac{a^2 b^3 c^5}{mp}}$ |
| c) $\log \left(\frac{2x}{y}\right)^2$ | i) $\log \left(\frac{mn}{p}\right)^r$ | n) $\log \sqrt{\frac{m^n}{pq^r}}$ | s) $\log (x^n y^m)$ |
| d) $\ln (ax^2)$ | j) $\ln \frac{1}{ex}$ | o) $\log \sqrt{m^2 - n^2}$ | t) $\log \frac{2m^2 n^3}{pq^4}$ |
| e) $\ln (ax)^2$ | k) $\log \sqrt{mn}$ | p) $\log \frac{m^2 - x^2}{\sqrt{m^2 + x^2}}$ | u) $\ln \frac{\sqrt{x}}{x}$ |
| f) $\log \sqrt[3]{c}$ | | | |

(Sol: a) $3 \log 2 + 3 \log x$; b) $\log 2 + 3 \log x$; c) $2 \log 2 + 2 \log x - 2 \log y$; d) $\ln a + 2 \ln x$; e) $2 \ln a + 2 \ln x$; f) $\frac{1}{3} \log c$;
g) $\log m + \log n + \log p - \log q - \log r$; h) $\frac{3}{4} \log a$; i) $r \log m + r \log n - r \log p$; j) $-1 - \ln x$; k) $\frac{\log m + \log n}{2}$; l) $\frac{3}{2} \ln x$;
m) $\log(x+y) + \log(x-y)$; n) $\frac{n \log m - \log p - r \log q}{2}$; o) $\frac{\log(m+n) + \log(m-n)}{2}$; p) $\log(m+x) + \log(m-x) - \frac{1}{2} \log(m^2 + x^2)$;
q) $1 + \frac{\log x}{3}$; r) $\frac{2 \log a + 3 \log b + 5 \log c - \log m - \log p}{2}$; s) $n \log x + m \log y$; t) $\log 2 + 2 \log m + 3 \log n - \log p - 4 \log q$;
u) $-\frac{1}{2} \ln x$)

16. Obtener x en las siguientes expresiones:

- a) $e^x = 3$ (Soluc: $x = \ln 3$)
b) $\log x = 1 + 2 \log a$ (Soluc: $x = 10 a^2$)
c) $\log x = 2(\log a + 3 \log b) - \frac{1}{2}(2 \log c + \log d)$ (Soluc: $x = \frac{a^2 b^6}{c \sqrt{d}}$)
d) $\ln x = \frac{\ln a + 2 \ln b}{2} - 3(2 \ln a - \ln b)$ (Soluc: $x = \frac{b^4 \sqrt{a}}{a^6}$)

17. Sabiendo que $x=7$ e $y=3$, utilizar la calculadora para hallar:

- a) $\log x^2$ b) $\log (2x)$ c) $\log^2 x$ d) $\log (x+y)$ e) $\log x + y$ f) $\log \frac{x+y}{2}$ g) $\frac{\log (x+y)}{2}$

18. a) Hallar a sabiendo que $\log_7 \frac{a}{b} + \log_7 b = 2$ (Soluc: $a=49$)

b) Si $\log_4 N=3$, ¿cuánto vale $\log_4 \frac{\sqrt[3]{N}}{N^3}$? ¿Cuánto vale N ? (Soluc: -8 ; $N=64$)

19. a) ¿En qué base a se cumple que $\log_a 12 + \log_a 3 = 2$? (Soluc: $a=6$)

b) ¿En qué base x se verifica que $\log_x 2 = 100$? (Soluc: $x = \sqrt[100]{2}$)

20. ¿V o F? Razonar la respuesta:

- a) $\log (A+B) = \log A + \log B$ b) $\log (A^2 + B^2) = 2 \log A + 2 \log B$

c) $\frac{\ln 2x}{2} = \ln x$

d) $\ln \frac{2x}{2} = \ln x$

e) $\log \frac{AB}{C} = \frac{\log(AB)}{\log C}$

f) El logaritmo de un número siempre da como resultado un número irracional.

g) Los logaritmos decimales de números <1 son negativos; en caso contrario, son positivos.

21. CURIOSIDAD MATEMÁTICA: Comprobar la veracidad de la siguiente fórmula, debida al físico británico Paul Dirac (1902-1984), que permite escribir cualquier número N empleando solamente tres dígitos:

$$N = -\log_2 \log_2 \sqrt[N \text{ raíces}]{\sqrt{2}}$$

22. ¿Cuáles son los números cuyos logaritmos decimales están comprendidos entre 0 y 2? ¿Y entre 0 y -2?
(Soluc: 1 y 100; 0,01 y 1)

23. a) Razonar entre qué dos números enteros está $\log_2 1000$. Comprobar el resultado con la calculadora.

b) Ídem con $\log 650$.

c) Sin usar calculadora, razonar que $\log 7$ y $\log 1/7$ son opuestos. Una vez resuelto, compruébese mediante calculadora.

Ecuaciones exponenciales:

24. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales por el método más apropiado, y comprobar el resultado en cada caso:

1. $3^x = 48$ (Soluc: $x \approx 3,5237$)

2. $2^x = \frac{8}{27}$ (Soluc: $x \approx -1,7549$)

3. $2^{x+1} + 4 = 80$ (Soluc: $x \approx 5,2479$)

4. $2 \cdot 3^x - 3^{2x} + 3 = 0$ (Soluc: $x=1$)

5. $3^{x-1} + 3^{x+1} - 3^x = 63$ (Soluc: $x=3$)

6. $2^{2x-3} = 8^{x+1}$ (Soluc: $x=-6$)

7. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ (Soluc: $x=2$)

8. $2^{x-3} = -3$ (Soluc: $\nexists$ soluc.)

9. $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$ (Soluc: $x=2$)

10. $2e^{x-4} = 3$ (Soluc: $x \approx 4,4055$)

11. $2 + e^{x-4} = 3$ (Soluc: $x=4$)

12. $100 \cdot 10^x = \sqrt[5]{1000^5}$ (Soluc: $x=3$)

13. $3^{x/2} = 768$ (Soluc: $x \approx 12,0949$)

14. $4^{x^2+2} = 2^{-2}$ (Soluc: $\nexists$ soluc.)

15. $3^{2x+5} = 3^7$ (Soluc: $x=1$)

16. $\frac{1}{e^x} = 27$ (Soluc: $x \approx -3,2958$)

17. $5^{x^2-5x+6} = 1$ (Soluc: $x_1=2, x_2=3$)

18. $3^x \cdot (3^2)^x = 9^3$ (Soluc: $x=2$)

19. $e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2 = 0$ (Soluc: $x=1$)

20. $2^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ (Soluc: $x \approx 0,8301$)

21. $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$ (Soluc: $x=-2$)

22. $e^{4x} - 5e^{3x} + 5e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$ (Soluc: $x_1=0, x_2=\ln 2; x_3=\ln 3$)

23. $2^{x+1} = 4^{2x-4}$ (Soluc: $x=3$)

24. $e^{x-1} = 0$ (Soluc: $\nexists$ soluc.)

25. $x^2 e^x - 5x e^x + 6e^x = 0$ (Sol: $x_1=2, x_2=3$)

26. $3^{2x} \cdot 2^{3x-1} = 6^{x+1}$ (Soluc: $x=1$)

27. $e^{4x-x^2} = e^3$ (Sol: $x_1=1, x_2=3$)

28. $2^{x-3} = 3^{x+1}$ (Soluc: $x \approx -7,8380$)

29. $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$ (Soluc: $x_1=1, x_2=2$)

30. $3^{2x-4} = 729$ (Soluc: $x=5$)

- | | |
|--|--|
| 31. $e^{x-9} = \sqrt{73}$ (Soluc: $x \approx 11,1452$) | 44. $2^{x+1} = 3^{x-1} \cdot 4^x$ (Soluc: $x=1$) |
| 32. $2^{x+9} = 3^x$ (Soluc: $x \approx 15,38$) | 45. $9^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 27$ (Soluc: $x=1$) |
| 33. $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$ (Soluc: $x = \pm 2$) | 46. $4^x - 2 \cdot 2^{x-1} = 6$ (Soluc: $x \approx 1,5850$) |
| 34. $10^{3-x} = 1$ (Soluc: $x=3$) | 47. $11 \cdot 3^x - 9^x = 18$ (Soluc: $x=2, x = \log 2 / \log 3$) |
| 35. $3^x + 3^{1-x} = 4$ (Soluc: $x_1=0, x_2=1$) | 48. $x^{x^2+1} = 0$ (Soluc: $x=0$) |
| 36. (*) $e^{x+2} + e^{x-1} = e^{2x} + e$ (Soluc: $x_1=-1, x_2=2$) | 49. $x^{x^2+1} = 1$ (Soluc: $\nexists$ soluc.) |
| 37. $2^{x/2} = 768$ | 50. $3^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1}$ (Soluc: $x=-2$) |
| 38. $\sqrt{x} = a^x$ (Soluc: $x=1$) | 51. $2^{2x-1} - 16 = 2^{x+1}$ (Soluc: $x=3$) |
| 39. $e^{2x} - 2e^x + 2 = 0$ (Soluc: $\nexists$ soluc.) | 52. $e^{2x} = e^x + 6$ (Soluc: $x = \ln 3$) |
| 40. $4^x - 14 \cdot 2^{x-1} + 12 = 0$ (Sol: $x=2, x = \log 3 / \log 2$) | 53. $e^{2x} + e = (e+1)e^x$ (Sol: $x=0, x=1$) |
| 41. $2^{x-1} \cdot 3^{1-x} = 5^{2x-2}$ (Soluc: $x=1$) | 54. $e^{2x} = 2 - e^x$ (Soluc: $x=0$) |
| 42. $2^{2x} = 4^{x^2}$ (Soluc: $x_1=0, x_2=1$) | 55. $e^{2x} = 2e^x$ (Soluc: $x = \ln 2$) |
| 43. $2^{x+1} \cdot 3^{x-1} = 4^x$ (Soluc: $x=1$) | |

25. Considérese la siguiente fórmula:

$$U = P(\rho + V)^{-1/D}$$

Despejar ρ (Ayuda: no es necesario utilizar logaritmos)

(Soluc: $\rho = \frac{U^{-D}}{P} - V$)

26. Sin necesidad de operar, razonar que ecuaciones del tipo:

$$2^x + 3^x = 0$$

$$4^{x-2} + 2^{x^2+1} + 2 = 0$$

$$x^2 + 5^x = 0, \text{ etc.}$$

no pueden tener solución.

Ecuaciones logarítmicas:

27. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas, comprobando la validez de las soluciones obtenidas:

- | | |
|---|---|
| a) $2 \log x - \log(x+6) = 3 \log 2$ | (Soluc: $x=12$) |
| b) $4 \log_2(x^2+1) = \log_2 625$ | (Soluc: $x = \pm 2$) |
| c) $\log(x^2+1) - \log(x^2-1) = \log \frac{13}{12}$ | (Soluc: $x = \pm 5$) |
| d) $\log(x-1) = 2$ | (Soluc: $x=101$) |
| e) $\ln(x+2) = 1$ | (Soluc: $x=e-2$) |
| f) $\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln 3 + \ln(x-1)$ | (Soluc: $x=5$) |
| g) $2 \log^2 x + 7 \log x - 9 = 0$ | (Soluc: $x_1 = 10; x_2 = \sqrt{10} / 10^5$) ← Ayuda: aplicar un cambio de variable |
| h) $2 \log x^2 + 7 \log x - 9 = 0$ | (Soluc: $x = \sqrt[10]{10^9}$) |
| i) $2 \ln(x-3) = \ln x - \ln 4$ | (Soluc: $x=4$) |
| j) $\log(x+3) - \log(x-6) = 1$ | (Soluc: $x=7$) |

- | | |
|---|--|
| k) $\ln^2 x = \ln x$ | (Soluc: $x_1=e; x_2=1$) ← Ayuda: aplicar un cambio de variable |
| l) $\log 10^{x-1}=2$ | (Soluc: $x=3$) |
| m) $\log (x+9)=2+\log x$ | (Soluc: $x=1/11$) |
| n) $\log (x+1)+\log (x-1)=1/100$ | (Soluc : $x = \sqrt{1 + \sqrt[100]{10}}$) |
| o) $\log^2 x = 1$ | (Soluc: $x_1=10; x_2=1/10$) ← Ayuda: puede ser útil un cambio de variable |
| p) $\log \sqrt{3x+5} + \log \sqrt{x} = 1$ | (Soluc: $x=5$) |
| q) $\log (x^2-7x+110)=2$ | (Soluc: $x_1=2; x_2=5$) |
| r) $2 \ln x+3 \ln (x+1)=3 \ln 2$ | (Soluc: $x=1$) |
| s) $\log (x^2+3x+36)=1+\log (x+3)$ | (Soluc: $x_1=1; x_2=6$) |
| t) $\ln x+\ln 2x +\ln 4x=3$ | (Soluc: $x=e/2$) |
| u) $\log^3 x - \log^2 x - \log x^2 = 0$ | (Soluc: $x_1=1; x_2=100; x_3=-1/10$) ← Ayuda: aplicar un cambio de variable |
| v) $4 \log x - 2 \log (x-1) = 2 \log 4$ | (Soluc: $x=2$) |
| w) $\ln (x-1)+\ln (x+6)=\ln (3x+2)$ | (Soluc: $x=2$) |
| x) $2 \log x + \log (x-1) = 2$ | (Soluc: $x=5$) |
| y) $2 \log (x+9) - \log x = 2$ | (Soluc: $x \approx 1,81$) |
| z) $\log (2x+6) - 1 = 2 \log (x-1)$ | (Soluc: $x_1=2; x_2=1/5$) |
| α) $\log (x+11) - 2 \log x = 1$ | (Soluc: $x=11/10$) |
| β) $\log (6x-1) - \log (x+4) = \log x$ | (Soluc: $x=1$) |
| γ) $\log x^2 + \log x^3 = 5$ | (Soluc: $x=10$) |

Sistemas de ecuaciones exponenciales y/o logarítmicas:

28. Resolver los siguientes sistemas, comprobando la validez de las soluciones obtenidas:

- | | |
|---|-----------------------|
| a) $\left. \begin{aligned} a^x a^y &= 1 \\ \frac{a^{2x}}{a^y} &= a^3 \end{aligned} \right\}$ | (Soluc: $x=1, y=-1$) |
| b) $\left. \begin{aligned} \sqrt{3^{x-y}} &= 81 \\ 5x + 2y &= 5 \end{aligned} \right\}$ | (Soluc: $x=3, y=-5$) |
| c) $\left. \begin{aligned} 3^{x-1} - 2 \cdot 5^y &= 1 \\ 2 \cdot 9^x + 25^y &= 163 \end{aligned} \right\}$ | (Soluc: $x=2, y=0$) |
| d) $\left. \begin{aligned} 3 \cdot 2^x &= 24 \\ 4^{x+1} - 3 \cdot 7^{y+3} &= 235 \end{aligned} \right\}$ | (Soluc: $x=3, y=-2$) |
| e) $\left. \begin{aligned} \log x + \log y &= 1 \\ 3 \log x - 2 \log y &= 3 \end{aligned} \right\}$ | (Soluc: $x=10, y=1$) |
| f) $\left. \begin{aligned} \log_x (2-y) &= 2 \\ \log_x (5x+2y) &= 0 \end{aligned} \right\}$ | (Soluc: $x=3, y=-7$) |
| g) $\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \log x + \log y &= \log 35 \\ \log (x+1) - \log y &= 1 \end{aligned} \right\}$ | (Soluc: $x=49, y=5$) |

Problemas de aplicación:

29. Se deja a temperatura ambiente una muestra de café, y se observa que su temperatura en °C disminuye con el tiempo de acuerdo con la siguiente función:

$$T(t) = 24 + 51e^{-0,106t}$$

donde t viene dado en minutos.

- ¿Cuál es la temperatura inicial del café?
- Si la temperatura óptima para tomar el café es de 56°, entre qué minutos se deberá tomar el café.
(Soluc: entre 4' y 5')
- ¿En qué temperatura se estabilizará el café?
- Dibujar la gráfica de dicha función.

30. a) Demostrar que la función que permite calcular en cuánto se convierte un capital C_0 acumulado al cabo de t años con un interés i es:

$$C(t) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t, \text{ en } \text{€}$$

donde: C_0 es el capital inicial, en €

i es el interés anual, en %

- ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 6 años si colocamos a plazo fijo 20 000 € al 2%? (Soluc: 22 523 €)
- ¿Cuántos años debemos mantener 100 000 € en una entidad bancaria a una tasa del 2,5% si queremos duplicar el capital? ¿Es relevante el dato del capital inicial? (Soluc: 28 años; NO)
- Una persona que tiene depositada en una caja de ahorros 30 000 € a una tasa del 3% quiere llegar a tener 40 000 €. ¿Cuánto tiempo deberá mantener intacto el capital? (Soluc: 9 años y 9 meses)

31. a) Demostrar que la función que expresa el volumen de madera que tiene un bosque al cabo de t años es:

$$M(t) = M_0 \cdot (1+I)^t, \text{ en } m^3$$

donde: M_0 es el volumen inicial de madera, en m^3

I es el crecimiento anual, en %

- Se calcula que un bosque tiene 12 000 m^3 de madera y que aumenta el 5% cada año. ¿Cuánta madera tendrá al cabo de 10 años si sigue creciendo en estas condiciones? (Soluc: $\approx 19546,7 m^3$)
- ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse el bosque? (Soluc: 14,21 años)

32. Algunos tipos de bacterias tienen un crecimiento de sus poblaciones muy rápido. La *escherichia coli* puede duplicar su población cada hora. a) Supongamos que hacemos un cultivo en el que inicialmente hay 5000 bacterias de este tipo. Construir una tabla para razonar que la función que nos da el número de bacterias al cabo de t horas es:

$$f(t) = 5000 \cdot 2^t$$

b) ¿Cuántas habrá al cabo de 16 horas? **c)** Dibujar una gráfica que represente el crecimiento en las 8 primeras horas. **d)** Si tenemos un cultivo de 100 bacterias y queremos conseguir un millón, ¿cuánto tiempo ha de transcurrir? (Soluc: **b)** 327 680 000 bacterias; **d)** $\cong 13$ horas y cuarto)

Cambio de base:

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

(fórmula del cambio de base)

33. Utilizando la fórmula del cambio de base se pide:

- a)** Demostrar que $\log_a b \cdot \log_b a = 1$
- b)** Hallar la relación entre el logaritmo neperiano y el logaritmo decimal.
- c)** Expresar $\log_2 x$ en función de $\log x$ (Soluc: $\log_2 x = 3,3219 \log x$)

34. a) Nuestra calculadora sólo dispone de logaritmos decimales. Usando la fórmula del cambio de base, hallar $\log_4 5$

b) Razonar que $\log_4 5$ es irracional.

35. Volver a hacer el ejercicio 3, pero utilizando esta vez la calculadora y la fórmula del cambio de base.

EJERCICIOS de REPASO de LOGARITMOS

1. Calcula la base a en cada caso.

a) $\log_a 49 = 2$ b) $\log_a 27 = -3$ c) $\log_a \left(\frac{1}{16}\right) = -4$

2. Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 81$ b) $\log_{\frac{1}{5}} 125$ c) $\log_2 (-4)$ d) $\log_7 7^6$

3. Si $\log_3 p = 5$ y $\log_3 q = -2$, calcula:

a) $\log_3 (p \cdot q)$ b) $\log_3 p^2$ c) $\log_3 (p \cdot q^3)$ d) $\log_3 \left(\frac{p^5}{q}\right)$

4. Expresa mediante un solo logaritmo:

a) $\log p + \log q - \log r$ b) $2 \log p - \log q - 1$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones **exponenciales**:

a) $2^{3x-5} = 1024$ b) $3^{2x^2-5x-3} = 1$ c) $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 112$ d) $7^x = 2$ e) $3^{2x-1} = 102$
 f) $\sqrt{4-2x+6} = \frac{1}{8}$ g) $25^{x-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ h) $9^{x-1} - 2 \cdot 3^x - 27 = 0$ i) $5^{x+1} = 6$ j) $6^{-x} + 6^{1-x} + 6^{2-x} + 6^{3-x} = 259$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones **logarítmicas**:

a) $\log (6x - 1) - \log (x + 4) = \log x$ b) $2 \log (x + 2) - \log (5x + 6) = 0$
 c) $\log (x + \sqrt{6}) + \log (x - \sqrt{6}) = 1$ d) $(x - 1) \log 2 + \log 8 = \log 4$
 e) $\log_3 9 - \log_3 x = 2$ f) $\log (x - 1) + \log x = \log 10$
 g) $\ln x = \ln 3 + 2 \ln 4 - \ln 2$ h) $5 \log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 x$

7. Representa gráficamente las siguientes funciones e indica las propiedades de cada una de ellas.

a) $f(x) = 2^{x+1}$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

8. Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 \frac{1}{27}$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ c) $\log_a a^5$ d) $\log_{\frac{1}{b}} b^{-2}$
 (Sol.: a) -3; b) -1; c) 5; d) 2)

9. Aplica la definición y las propiedades de los logaritmos para hallar el valor de x en estas expresiones.

a) $x = \log_2 64$ b) $\log_x \sqrt{3} = \frac{2}{5}$
 c) $x = \log_3 \frac{\sqrt{3}}{9}$ d) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$
 e) $x = \log_{16} 2$ f) $\log_{\frac{1}{3}} x = -5$
 g) $\log_x 5 = -3$ h) $x = \log_5 (\log_5 5)$
 (Sol.: a) 6; b) $\frac{-3}{2}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$; e) $3\sqrt[4]{3}$; f) $\frac{1}{2}$; g) 243; h) 0)

10. Si $\log a = 3$, $\log b = 5$ y $\log c = -2$, calcula:

a) $\log (a^2 \cdot b \cdot c^2)$ b) $\log \frac{b^2}{\sqrt{c}}$ c) $\log \frac{\sqrt{a} \cdot b}{c}$
 (Sol.: a) 7; b) 11; c) $\frac{17}{2}$)

- 11) Sabemos que $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$. Utiliza estos valores y las propiedades de los logaritmos para calcular:

a) $\log 6$ b) $\log 144$ c) $\log \frac{8}{81}$

(Sol.: a) 0,7781; b) 2,1582; c) -1,0054)

- 12) Sabemos que $\log 2 = 0,3010$ y $\log 5 = 0,6990$. Utiliza estos valores y las propiedades de los logaritmos para calcular:

a) $\log 200$ b) $\log 2,5$ c) $\log \sqrt{0,125}$

(Sol.: a) 2,3010; b) 0,3980; c) -0,4515)

- 13) Demuestra que $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

- 14) Representa gráficamente las siguientes funciones e indica las propiedades de cada una de ellas.

a) $f(x) = \log_2(x-1)$ c) $f(x) = 1 + \log_3 x$

b) $f(x) = \log \frac{1}{2}(x+2)$ d) $f(x) = \log \frac{x}{4,2}$

- 15) Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(3x-1)$ b) $f(x) = \log(x^2-9)$

(Sol.: a) $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$; b) $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$)

- 16) Comprueba que, si a y b son dos números inversos, se verifica $\log a + \log b = 0$.

- 17) Comprueba que los logaritmos decimales de 1,2; 12 y 120 sólo se diferencian en la parte entera.

- 18) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2 \cdot e^{x-4} = 3$ c) $\sqrt{3^{3x^2-2}} = 9$

b) $25 \cdot 5^{x+1} = \frac{1}{125}$ d) $7 \cdot 6^{x+2} = 32$

(Sol.: a) 4,41; b) -6;
c) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$; d) -1,15;

- 19) Escribe mediante un solo logaritmo las siguientes expresiones:

a) $3 \log 5 + \frac{1}{2} \log 9 - 3 \log 3 - \log 25$

b) $5 \ln x - \frac{1}{2} \ln y + 3 \ln z$

c) $\log_3(x^2 + 2x + 1) - \log_3(x+1)$

d) $\log(3-x) + \log(3+x)$

(Sol.: a) $\log \frac{5}{9}$; b) $\ln \frac{x^5 \cdot z^3}{\sqrt{y}}$;

c) $\log_3(x+1)$; d) $\log(9-x^2)$)

- 20) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log 4 - 2 \log 5 + \log(x+1) - \frac{1}{3} \log 8 = 1$

b) $\log x^3 - \log \frac{7x+8}{2} = \log 2x$

c) $3 \ln(x-1) - \ln(x^2-1) = -\ln 3$

(Sol.: a) $x = 124$; b) $x = 8$; c) $x = 2$)

- 21) Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} a^x \cdot a^y = 1 \\ \frac{a^{2x}}{a^y} = a^3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{3^{x-y}} = 81 \\ 5x + 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3^{x-1} - 2 \cdot 5^y = 1 \\ 2 \cdot 9^x + 25^y = 163 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x = 24 \\ 4^{x+1} - 3 \cdot 7^{y+3} = 235 \end{cases}$

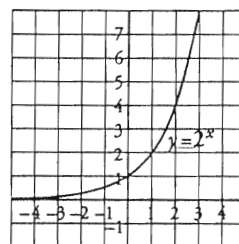
e) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 3 \log x - 2 \log y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \log_x(2-y) = 2 \\ \log_x(5x+2y) = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{1}{2} \log x + \log y = \log 35 \\ \log(x+1) - \log y = 1 \end{cases}$

(Sol.: a) $x = 1, y = -1$; b) $x = 3, y = -5$; c) $x = 2, y = 0$;
d) $x = 3, y = -2$; e) $x = 10, y = 1$; f) $x = 3, y = -7$;
g) $x = 49, y = 5$)

FUNCIONES EXPONENCIALES

- La función $y = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$), se llama **función exponencial**.
- Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$.
- Pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$.
- Su gráfica está siempre sobre el eje OX porque $a^x > 0$ para cualquier x .
- Es creciente si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$.



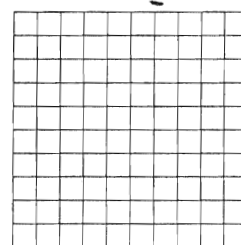
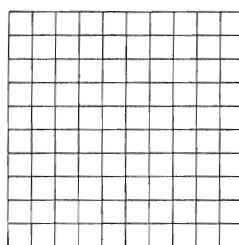
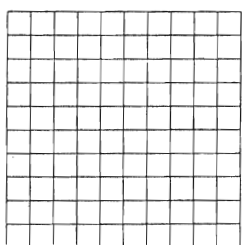
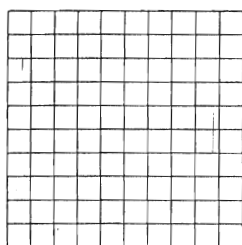
1 Representa las funciones:

a) $y = 3^x$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

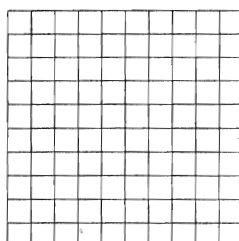
c) $y = 1,5^x$

d) $y = 0,75^x$



2 Representa en los mismos ejes las funciones:

$y = 4^x$ e $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ y comprueba que son simétricas respecto al eje OY .



3 Halla k y a para que la gráfica de $y = k \cdot a^x$ pase por los puntos $(0; 3,5)$ y $(1, 7)$.

EJERCICIO RESUELTO

Resuelve estas ecuaciones: a) $3^{2x+1} = 6561$

b) $2^{x-3} + 2^{x+1} = \frac{17}{4}$

RESOLUCIÓN

a) $3^{2x+1} = 6561 \rightarrow 3^{2x+1} = 3^8 \rightarrow 2x+1 = 8 \rightarrow 2x = 7 \rightarrow \boxed{x = 7/2}$

b) $2^{x-3} + 2^{x+1} = \frac{17}{4} \rightarrow 2^x/2^3 + 2^x \cdot 2^1 = \frac{17}{4} \rightarrow \frac{2^x}{8} + 2^x \cdot 2 = \frac{17}{4} \rightarrow 2^x + 16 \cdot 2^x = 34$

Cambio: $y = 2^x \rightarrow y + 16y = 34 \rightarrow 17y = 34 \rightarrow y = 2 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow \boxed{x = 1}$

4 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $0,5^x = 32$ (Soluc: $x = -5$)

b) $2^{4-x} + 2^{2+x} - 20 = 0$ (Soluc: $x_1 = 0, x_2 = 2$)

c) $3^{x^2-2x+1} = 1$ (Soluc: $x = 1$)

d) $3^{2x-1} - 3^{x-1} = 2$ (Soluc: $x = 1$)

Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita aparece en el exponente de alguna potencia.

Las formas de proceder para su resolución son variadas y se ilustran, a continuación, con varios ejemplos.

Ejercicios resueltos

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $5^{3x-2} = 2$

b) $2^{2x-1} - 16 = 2^{x+1}$

c) $9^{x-1} - 2 \cdot 3^{x-1} = 3$

a) Tomamos logaritmos en ambos miembros:

$$(3x-2)\log 5 = \log 2 \Rightarrow 3x-2 = \frac{\log 2}{\log 5} \Rightarrow 3x = 2 + \frac{\log 2}{\log 5} \Rightarrow x = \frac{2 + \frac{\log 2}{\log 5}}{3} \approx 0,8102 \dots$$

b) Si $y = 2^x$, entonces:

$$2^{2x-1} = \frac{2^{2x}}{2} = \frac{1}{2} (2^x)^2 = \frac{1}{2} y^2 \quad 2^{x+1} = 2^x \cdot 2 = 2y$$

por tanto, al hacer el cambio $y = 2^x$ en la ecuación, se tiene:

$$\frac{1}{2} y^2 - 16 = 2y \Rightarrow y^2 - 4y - 32 = 0 \Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{2} = \frac{4 \pm 12}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \\ y = -4 \Rightarrow 2^x = -4 \end{cases}$$

La única solución es $x = 3$, pues la expresión $2^x = -4$ no admite soluciones reales.

c) Si $y = 3^x$, entonces:

$$9^{x-1} = \frac{1}{9} 9^x = \frac{1}{9} (3^x)^2 = \frac{1}{9} y^2 \quad 3^{x-1} = \frac{1}{3} 3^x = \frac{1}{3} y$$

por tanto, si se hace el cambio $y = 3^x$ en la ecuación, se tiene:

$$\frac{1}{9} y^2 - \frac{2}{3} y = 3 \Rightarrow y^2 - 6y - 27 = 0 \Rightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2} = \frac{6 \pm 12}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \\ y = -3 \Rightarrow 3^x = -3 \end{cases}$$

La única solución es $x = 2$, pues la expresión $3^x = -3$ no admite soluciones reales.

Ejercicios propuestos

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x^2+1} = 32$

b) $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+1} = 27$

c) $4^{x-1} + 2^x = 6 \cdot 2^{x-1}$

(Solución: a) ± 2 ; b) 2; c) 3.)

Autoevaluación

Resuelve las ecuaciones exponenciales:

a) $3^{2x^2+3x} = 9$

b) $5^{2x+1} - 3 \cdot 5^x = 2$

(Soluc: $x_1 = -2$; $x_2 = \frac{1}{2}$)

(Soluc: $x = 0$)

ECUACIONES EXPONENCIALES

En las ecuaciones exponenciales, la incógnita aparece en el exponente.

No hay regla general para resolverlas, pero normalmente conviene tener en cuenta las propiedades de las potencias:

Si $a, b > 0$

m, n son números racionales

$$a^0 = 1, a^1 = a$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$(a : b)^m = a^m : b^m$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Si $a^m = a^n$ entonces

$m = n$

Ejemplos:

- Resolver $4^x = 2$

$$(2^2)^x = 2; 2^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 1; \boxed{x = 1/2}$$

- Resolver $5^x + 5^{1-x} = 6$

$$5^x + \frac{5^1}{5^x} = 6 \quad \text{Reduciendo a común denominador}$$

$$5^x \cdot 5^x + 5^1 = 6 \cdot 5^x$$

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0; \text{ haciendo } 5^x = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$$

Resolviendo queda $t = 1$ y $t = 5$

$$5^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

- Resolver $3^{1-x} - 3^x = 2$

$$\frac{3^1}{3^x} - 3^x - 2 = 0$$

$$3^1 - (3^x)^2 - 2 \cdot 3^x = 0$$

$$(3^x)^2 + 2 \cdot 3^x - 3 = 0; \text{ haciendo } 3^x = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$$

Resolviendo queda $t = 1$ y $t = -3$

$$3^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$3^x = -3$ —————> Esta solución no es válida porque no hay ningún número positivo que elevado a otro dé como resultado un número negativo.

$$\square \quad 2^{x^2-1} = 24$$

Como 24 no lo podemos expresar como potencia de 2, tomamos logaritmos.

$$\log 2^{x^2-1} = \log 24 \Rightarrow (x^2 - 1)\log 2 = \log 24 \Rightarrow x^2 - 1 = \frac{\log 24}{\log 2} \Rightarrow x^2 = \frac{\log 24}{\log 2} + 1$$

$$x^2 = \frac{1,380211}{0,301030} + 1 = 4,584962 + 1 = 5,584962$$

$$x \approx \begin{cases} 2,363252... \\ -2,363252... \end{cases}$$

$$\square \quad 3^{x+1} = 7$$

$$\log 3^{x+1} = \log 7 \Rightarrow (x+1)\log 3 = \log 7 \Rightarrow x+1 = \frac{\log 7}{\log 3} \Rightarrow x = \frac{\log 7}{\log 3} - 1 \approx -0,6320..$$

SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES

$$\left. \begin{aligned} 2^x + 5^y &= 9 \\ 2^{x-1} + 5^{y+1} &= 9 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2^x + 5^y &= 9 \\ \frac{2^x}{2} + 5 \cdot 5^y &= 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2^x + 5^y &= 9 \\ 2^x + 10 \cdot 5^y &= 18 \end{aligned} \right\}$$

Haciendo un cambio de variable $2^x = a$ y $5^y = b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a + b &= 9 \\ a + 10 \cdot b &= 18 \end{aligned} \right\} \text{ Resolviendo el sistema queda } a = 8 \quad b = 1$$

Deshaciendo el cambio:

$$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$5^y = 1 \Rightarrow 5^y = 5^0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

$$\left. \begin{aligned} 2 \log x - 3 \log y &= 7 \\ \log x + \log y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \log x^2 - \log y^3 &= \log 10^7 \\ \log xy &= \log 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{x^2}{y^3} &= 10^7 \\ xy &= 10 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Resolviendo el sistema queda } \boxed{x = 100} \quad \boxed{y = \frac{1}{10}}$$

EJERCICIOS DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y comprueba:

a) $3 \cdot 3^x = 243$

b) $2^{2x+2} = 0,5^{2x-1}$

c) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

d) $3^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1}$

e) $2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 18$

f) $4^x \cdot 16^x = 2$

g) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

h) $7^{x^2-5x+6} = 1$

i) $3^{2(x+1)} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$

j) $9^{x+3} = 3^{2x+5}$

k) $3^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 4$

l) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

m) $4^x - 2^x = 2$

n) $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$

o) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

p) $16^x + 16^{1-x} - 10 = 0$

q) $5^{2x-1} = 25x^{2-\frac{1}{4}}$

r) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

s) $2^x + 5 \cdot 2^{-x} + 4 \cdot 2^{-3x} = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas y comprueba:

a) $\log x + \log 50 = \log 1000$

b) $\log x^3 = \log 6 + 2 \log x$

c) $\log(3x - 1) - \log(2x + 3) = 1 - \log 25$

d) $\log 8 + (x^2 - 5x + 7) \log 3 = \log 24$

e) $\log(5x + 4) - \log 2 = \frac{1}{2} \log(x + 4)$

f) $(x^2 - x - 3) \log 4 = 3 \log \frac{1}{4}$

g) $\frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$

h) $\log x^2 + \log x^3 = 5$

i) $(x^2 - 4x + 7) \log 5 + \log 16 = 4$

j) $\log(2^{2-x})^{2+x} + \log 1250 = 4$

k) $\frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2$

l) $\log x^2 - \log \frac{10x + 11}{10} = 1$

m) $5^{2x} - 97 \cdot 5^x + 6^4 = 0$

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y comprueba:

$$\text{a)} \begin{cases} 5^{x+y} = 25^3 \\ 5^{x-y} = 25 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{x+1} - 3^{y+1} = -1 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x-1} + 5^{y+1} = 9 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases}$$

$$\text{g)} \begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 2^x - 3^{y-1} = 5 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 712 \end{cases}$$

4. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y comprueba:

$$\text{a)} \begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

$$\text{h)} \begin{cases} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log \frac{x^2}{4} = 3 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$\text{i)} \begin{cases} x - y = 27 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} \log_x (y - 18) = 2 \\ \log_y (x + 3) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{j)} \begin{cases} 2 \log 5 + y \log 25 = x \log 125 \\ x \log 4 - 2y \log 8 = \frac{1}{2} \log 64 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} x - y = 8 \\ \log_2 x = 7 - \log_2 y \end{cases}$$

$$\text{k)} \begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} x + y = 29 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

$$\text{l)} \begin{cases} \log_x (y + 8) = 2 \\ \log_y (x - 4) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} \log x = \log 5y + \log 14 - \log 7 \\ x^2 = 20y^2 + 15x + 20 \end{cases}$$

$$\text{m)} \begin{cases} \log_y (9 - x) = \frac{1}{2} \\ \log_x (y + 9) = 2 \end{cases}$$

$$\text{g)} \begin{cases} \log x - \log 5 = 3 \log 5 \\ \log x^3 + \log y^2 = \log 2^4 \end{cases}$$

EJERCICIOS DE AMPLIACIÓN DE ECUACIONES Y SISTEMAS

1. Resuelve la siguiente ecuación

$$e^{4x} - 5e^{3x} + 5e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 3^x \\ 2^x(x + y) = 7776 \end{cases}$$

3. Resuelve los siguientes sistemas

$$\begin{cases} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 33 \\ e^x \cdot e^y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 10\,000 \\ (x - y)^{\log(x+y)} = 1\,000 \end{cases}$$

4. Prueba la siguiente identidad: $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$

5. Demuestra que $\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$ para todo valor de $x \geq 1$

6. Despeja "y" en la igualdad $\log x + \log y = \log(x + y)$

LÍMITES DE FUNCIONES CONTINUIDAD



MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato CCNN

**Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas**



I) IDEA INTUITIVA DE $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Ejemplo 1: La función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ no está definida en $x=1$; investigar, rellenando las siguientes tablas (mediante calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar gráficamente la situación:

$x \rightarrow 1^-$	0,9	0,99	0,999...
$f(x) \rightarrow$			

$x \rightarrow 1^+$	1,1	1,01	1,001...
$f(x) \rightarrow$			

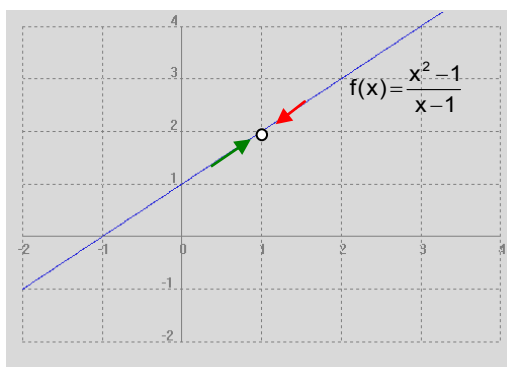
$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =}$$

NUMÉRICAMENTE

En la práctica, los límites no se suelen calcular de esta forma, sino operando:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

Es decir, nótese que la $f(x)$ del enunciado se comporta como la recta $y=x+1$, salvo en $x=1$ (punto en el cual no está definida); por lo tanto, su representación gráfica es:



ANALÍTICAMENTE

GRÁFICAMENTE

Vemos que cuando las x se acercan a 1^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^- , mientras que cuando las x se acercan a 1^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^+ . Y todo ello es independiente de que, exactamente en $x=1$, la función no está definida.

■ Conclusiones:

- 1º Para que exista límite han de coincidir los límites laterales.
- 2º A efectos de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, no hay que tener en cuenta lo que ocurre exactamente en $x=a$, sino en las proximidades; de hecho, hay casos en los que en un punto no existe imagen pero sí límite (como en el ejemplo anterior), y esta es precisamente la utilidad del concepto de límite.
- 3º De todos modos, normalmente existen límite e imagen, y ambos coinciden, como en el ejemplo 2, que veremos a continuación.

Reseña histórica: El inglés John Wallis (1616-1703) definió el límite de una función como un número al que se aproxima la función de modo que la diferencia entre este número y la función puede hacerse menor que cualquier cantidad fijada de antemano. Pero fue el alemán Weierstrass (1815-1897) quien definió el concepto de límite de una función de la manera precisa que conocemos hoy.

Ejemplo 2: Dada $f(x)=x^2$, obtener numéricamente, mediante las siguientes tablas, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$:

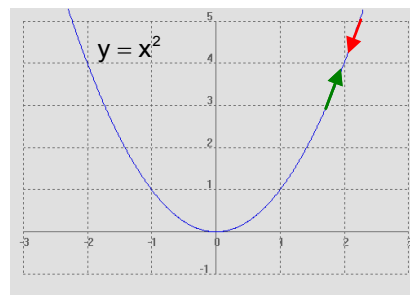
$x \rightarrow 2^-$	1,9	1,99	1,999...
$f(x) \rightarrow$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$x \rightarrow 2^+$	2,1	2,01	2,001...
$f(x) \rightarrow$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4}$$

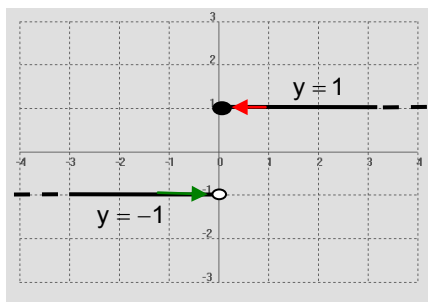


Es decir, cuando las x se acercan a 2^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^- , mientras que cuando las x se acercan a 2^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^+ . En este caso, la función sí está definida precisamente en $x=2$, y su valor es 4; es decir, **en este ejemplo límite e imagen coinciden (lo cual, por cierto, es lo más habitual)**. Analíticamente, sería muy sencillo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

■ Veamos ahora un ejemplo de función en el que no hay límite:

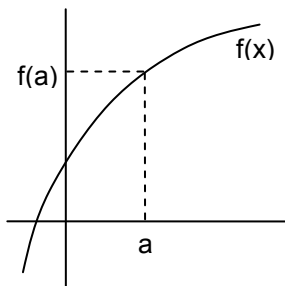
Ejemplo 3: Dada $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ se pide: **a)** Representarla. **b)** Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ gráficamente.



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)}$$

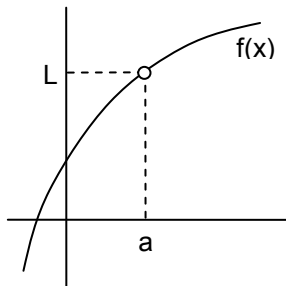
En este caso, al acercarnos a $x=0^-$ por la rama izquierda, las imágenes tienden exactamente a -1 (aunque precisamente en $x=0$ no tengan el valor esperado, sino 1; de nuevo, téngase en cuenta que a efectos del límite no hay que considerar lo que hace la función exactamente en el punto sino en sus proximidades...), mientras que al acercarnos a $x=0^+$ por la rama derecha, las imágenes tienden exactamente a 1. Por lo tanto, **como no coinciden los límites laterales, el límite global no existe**.

■ Podríamos ver más ejemplos, pero todos ellos se resumirían en alguno de los 4 casos del siguiente esquema; va a existir límite cuando $x \rightarrow a$ sólo en los tres primeros supuestos:



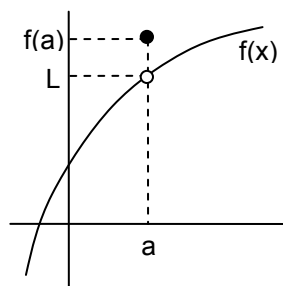
$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

[Lo más habitual]
(ejemplo 2)

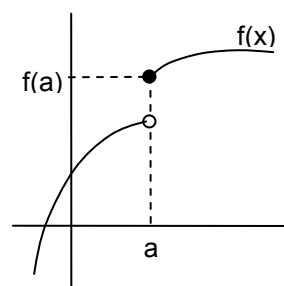


$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

[aunque $\nexists f(a)$]
(ejemplo 1)



$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq f(a)$$



$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

[aunque $\exists f(a)$]
(ejemplo 3)

Como resumen: «A efectos gráficos, no va a haber $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ si en $x=a$ las dos ramas no coinciden»

Ejercicios final tema: 1, 2, 3

II) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. ASÍNTOTA VERTICAL

Ejemplo 4: Vemos fácilmente que la función $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ no está definida en $x=3$; investigar, rellenando las siguientes tablas (inténtese sin calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar analítica y gráficamente la situación:

NUMÉRICAMENTE

$x \rightarrow 3^-$	2,9	2,99	2,999...
$f(x) \rightarrow$			

 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$

$x \rightarrow 3^+$	3,1	3,01	3,001...
$f(x) \rightarrow$			

 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$

 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$

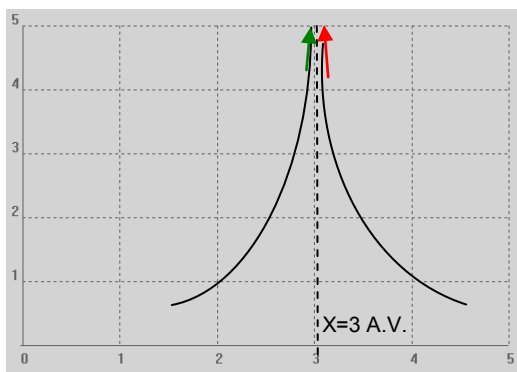
ANALÍTICAMENTE

En la práctica, se procede así¹:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$$

Gráficamente, la situación es la siguiente:

GRÁFICAMENTE



Es decir, cuando las x se acercan a 3^- (flecha izqda; rama izquierda) las imágenes correspondientes tienden a hacerse infinitamente grandes i.e. ∞ , y cuando las x se aproximan a 3^+ (flecha dcha.; rama derecha) las imágenes tienden también a ∞ . Y todo ello, volvemos a insistir, es independiente de que concretamente en $x=3$ la función no está definida. Esta es precisamente la **utilidad de la noción de límite**: incluso **aunque la función no esté definida en un punto, el límite da cuenta del comportamiento de la función en dicho punto**.

En el ejemplo anterior, se dice que $f(x)$ presenta una asíntota vertical en $x=3$.

¹ 0^+ o 0^- se conocen como *infinitésimos*.

■ Observaciones:

- 1º Cuando por sustitución directa en un límite obtengamos $k/0$, automáticamente tenemos que plantear límites laterales, para discernir si el denominador es 0^+ o 0^- , lo cual determinará si el límite finalmente es ∞ o $-\infty$ (en función también del signo de k).
- 2º Nótese que, a la hora de calcular un límite, en el momento en que sustituyamos en la función, desaparece el símbolo de $\lim$.

■ Definición de asíntota vertical:

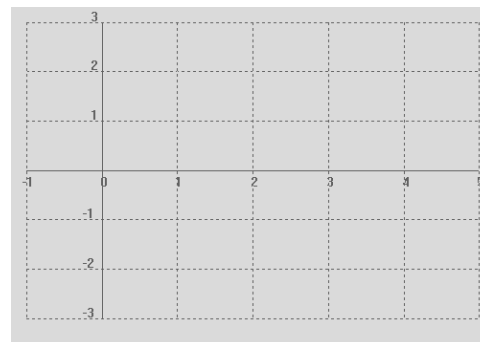
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x = a \text{ A.V.}$$

Ejemplo 5: Estudiar analíticamente $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ y explicar gráficamente la situación. ¿Qué asíntota vertical presenta la función?

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} =$$

$$\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \end{matrix} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} =$$



Ejercicios final tema: 4, 5

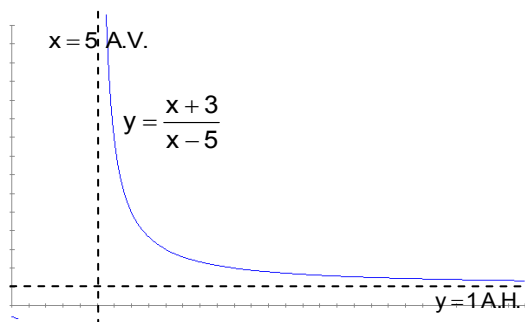
III) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. ASÍNTOTA HORIZONTAL

Ejemplo 6: Estudiar, mediante la siguiente tabla de valores, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x-5}$

x	100	1 000	10 000	100 000... ∞
$f(x) = \frac{x+3}{x-5}$				

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x-5} =$$

En la práctica, como $x \rightarrow \infty$, lógicamente podemos despreciar el efecto de sumar o restar un número finito a x , por lo cual podemos proceder de la siguiente forma:



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x-5} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Es decir, **cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$), nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado. ¡Nótese que esto sólo tiene sentido cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$)! Ésta será una técnica muy utilizada para calcular límites.

El símbolo $\approx$ se lee "equivalente a" y se utiliza cuando, a la hora de resolver una indeterminación, $x \rightarrow \infty$ y despreciamos una cantidad finita aditiva respecto a un ∞ .

Gráficamente, la situación está indicada al margen.

Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a aproximarse cada vez más a 1^+ , pero sin llegar a alcanzar jamás el valor 1. Se dice entonces que $f(x)$ presenta una asíntota horizontal de ecuación $y=1$. (Por cierto que, por las razones explicadas en el anterior apartado, también presenta una A.V. en $x=5$).

■ **Definición de asíntota horizontal:**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (0 - \infty)}} f(x) = L \Leftrightarrow y = L \text{ A.H.}$$

■ **Observaciones:**

- 1º La gráfica puede cortar a la A.H. para valores finitos de x
- 2º En cambio, la gráfica de una función nunca puede cortar a una A.V.
- 3º En el próximo tema veremos un tercer tipo: las asíntotas oblicuas

Ejercicios final tema: 6 a 8

IV) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. **RAMAS INFINITAS**

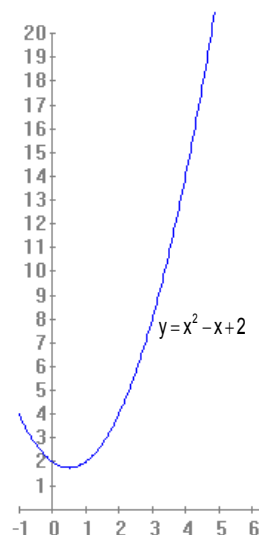
Ejemplo 7: Obtener $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 2)$ mediante la siguiente tabla de valores:

x	100	1000	10 000 ... ∞
$f(x) = x^2 - x + 2$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 2) =$$

Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a hacerse tan grandes como queramos, como queda reflejado en la gráfica adjunta. En la práctica, y como ya hemos comentado en el apartado anterior, **cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$) nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 2) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$



De nuevo, adviértase que esta forma de proceder sólo tiene sentido cuando $x \rightarrow \infty$ (o $-\infty$), no cuando x tiende a un número finito. En el ejemplo anterior, se dice además que $f(x)$ presenta una rama infinita.

■ **Regla práctica:**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (0 - \infty)}} P(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (0 - \infty)}} (\text{tº de mayor grado})$$

Ejercicio final tema: 9

V) **PROPIEDADES DE LOS LÍMITES²**

1º) «El límite –en caso de existir– es único»

² Todas estas propiedades son válidas independientemente de que $x \rightarrow \infty$ o a un valor finito. Pueden consultarse las demostraciones de estas propiedades en Internet.

2º) $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ es decir, «El límite de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de los límites».

3º) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ es decir, «El límite del producto es el producto de los límites».

4º) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ (siempre y cuando $\lim g(x) \neq 0$)

5º) $\lim k = k$ es decir, «El límite de una constante es igual a dicha constante»

6º) $\lim [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim f(x)$ es decir, «Las constantes multiplicativas pueden salir (o entrar) en el límite».

7º) Límite de una potencia: $\lim [f(x)]^{g(x)} = [\lim f(x)]^{\lim g(x)}$ Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = e^\infty = \infty$

8º) Límite de una raíz: $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$

9º) Límite de un logaritmo: $\lim \log f(x) = \log \lim f(x)$

VI) LÍMITES INFINITOS E INDETERMINACIONES

▪ SUMA Y RESTA: $\infty + \infty = \infty$ $\infty + k = \infty$ $\infty - \infty = \text{INDTDO.}$ $-\infty - \infty = -\infty$

Nótese que no podemos concluir que $\infty - \infty$ sea siempre igual a 0, puesto que ambos ∞ pueden ser, en general, de distinto orden³; por lo tanto, **el resultado de $\infty - \infty$ tendrá valores distintos dependiendo de cada ejemplo concreto, y se dice entonces que su resultado es indeterminado, o bien que se trata de una indeterminación.** La mayor parte de las indeterminaciones se deshacen operando. Veamos un sencillo ejemplo justificativo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2} - \frac{x}{2} \right) = \infty - \infty = \text{INDTDO.} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2-x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Es decir, en este caso concreto $\infty - \infty$ ha resultado ser igual a 1, pero veremos muchos más ejemplos en los que puede resultar otro número (incluido, por supuesto 0), o ∞ , o $-\infty$, o incluso no existir.

▪ PRODUCTO: $\infty \cdot \infty = \infty$ $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$ $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$ $\infty \cdot k = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 0 \\ \text{INDTDO.} & \text{si } k \rightarrow 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$

Veamos un ejemplo justificativo de la indeterminación anterior:

³ En el caso de una incógnita, sí es cierto que **a-a**, o **x-x**, etc. es obviamente igual a cero; ahora bien, adviértase que en el caso de $\infty - \infty$ estamos hablando de límites, es decir, ambos ∞ no tienen por qué ser exactamente iguales, sino que pueden ser de distinto orden.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{2} \cdot \frac{1}{x} \right) = \infty \cdot 0 = \text{INDTDO.} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{2x} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

▪ **COCIENTE:**

$$\frac{\infty}{k} = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 0 \\ \text{operar y/o hacer lim laterales} & \text{si } k \rightarrow 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases} \quad \frac{k}{\infty} = 0 \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{INDTDO.}$$

$$\frac{0}{0} = \text{INDTDO.} \quad \frac{k}{0} = \text{hacer lim laterales}$$

Veamos ejemplos prácticos de algunos de los casos anteriores:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{0} = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)x] = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2x) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+3}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3 = 3$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} \quad (\text{o bien, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} = \pm\infty)$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{(0^-)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{(0^+)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \infty$$

Como conclusión, hemos visto una serie de indeterminaciones que podemos resumir en cuatro⁴:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \infty - \infty$$

Ejercicio final tema: 10

VII) CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS

1º) Límites de polinomios: $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (t^{\circ} \text{ de mayor grado})$

Un ejemplo sería el ejercicio 7 ya realizado.

⁴ El próximo curso veremos las 3 indeterminaciones de tipo exponencial: $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$, 0^0

2º) Límites de cocientes de polinomios:

- a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$ «Se resuelve factorizando numerador y denominador (habitualmente por Ruffini, identidades notables, extraer factor común...) y eliminando a continuación el factor problemático $x-a$ que figura repetido en ambos términos de la fracción»

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x+1} = \frac{6}{3} = 2$$

Ejercicio final tema: 11

- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ «Se resuelve recurriendo en numerador y denominador a los términos de mayor grado de cada polinomio⁵»

Ejemplos: Hay tres posibilidades, atendiendo a los grados de ambos polinomios:

a) $\text{grad}P(x) = \text{grad}Q(x)$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x + 2}{2x^2 + 3x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$

b) $\text{grad}P(x) > \text{grad}Q(x)$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 3}{x + 3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$

c) $\text{grad}P(x) < \text{grad}Q(x)$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x^2 + x + 3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0^+$

Ejercicios final tema: 12, 13, 14 y 15

3º) Límites de funciones irracionales:

- a) $\frac{0}{0}$ «Se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado⁶ de la expresión radical, y operando a continuación»

(NOTA: Caso de existir dos expresiones radicales, una en el numerador y otra en el denominador, habría que realizar el procedimiento anterior dos veces, una por cada expresión)

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{0}{0} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) = 4$$

- b) $\frac{\infty}{\infty}$ «Se resuelve dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia efectiva⁷ de x que aparezca en cualquiera de las expresiones»

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \frac{1-0}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\frac{4}{\infty} = 0^+$
 $\frac{2}{\infty} = 0^+$

⁵ Existe otra forma alternativa, en general más laboriosa, que consiste en dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en ambos polinomios.

⁶ El conjugado de un binomio radical consiste en cambiar el signo intermedio de éste; por ejemplo, el conjugado de $\sqrt{x} + 2$ es $\sqrt{x} - 2$

⁷ El adjetivo «efectiva» alude al hecho de que hay que tener en cuenta que, por ejemplo, en la expresión $\sqrt{x^2-2}$, si $x \rightarrow \infty$, la x no se comporta como x^2 sino, de forma efectiva, como x

Obsérvese en el ejemplo anterior dos detalles importantes:

- La x entra dividiendo en una raíz cuadrada también dividiendo, pero al cuadrado.
- El hecho de dividir por la mayor potencia efectiva de x nos garantiza que los límites parciales que aparecen al final serán siempre cero.
- Estos límites, puesto que $x \rightarrow \infty$, se pueden hacer también despreciando términos de menor grado en los polinomios:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

c) $\infty - \infty$ «Se resuelve:

1º) Multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión radical, y operando a continuación; en algunos casos (en concreto, cuando el numerador resultante dependa de x), como la indeterminación no desaparece sino que pasa a ser ∞/∞ , además hay que recurrir al siguiente paso:

2º) Dividiendo a continuación numerador y denominador por la mayor potencia **efectiva** de x »

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) &= \infty - \infty = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - x) &= \infty - \infty = \text{INDTDO} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\frac{1}{\infty} = 0^+$

Nótese que en el primer ejemplo ha bastado con aplicar el primer paso del procedimiento, mientras que en el segundo ha habido que aplicar los dos pasos.

CONSEJO: En los casos en que $x \rightarrow -\infty$ y sale ∞/∞ , se recomienda hacer el cambio de variable $z=-x$, que hace que $z \rightarrow \infty$, como puede verse en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x}} &= \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \xrightarrow{\text{cambio de variable } x=-z} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+z}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}}{\frac{\sqrt{1+z}}{z}} = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{z^2}{z^2}}}{\sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{z}{z^2}}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{z^2} + 1}}{\sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}}} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{aligned}$$

$0^+ \quad 0^+ \quad 0^+$

Ejercicios final tema: 16, 17

VIII) CONTINUIDAD

Intuitivamente, una función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Más formalmente, se define **función continua en un punto** de la siguiente forma:

$$f(x) \text{ continua en } x=a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Es decir: “Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto”.

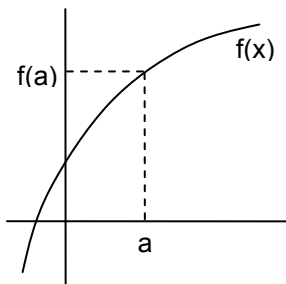
A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:

- 1) que exista imagen
- 2) que exista límite
- 3) y que ambos coincidan

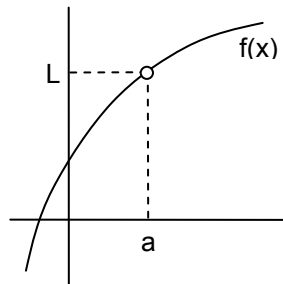
(En caso de no ser continua en un punto, se dice que es discontinua).

Por extensión, diremos que una función es **continua en un intervalo** cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

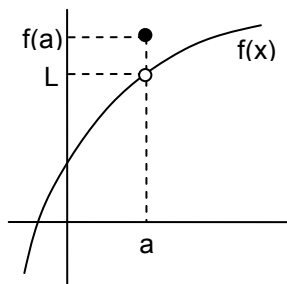
Vamos a recordar de nuevo el esquema-resumen visto en el apartado I del tema, e investigar en cada uno de los cuatro casos si la función es continua en $x=a$, para lo cual aplicaremos los tres requisitos de la continuidad arriba mencionados; observamos que la función es continua en $x=a$ sólo en el primer supuesto:



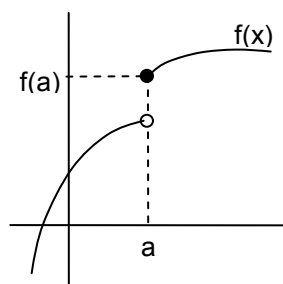
$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x) \text{ CONTINUA en } x=a$$



$$\left. \begin{array}{l} \nexists f(a) \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$



$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq f(a) \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$



$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$

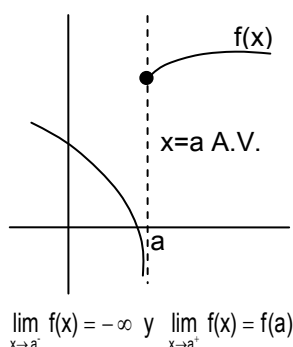
Nótese que en el último caso la función es discontinua, independientemente de que exista o no imagen. Este hecho conduce a los siguientes **5 tipos de discontinuidades**:

1) Evitable: «la función no es continua en $x=a$, pero $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ finito»; se llama evitable porque podemos redefinir $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ de modo que la función pasará a ser continua. A este tipo responden los supuestos 2º y 3º anteriores.

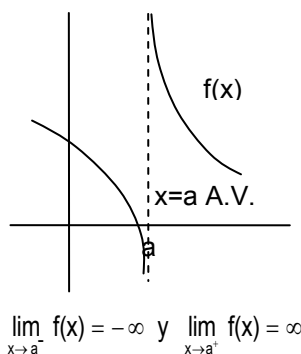
2) De 1ª especie: Existen tres tipos:

2.1) De salto finito: «Existen ambos límites laterales y son finitos, pero no coinciden». El salto viene dado por la diferencia entre los límites. A este caso pertenece el 4º gráfico.

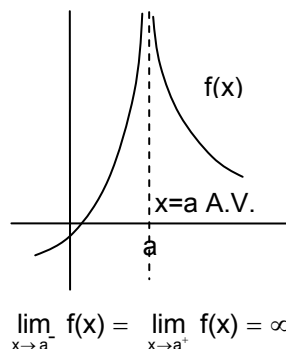
2.2) De salto infinito: «Un límite lateral es finito y el otro infinito». Se presenta entonces una asíntota vertical, pero por un lado. Gráficamente, la situación es la siguiente:



2.3) Asintótica: «Los dos límites laterales son infinitos». Se da entonces una asíntota vertical, por ambos lados. Gráficamente, la situación puede ser la siguiente:



o bien:



3) Esencial, o de 2ª especie: «Uno, o los dos límites laterales, no existe»

Ejemplo 8: Dada $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, estudiar su continuidad en $x=2$

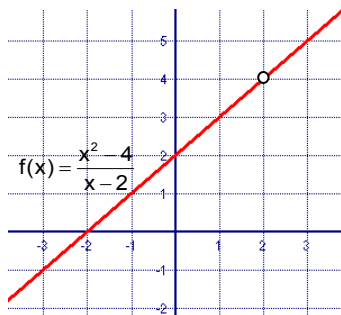
Aplicando los tres requisitos de la continuidad, vemos que falla el 1º, ya que $\nexists f(2) \Rightarrow f(x)$ es discontinua en $x=2 \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ continua } \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}}$

(Nótese que ello es independiente de que exista límite, como de hecho ocurre:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

INDTDO.

Gráficamente, la situación es la siguiente:



es decir, la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ prácticamente se comporta como la recta $x+2$ (salvo en $x=2$)

Por lo tanto, se trata de discontinuidad evitable, es decir, bastaría redefinir la función de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

para que pasara a ser continua en $x=2$

Ejercicio 1: Representar las siguientes funciones, y estudiar su continuidad. Caso de presentar discontinuidades, clasificarlas razonadamente:

a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(Soluc: $f(x)$ continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$
Discontinuidad de salto finito en $x=0$)

b) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(Soluc: $f(x)$ continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$
Discontinuidad de salto ∞ en $x=0$)

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

(Soluc: $f(x)$ continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$
Discontinuidad asintótica en $x=0$)

Continuidad lateral: Se dice que una función es continua por la derecha bajo la siguiente condición:

$$f(x) \text{ continua en } x = a^+ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Análogamente se define la continuidad por la izquierda.

Observaciones: 1º Obviamente, $f(x)$ continua en $x = a^+$ y $a^- \Leftrightarrow f(x)$ continua en $x = a$

2º La continuidad lateral se suele aplicar a funciones definidas por ramas (ver, por ejemplo, el ejercicio 20 del final del tema)

Ejercicios final tema: 18 y ss.

33 EJERCICIOS de LÍMITES de FUNCIONES y CONTINUIDAD

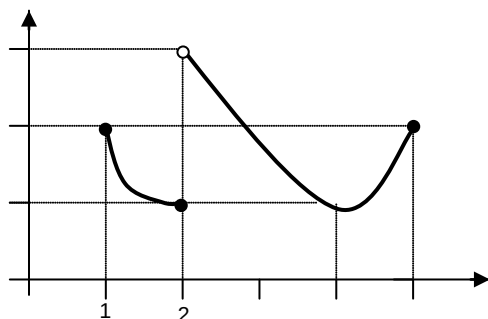
1. Calcular (en este cuaderno) los siguientes límites no indeterminados¹:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x} =$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+2} =$ c) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 4x + 3) =$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 4x) =$ e) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x + 5) =$

f) $\lim_{x \rightarrow e} (1 + \ln x) =$ g) $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log x =$ h) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 3x^2 + 4x) =$ i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} =$ j) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}} =$

k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x =$

2.



Dada la gráfica de la figura, indicar si existe $\lim f(x)$ en los siguientes casos:

- a) Cuando $x \rightarrow 1$
- b) Cuando $x \rightarrow 2$
- c) Cuando $x \rightarrow 4$
- d) Cuando $x \rightarrow 5$

3. Representar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Obtener a continuación analíticamente $\lim f(x)$ cuando $x \rightarrow 1$, $x \rightarrow 3$, $x \rightarrow 5$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, y comprobar en la gráfica.

4. Dados los siguientes límites, se pide: i) Calcularlos. ii) En caso de deducirse de ellos la existencia de A.V., indicar su ecuación. iii) Explicar gráficamente el comportamiento a ambos lados de la hipotética asíntota:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x-1)^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x-3}$ d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2}{(x-1)(x-4)}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x-2)(x-5)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{(x+1)^3}$ h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$ i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{(x-2)^3}$ j) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x^2 - 2x - 3}$

k) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x^2 + 6x + 8}$ l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 - 5x + 6}$ m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2 - 3x + 2}$ n) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-2)^2}$ o) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-2}$

p) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3}{(x-1)^2}$ q) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}$

(Soluc: a) ∞ ; b) $-\infty$; c) $\pm\infty$; d) $\pm\infty$; e) $\pm\infty$; f) 0; g) $\pm\infty$; h) ∞ ; i) $\pm\infty$; j) $\pm\infty$; k) $\pm\infty$; l) 0; m) $\pm\infty$; n) ∞ ; o) $\pm\infty$; p) $-\infty$; q) $\pm\infty$)

¹ Es decir, se pueden hacer por sustitución directa, ya que límite e imagen coinciden.

5. a) Si la gráfica de una función $f(x)$ es la de la figura, averiguar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_2} f(x)$

b) ¿Qué rectas son asíntotas?

6. Dados los siguientes límites, se pide: i) Calcularlos. ii) En caso de deducirse de ellos la existencia de A.H., indicar su ecuación. iii) Explicar gráficamente el comportamiento de la función en las proximidades de la hipotética asíntota:

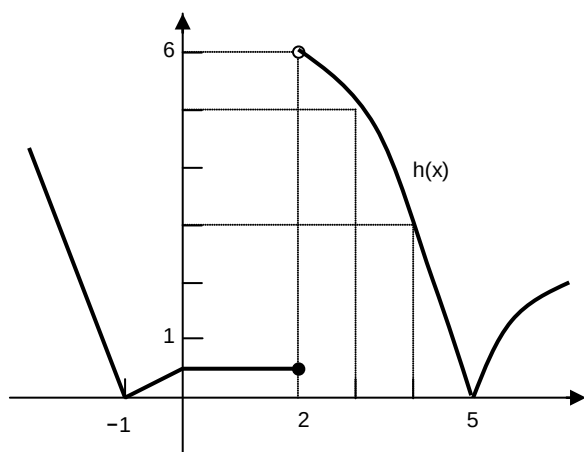
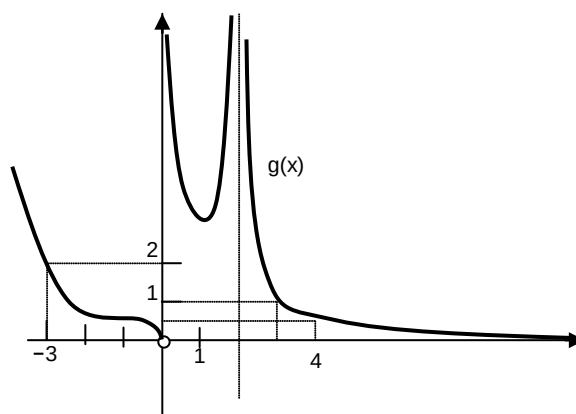
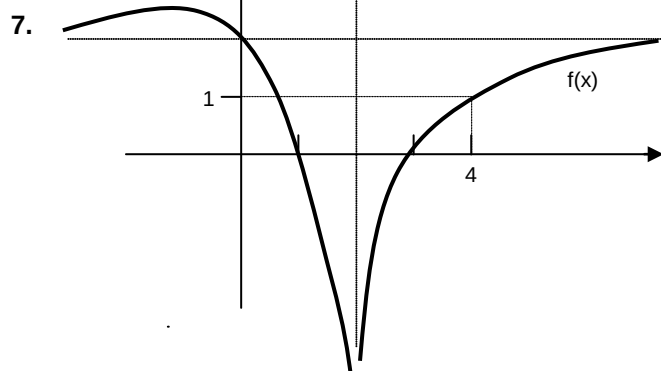
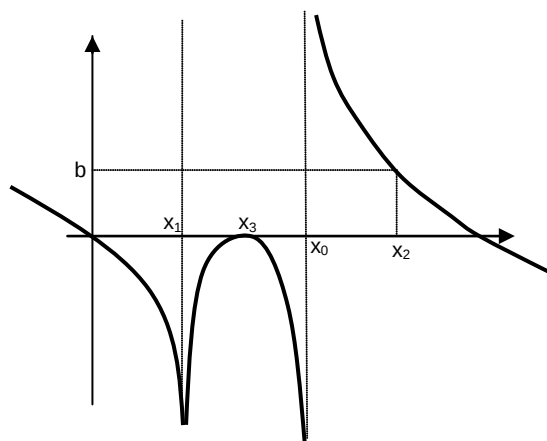
a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x-1}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{\frac{2}{x}}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{\frac{2}{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{5x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{5x}$



- a) Dadas las funciones cuyas gráficas aparecen en las figuras, calcular sus límites cuando $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 2$, $x \rightarrow 3$, $x \rightarrow 4$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$

b) ¿Cuáles son las asíntotas en cada gráfica?

8. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, se pide:

a) Representarla gráficamente (mediante tabla de valores).

b) Calcular **analíticamente** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, haciendo límites laterales cuando sea conveniente y **deducir las posibles asíntotas** cuando proceda (NOTA: Una vez calculados los límites anteriores, se recomienda confirmar gráficamente los resultados obtenidos)

$$\left(\text{Sol: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm \infty \Rightarrow x = 2 \text{ A.V.}; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ A.H.} \right)$$

9. Calcular (en este cuaderno) los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 1) =$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 1) =$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^7 =$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)^7 =$
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 2x^2 - 3x - 10) =$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2 + 2x + 5) =$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3x + 1) =$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x^2 + x + 7) =$
i) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 + x + 7) =$ j) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 100x - 50) =$ k) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3 + 100x + 200) =$

(Soluc: a) 7; b) ∞ ; c) 0; d) ∞ ; e) ∞ ; f) $-\infty$; g) ∞ ; h) $-\infty$; i) 10; j) ∞ ; k) ∞)

10. Calcular los siguientes límites por sustitución directa y, en algunos casos, operando:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + 3 \right)$ 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(5 - \frac{1}{x^2} \right)$ 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{1}{x^2} \right)$ 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$
6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x}$ 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}$ 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x + 2}{x^2}$ 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x + 2}{x^2}$ 10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{9x + 2}{x^2}$
11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x + 2}{x^2}$ 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{x-1}$ 13) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{x-1}$ 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} 0,5^{x-1}$ 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} 0,5^{x-1}$
16) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)$ 17) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)$ 18) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x}$ 19) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x}$ 20) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x$
21) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ 22) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x^2 + 1)$ 23) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ 24) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \log \sqrt{x}}$ 25) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{x^2}$
26) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log x + \frac{3x + 2}{x^2} \right)$ 27) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)$ 28) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x + 3} \ln x \right)$ 29) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{x^2 \log x}$ 30) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} - x \right)$
31) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{3x + 2}{x^2} \right)$ 32) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x^2 + 2}{x^2 + 3} \log x \right)$ 33) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)$ 34) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)$ 35) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 3x^2)$
36) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 3x^2)$ 37) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{4}$ 38) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^2}{x}$ 39) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^2}{x}$ 40) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x - 2}$
41) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x^2}$ 42) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\tan x}$ 43) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos x}$

(Soluc: 1) 3; 2) 0; 3) 4; 4) 5; 5) 0; 6) 1; 7) 0; 8) 0; 9) 0; 10) 5; 11) ∞ ; 12) ∞ ; 13) 0; 14) 0; 15) ∞ ; 16) ∞ ; 17) 1; 18) 0; 19) ∞ ; 20) ∞ ; 21) $-\infty$; 22) ∞ ; 23) 0; 24) 0; 25) $-\infty$; 26) ∞ ; 27) ∞ ; 28) ∞ ; 29) 0; 30) $-\infty$; 31) $-\infty$; 32) $-\infty$; 33) 0; 34) indto.; el próx. curso veremos que es 1; 35) $-\infty$; 36) ∞ ; 37) ∞ ; 38) $-\infty$; 39) ∞ ; 40) ∞ ; 41) 0; 42) $\nexists$; 43) 0)

Resolución de indeterminaciones:

11. Calcular los siguientes límites de funciones racionales (nótese que en el 2º miembro de la igualdad se indica la solución):

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = 3$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{2x - 4} = \frac{1}{2}$
b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^4 + x^2 + x - 3} = \frac{3}{7}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 1} = 2$

e) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 9x^2 + 24x + 16}{x^3 + 11x^2 + 40x + 48} = 3$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \pm\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 + ax - 3a^2}{3x^2 - ax - 2a^2} = 1$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^3 - 18x^2 + 36x - 24} = \pm\infty$

i) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{4x^3 + 16x^2 - 19x + 5} = \pm\infty$

j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} = 0$

k) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{b^2 - bx}{b^3 + 5b^2x - 3bx^2 - 3x^3} = \frac{1}{10b}$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \pm\infty$

m) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 6} = \frac{1}{2}$

n) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 + a^3}{x^2 - a^2} = \pm\infty$

o) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2}{x + 5} = -2$

p) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{3}{4}$

q) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^3 - 1} = \frac{4}{3}$

r) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 3x^2 - 4} = \pm\infty$

s) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3 + \frac{x-2}{x+1}}{x + \frac{x^2}{x-2}} = 0$

t) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = 0$

NOTA: Cuando señalamos que el resultado de un límite es $\pm\infty$, no estamos indicando que haya dos límites (recordar que el límite, caso de existir, es único), sino que, a ambos lados de un valor finito, la función diverge a ∞ o $-\infty$.

12. Calcular (en este cuaderno) los siguientes límites infinitos (en algunos casos figura la solución):

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^4 + x^2 + x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{2x - 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + ax - 3a^2}{3x^2 - ax - 2a^2} = \frac{2}{3}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{4x^3 + 16x^2 - 19x + 5}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^3 - 18x^2 + 36x - 24}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + a^3}{x^2 - a^2} = \infty$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^2 - bx}{b^3 + 5b^2x - 3bx^2 - 3x^3} = 0$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 6}$

m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x + 5}$

n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3 + \frac{x-2}{x+1}}{x + \frac{x^2}{x-2}} = \frac{1}{2}$

q) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$

s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

t) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 3x^2 - 4}$

u) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} = \infty$

v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x^2} = 2$

w) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin x} = 0$

13. En una empresa se ha comprobado que el número de unidades diarias producidas depende de los días trabajados, de acuerdo con la siguiente función:

$$N(t) = \frac{30t}{t+4} \quad (\text{donde } t \text{ viene expresado en días})$$

- a) ¿Cuántas unidades se producen el primer día? ¿Y el décimo?
b) Representar la función $N(t)$. ¿Qué ocurre si el período de producción se hace muy grande?

14. Siendo $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$, $g(x) = \frac{x-1}{x}$ y $h(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$, hallar:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \pm\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -1/2$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 2/3$
e) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = \pm\infty$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = 0$

15. Hallar una función $f(x)$ que cumpla a la vez $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$

16. Calcular los siguientes límites de funciones irracionales (en ciertos casos en el 2º miembro de la igualdad se indica la solución):

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} = -2$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = 1$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - x) = 1$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = 1/4$
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = 1$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - x) = -\infty$ g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1/2$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) = 0$
i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = -1/2$ j) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{(x+2)(x-3)} - x] = -1/2$ k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = -1$ l) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = 0$
m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = 0$ n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \infty$ o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4} = 4/3$ p) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$
q) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{3}}{x^2+2x-3} = \sqrt{3}/6$ r) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+x}+x} = 0$ s) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = -1$ t) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} = 1/3$
u) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x}-5} = \sqrt{2}/2$ v) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x} + x) = 1/2$ w) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} = -\infty$ x) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x-1} = -1$
y) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1} = 2$ z) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}) = 1/2$ α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \nexists$ β) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = 1$

17. Calcular los siguientes límites, aplicando el procedimiento apropiado en cada caso (en algunos casos se indica la solución en el 2º miembro de la igualdad):

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^3-6x^2+12x-8} = \infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6} = -\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - \frac{x^2-1}{x-1} \right) = -2$
d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+x^2-x-1} = 0$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1}) = \frac{3}{2}$ f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3+2x^2-x-2}$
g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1} = 0$ i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}$
j) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+b}) = \frac{a}{2}$ k) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-5x+6}$ l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3+x}{x^2-1} - \frac{x^2+1}{x+1} \right) = 1$
m) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{x^2-1}) = 2$ n) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3+2x^2} = \frac{3}{4}$ o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3+2x^2} = 1$

p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} - 2x \right) = \frac{3}{2}$

q) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{x^2 + 6} \right) = 3$

Continuidad:

RECORDAR:

$$f(x) \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Es decir: "Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto".

- A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:

- 1) que exista imagen
- 2) que exista límite
- 3) y que coincidan

18. Indicar en qué puntos son discontinuas las funciones cuyas gráficas se muestran en los ejercicios gráficos 2, 5 y 7, razonando el porqué e indicando el tipo de discontinuidad.

19. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones, indicando el tipo de discontinuidad. En los señalados con un asterisco (*), y con la información obtenida, esbozar además la gráfica:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ (*)

b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5x + 6}$ (*)

c) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$

d) $f(x) = \sqrt{x-3}$ (*)

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ (*)

f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 6}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

h) $f(x) = \operatorname{tg} x$ (*)

i) $f(x) = \log(x+3)$ (*)

j) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

k) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

l) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ (*)

(Sol: a) *discont. asintótica en $x=2$* ; b) *discont. asintótica en $x=2$ y $x=3$* ; c) *continua $\forall \mathbb{R}$* ; d) *continua en $[3, \infty)$* ; e) *continua en $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$* ; f) *continua $\forall \mathbb{R}$* ; g) *continua $\forall \mathbb{R}$* ; h) *discont. asintótica en $x=(2n+1) \cdot \pi/2$* ; i) *continua en $(-3, \infty)$* ; j) *continua en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$* ; k) *continua $\forall \mathbb{R}$* ; l) *discont. asintótica en $x=n \cdot \pi$ rad donde $n \in \mathbb{Z}$*)

20. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones (caso de presentar discontinuidades, clasificarlas) y representarlas gráficamente. Si hay discontinuidad evitable, redefinir la función para que pase a ser continua:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ 2x-1 & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x-6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in (-\infty, 1) \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [1, \infty) \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-2} & \text{si } x \in (-\infty, 1) \\ \ln x & \text{si } x \in [1, \infty) \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{2x}{x-5} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(Soluc: **a)** *discont de salto finito en $x=0$; **b)** *discont evitable en $x=0$; **c)** *discont evitable en $x=2$; **d)** *continua $\forall \mathbb{R}$; **e)** *discont asintótica en $x=0$ y de salto finito en $x=1$; **f)** *discont. de salto finito en $x=3$ y $x=4$; **g)** *discontinua de salto finito en $x=2$; **h)** *continua $\forall \mathbb{R}$; **i)** *discont. de salto finito en $x=0$; **j)** *discont. de salto finito en $x=3$; discontinuidad asintótica en $x=5$; **k)** *discont. de salto ∞ en $x=0$; discontinuidad evitable en $x=1$)***********

- 21. TEORÍA:** **a)** ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no está definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto? Razonar la respuesta con ejemplos.
- b)** ¿Puede tener una función dos asíntotas verticales? En caso afirmativo, poner algún ejemplo.
- c)** El denominador de una determinada función se anula en $x=a$ ¿Presenta necesariamente una asíntota vertical en $x=a$? Poner ejemplos.
- d)** ¿Puede tener una función más de dos asíntotas horizontales? ¿Por qué?
- e)** Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, ¿podemos afirmar que $f(x)$ es continua en $x=2$?

- 22.** Probar que la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 7x - 8}$$

no es continua en $x=1$ e indicar qué tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

(Soluc: no es continua pues $\nexists f(1)$; discontinuidad evitable)

- 23.** Considerar la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

- a)** ¿Es discontinua en algún punto? ¿Por qué?
- b)** En $x=1$ la función no está definida. Ampliar esta función de modo que sea continua $\forall \mathbb{R}$.

(Soluc: discontinua en $x=1$ pues $\nexists f(1)$; basta hacer $f(1)=2$)

- 24.** La función $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + a}{x - 1}$ no está definida en $x=1$. Hallar el valor de **a** para que sea posible definir el valor de $f(1)$, resultando así una función continua. (Soluc: $a=-3$; $f(1)=6$)

- 25.** Hallar el valor de **k** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ k & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

sea continua $\forall \mathbb{R}$. (Soluc: $k=6$)

- 26.** Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 - 5x + 2} & \text{si } x \neq 1/2 \\ 5/3 & \text{si } x = 1/2 \end{cases}$$

(Soluc: discontinua asintótica en $x=2$)

- 27.** Calcular cuánto debe valer **a** para que la siguiente función sea continua $\forall \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Soluc: $a=0$)

28. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

Determinar los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y $f(2)=3$ (Soluc: $a=1$ y $b=-1$)

29. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

hallar a y b para que la función sea continua y dibujar la gráfica de la función. (Soluc: $a=3$ y $b=-1$)

30. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ mx+n & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 10x - 11 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

hallar los valores de m y n para que $f(x)$ sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica). (Soluc: $m=3$, $n=1$)

31. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax+2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(Soluc: $a=-1/2$, $b=-3$)

32. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+a & \text{si } x < -1 \\ x^2-4 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

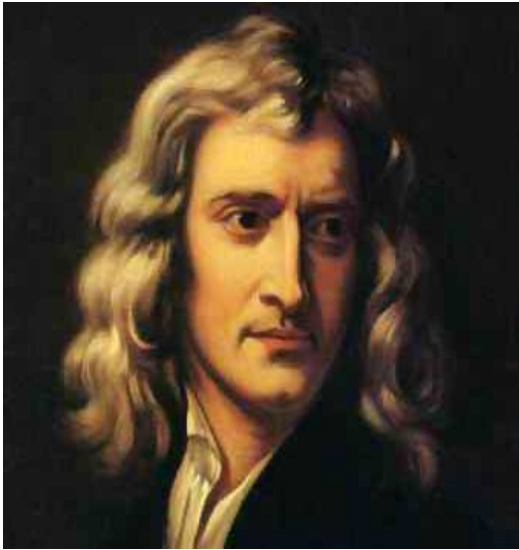
(Soluc: $a=-2$, $b=1$)

33. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} ax+2 & \text{si } x < -1 \\ b/x^2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ cx & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 10 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

(Soluc: $a=-52$, $b=54$, $c=2$)

DERIVADAS



Isaac Newton (1642-1727)



Gottfried Leibniz (1646-1716)

MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato CCNN

**Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas**



I) DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

En este tema vamos a conocer y emplear un operador matemático muy útil, llamado **derivada de una función**, que opera sobre una función y da como resultado otra función (habitualmente más simple). Su utilidad radica en que, como veremos más adelante, el signo de la derivada de una función en un punto nos dirá si la función es creciente o decreciente en dicho punto; ello nos permitirá deducir, por tanto, los máximos y mínimos de la función, algo muy importante en infinidad de funciones extraídas de situaciones reales: pensemos en una función que represente los beneficios de una empresa, o el coste de fabricación de un determinado producto, etc.

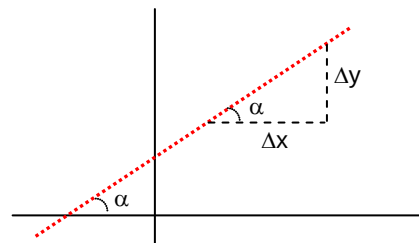
El tema tiene dos grandes partes: en los apartados I, II y III aprenderemos a derivar; en los apartados IV, V y VI veremos algunas aplicaciones de la derivada.

Concepto previo: pendiente de una recta

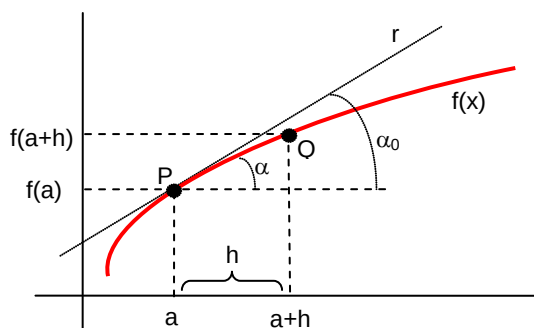
Para entender qué es la derivada necesitamos repasar previamente en qué consistía la pendiente de una recta (tema 4):

La pendiente de una recta, que suele llamarse **m**, mide la inclinación de ésta, y se define (ver figura) como el cociente incremental siguiente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$



Derivada de una función en un punto $f'(a)$:



Consideremos una función $f(x)$ y un punto P de su gráfica (ver figura), de abscisa $x=a$. Supongamos que damos a la variable independiente x un pequeño incremento h (en el dibujo lo hemos exagerado, para que se pueda ver la situación...); por lo tanto, nos desplazaremos a un nuevo punto Q de la curva próximo. Consideremos la tangente del ángulo que forma el segmento $\overline{PQ}$ con la horizontal:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

Si $h \rightarrow 0$, el segmento $\overline{PQ}$ tenderá a confundirse con la recta r tangente a la curva $f(x)$ en $x=a$, es decir, los ángulos α y α_0 tenderán a ser iguales:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad (3)$$

por (2)
por definición

Debido a (1), la fórmula anterior -que en el fondo es un cociente incremental- nos da por tanto la pendiente de la recta tangente a la curva en $x=a$. Esta fórmula se conoce como derivada de la función $f(x)$ en el punto $x=a$, y se designa como $f'(a)$; por lo tanto:

«La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto», y se calcula mediante el límite dado por (3).¹

Observaciones:

1º) La derivada de una función en un punto puede resultar un número positivo, negativo o cero². Como veremos en el apdo. V, su signo indicará el crecimiento de la función.

2º) Veamos una expresión alternativa para calcular la derivada:

Supongamos que hacemos el cambio de variable $a+h=x \Rightarrow$ si $h \rightarrow 0$, entonces $x \rightarrow a$, con lo cual (3) queda como:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (4)$$

Esta fórmula es, sin duda, más cómoda que (3), y es la que más usaremos.

3º) «Una función es derivable en un punto $x=a$ si $\exists f'(a)$ »

4º) «Una función es derivable en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo»

Ejercicios final tema: 1, 2 y 3

II) FUNCIÓN DERIVADA $f'(x)$

Supongamos que nos piden la derivada de una función en, por ejemplo, diez puntos distintos. ¿Haremos diez límites? Es evidente que no; para evitar tanto trabajo, vamos a definir la función derivada, que se designa como $f'(x)$, y es la derivada en un punto genérico x (y sustituiríamos a continuación en ella cada uno de los diez puntos); por lo tanto, se obtendrá reemplazando en (3) **a** por **x**:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (5)$$

Observaciones:

1º) La función derivada, es decir, el límite anterior, da como resultado una función. Habitualmente abreviaremos diciendo simplemente “derivada” en vez de “función derivada”.

2º) En Física se utiliza la siguiente notación incremental: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, o bien, p. ej. $v = \frac{ds}{dt}$

3º) La notación que nosotros seguiremos será la siguiente:

- Si la función a derivar se llama $f(x)$, entonces su derivada la denotaremos como $f'(x)$
- “ “ “ “ “ “ “ y , “ “ “ “ “ “ “ y'

Utilizaremos indistintamente ambas notaciones.

Ejercicios final tema: 4, 5 y 6

¹ Por lo tanto, veremos en el apdo. IV que la derivada nos permitirá hallar la ecuación de la recta tangente a una función en un punto dado.

² Como veremos también en el apdo. V, los puntos en que la derivada se anule resultarán muy interesantes, ya que serán los máximos o mínimos de la función.

III) DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES (Tabla de derivadas)

III.1) Función constante: $y = K \rightarrow y' = 0$ Es decir, «La derivada de una constante es siempre cero»

NOTA: Esta derivada, y todas las de este apartado, pueden ser demostradas, pero ello excede los límites de este curso. Todas estas reglas de derivación están recogidas en la tabla de derivadas que se adjunta al final del libro.

Ejercicio 1: Hallar la derivada de las siguientes funciones constantes:

- | | |
|----------------------|---|
| a) $y = 2$ | e) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$
f) $y = \pi$
g) $y = 0,5$ |
| b) $y = -3$ | |
| c) $y = \frac{1}{2}$ | |
| d) $y = 0$ | |

III.2) Función identidad: $y = x \rightarrow y' = 1$ (6)

III.3) Función de proporcionalidad directa: $y = K \cdot x \rightarrow y' = k$ (7)

Ejercicio 2: Hallar la derivada de las siguientes funciones de proporcionalidad directa:

- | | |
|----------------------|---|
| a) $y = 2x$ | f) $f(t) = \frac{2}{3}t$
g) $y = -x$
h) $y = -\frac{5x}{3}$
i) $f(t) = 7t$ |
| b) $f(x) = -5x$ | |
| c) $y = 0,01x$ | |
| d) $y = \frac{x}{2}$ | |
| e) $y = x$ | |

III.4) Derivada de una potencia: $y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$ (donde $n \in \mathbb{R}$) (8)

Ejercicio 3: Hallar la derivada de las siguientes potencias:

- | | |
|-----------------|-------------------------------------|
| a) $y = x^2$ | d) $f(t) = t^5$
e) $y = x^{100}$ |
| b) $f(x) = x^3$ | |
| c) $y = x^4$ | |

Este caso nos permite, dado que el exponente puede ser cualquier número real, abordar otros tipos de derivadas:

Ejercicio 4: Demostrar la fórmula de la derivada de: a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \sqrt{x}$

a)

b)

Ejercicio 5: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones, pasándolas previamente a forma de potencia:

a) $y = \sqrt[3]{x}$ $\left(\text{Sol : } y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right)$

b) $y = \sqrt[4]{x^3}$ $\left(\text{Sol : } y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} \right)$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ $\left(\text{Sol : } y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} \right)$

d) $y = x^2 \sqrt{x}$ $\left(\text{Sol : } y' = \frac{5\sqrt{x}}{2} \right)$

e) $f(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$ $\left(\text{Sol : } y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}} \right)$

f) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^3}$ $\left(\text{Sol : } y' = -\frac{5}{2\sqrt{x^7}} \right)$

III.5) $y = K \cdot u \rightarrow y' = k \cdot u'$ donde u es función, es decir, «Las constantes multiplicativas pueden salir de la derivada» (9)

Ejercicio 6: Hallar la derivada de las siguientes funciones compuestas:

a) $y = 3x^2$

b) $y = 4x^3$

c) $f(x) = -2x^4$

d) $y = \frac{x^2}{2}$

e) $y = -x^5$

f) $y = \frac{2}{3}t^6$

g) $y = -x$

h) $y = 3\sqrt[3]{x^4}$

$\left(\text{Sol : } y' = 4\sqrt[3]{x} \right)$

i) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{2}$

$\left(\text{Sol : } y' = \frac{1}{8\sqrt[4]{x^3}} \right)$

j) $y = -\frac{3x^4}{2}$

k) $f(t) = -2t^7$

l) $f(x) = \frac{x^3}{3}$

m) $y = 2x\sqrt[5]{x}$

$\left(\text{Sol : } y' = \frac{12}{5}\sqrt[5]{x} \right)$

III.6) Derivada de la suma (resta): $y = u \pm v \rightarrow y' = u' \pm v'$ donde u y v son funciones (10)

Es decir: «La derivada de la suma (resta) es la suma (resta) de las derivadas»

NOTA: Esta regla, lógicamente, se puede generalizar a más de dos sumandos.

Esta regla, combinada con las anteriores, es muy útil para derivar polinomios, como puede verse en el siguiente ejemplo:

Ejercicio 7: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + x^3$

b) $y = x^4 + 5$

c) $y = x^2 - 2$

d) $y = x - 2$

e) $f(t) = 3t - 5$

f) $y = 3x^2 - x^4$

g) $y = 2x^3 - 3x^4$

h) $s(t) = 2t^4 - t^2 + 3$

i) $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

j) $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 8$

k) $f(x) = -3x^5 + 4x^3 - x + 2$

l) $y = 2(x^2 - x + 1)$

m) $y = \frac{x^4}{2} + 5x$

(Sol: $2x^3 + 5$)

n) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{5} - \frac{1}{2}$

(Sol: $x^2 - x + 1/5$)

o) $y = 3(x^3 - 2x^2 + 5)$

p) $f(x) = x^5 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{6} - 3x^2 + \frac{x}{3}$

q) $y = \frac{x^4 + x^2}{2}$

(Sol: $2x^3 + x$)

r) $y = -2\left(2x^2 - \frac{x}{2} + 1\right)$

s) $f(x) = 0,05x^3 - 0,001x^2 + 0,1x - 0,02$

t) $y = \frac{3x^6 - x^3 + 6x - 5}{3}$

(Sol: $6x^5 - x^2 + 2$)

III.7) Generalización de la derivada de una potencia a una función compuesta (Regla de la cadena):

En el apdo. III.IV vimos que $y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$. Ahora vamos a generalizar esa fórmula para el caso en que la base no sea simplemente x sino una función más general, que llamaremos u :

$$y = u^n \rightarrow y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (\text{donde } n \in \mathbb{R}) \quad (11)$$

Esto se conoce como *Regla de la cadena*.

Ejercicio 8: Hallar, utilizando la regla de la cadena, la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y = (2x + 1)^3$

b) $y = (3x^2 - 5)^4$

c) (De dos formas, y comparar) $y = (-4x^3 + x^2)^2$

d) $y = (x - 7)^5$

e) $y = (x^2 + x + 1)^2$

f) (De la forma más rápida) $y = 2(x - 3)^2$

g) (De dos formas) $y = (x - 3)^3$

III.7) Derivada del producto: $y = u \cdot v \rightarrow y' = u'v + u v'$ (12)

Esta regla se puede generalizar a tres o más funciones: $y = u \cdot v \cdot w \rightarrow y' = u'v w + u v' w + u v w'$

NOTA: Para derivar un producto, una alternativa, a veces, es operar previamente hasta transformar en un polinomio, y luego derivar.

Ejercicio 9: Hallar, utilizando la fórmula más adecuada en cada caso, la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) (De dos formas, y comparar) $y = (2x+3)(3x-2)$

(Sol: $12x+5$)

b) $y = (x-2)(x+3)$

(Sol: $2x+1$)

c) $f(x) = (2x+3)(x-5)$

(Sol: $4x-7$)

d) $f(x) = (x^2+2)(3x-1)$

(Sol: $9x^2-2x+6$)

e) $y = (x^2-5)(3x-1)+7$

(Sol: $9x^2-2x-15$)

f) (De dos formas) $y = (2x-3)^2$

Sol: $8x-12$)

g) $f(x) = (x+2)^3$

(Sol: $3(x+2)^2$)

h) $y = (1,2-0,001x^2)x$

(Sol: $-0,003x^2+1,2$)

i) $y = (2x^2-3)^2$

(Sol: $16x^3-24x$)

j) $f(t) = 300t(1-t)$

(Sol: $300-600t$)

k) $f(x) = (-4x^3-2x)^2$

(Sol: $96x^5+64x^3+8x$)

l) $y = (t^2+t+1)^3$

(Sol: $3(t^2+t+1)^2(2t+1)$)

m) $y = (3x-2)(2x-3)(x+5)$

(Sol: $18x^2+34x-59$)

n) $f(x) = (2x-3)^{100}$

(Sol: $200(2x-3)^{99}$)

o) $s(t) = 5(t^2-1)^2$

(Sol: $20t^3-20t$)

p) $f(x) = 3(x^2+1)(2x-3)$

(Sol: $3(6x^2-6x-2)$)

III.8) Derivada del cociente:

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

(13)

Ejercicio 10: Demostrar, utilizando la derivada del producto, la fórmula anterior (Ayuda: poner u/v como $u \cdot v^{-1}$)

Ejercicio 11: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{2x-3}{3x+2}$

$\left(y' = \frac{13}{(3x+2)^2} \right)$

b) $y = \frac{x^2+1}{x^2-4}$

$\left(y' = \frac{-10x}{(x^2-4)^2} \right)$

c) $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$

$\left(y' = \frac{-6}{(x-3)^2} \right)$

d) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

$\left(y' = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \right)$

e) (De dos formas) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$

$$\left(y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} \right)$$

f) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

$$(y' = 1)$$

g) $y = 3 \frac{x^2 - 1}{x - 2}$

$$\left(y' = 3 \frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2} \right)$$

Ejercicios final tema: 7 a 13

- **NOTA:** Lo que hemos calculado hasta ahora es la función derivada de una función dada, o más comúnmente llamada derivada de una función. Por lo tanto, por tratarse de una función, podemos también evaluar la derivada en un punto dado, obteniendo como resultado un número. Es lo que se conoce como **derivada de una función en un punto**, ya visto en el apartado I. Veamos, a continuación, un ejemplo:

Ejercicio 12: Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado:

a) $f(x) = x^2$ en $x = 2$

b) $f(x) = 2x - 5$ en $x = 1$

c) $y = x^3$ en $x = -2$

d) $f(x) = x^2 + x + 1$ en $x = 0$

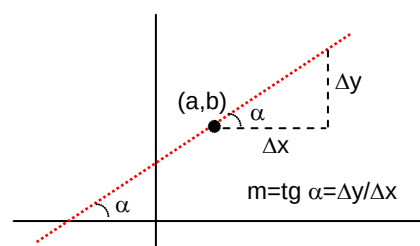
e) $y = x^2 - x$ en $x = -1$

IV) RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO

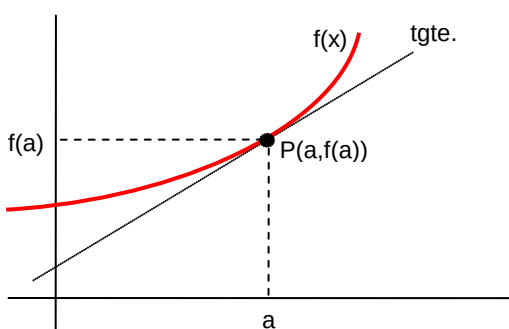
Recordatorio previo: recta en forma punto-pendiente

Conviene previamente recordar que la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto (a, b) y tiene pendiente m es [ver figura]:

$$y - b = m(x - a) \quad (14)$$



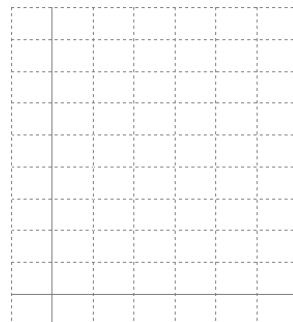
Ecuación de la recta tangente:



Hay que recordar también que, como se vio en el apartado I, la derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$, la cual se designaba como $f'(a)$, es la pendiente de la recta tangente en dicho punto $(a, f(a))$; por lo tanto, la ecuación de dicha recta tangente [ver figura] en ese punto se obtendrá sustituyendo convenientemente en (14):

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (15)$$

Ejercicio 13: Hallar la ecuación de la recta tangente en $x=3$ a la curva $f(x)=x^2-5x+8$. Dibujar la situación, e interpretar el resultado. (Sol: $y=x-1$)



Ejercicio 14: Hallar la ecuación de la recta tangente a las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=x^3-5$ en $x=1$

b) $y = \frac{1}{x}$ en $x=-2$

c) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ en $x=0$

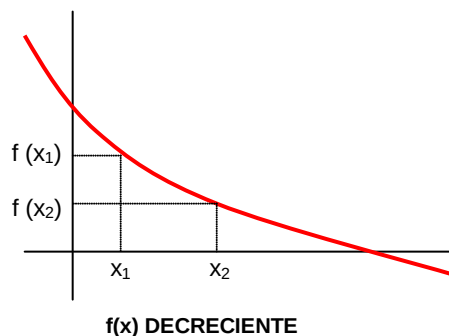
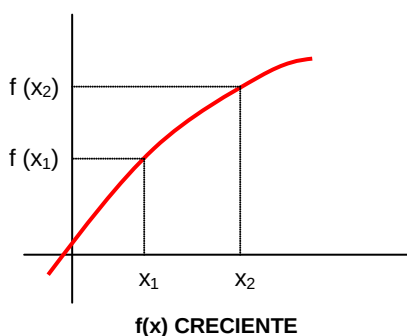
d) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ en $x=1$

e) $y = \frac{-3}{x^2}$ en $x=0$

Ejercicios final tema: 14 a 17

V) INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. M y m

V.1) Idea intuitiva:



V.2) Definiciones:

$f(x)$ es creciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$f(x)$ es decreciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

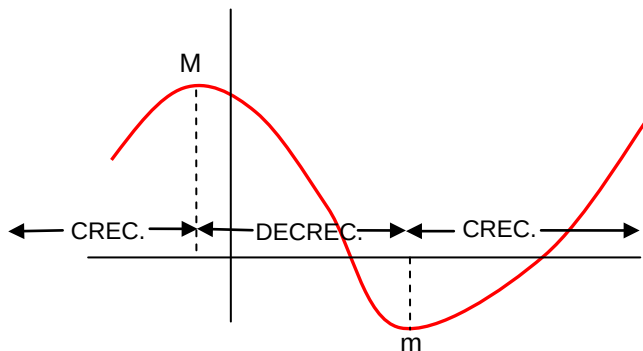
O, dicho con palabras:

“Una función es creciente en un punto si, en las proximidades de dicho punto, a medida que aumentan las x aumentan también las imágenes correspondientes”.

“Una función es decreciente en un punto si, en las proximidades de dicho punto, a medida que aumentan las x disminuyen las imágenes correspondientes”.

Acabamos de ver el concepto de función creciente en un punto. Ello es fácilmente ampliable a un intervalo, diciendo que **«una función es creciente en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo»**.

- En general, las funciones no son siempre crecientes o siempre decrecientes, sino que presentan intervalos de crecimiento, también llamados de monotonía:



En un máximo (M), la función pasa de creciente a decreciente de forma continua. Se llama máximo relativo o local.

En un mínimo (m), la función pasa de decreciente a creciente de forma continua. Se llama mínimo relativo o local.

NOTA: Al final de este apartado veremos otros tipos de M o m, los absolutos.

V.3) Teorema 1:

$$f'(a) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } x = a$$

O, dicho con palabras: **«Si la derivada de una función en un punto es positiva, entonces la función es creciente en dicho punto»**.

Observaciones:

- La justificación de este teorema es obvia: teniendo en cuenta que la derivada era la pendiente de la recta tangente, si la derivada es positiva significará que la recta tangente tiene pendiente positiva, es decir, que la recta tangente es creciente, y, por lo tanto, también será creciente la curva.
- El recíproco no siempre es cierto: una función puede ser creciente en un punto y no ser necesariamente positiva su derivada (piénsese, por ejemplo, en $y=x^3$ en $x=0$).
- Naturalmente, otra forma alternativa de enunciar este teorema es decir que:

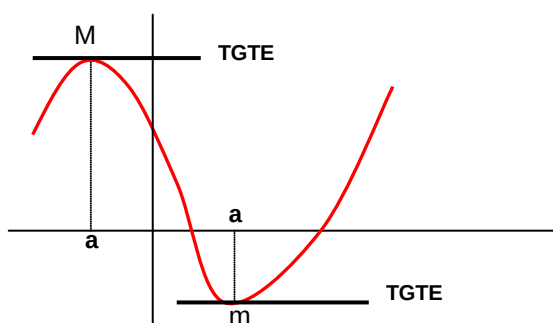
$$f'(a) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } x = a$$

- 4º) Por lo tanto, el **procedimiento práctico para hallar los intervalos de crecimiento será estudiar el signo de $f'(x)$** (debido al teorema anterior). Para ver cómo cambia el signo de $f'(x)$, se recomienda hallar sus raíces, y construir una tabla (ver ejercicios 15, 16 y 17 que figuran a continuación). De los intervalos de crecimiento deduciremos fácilmente los posibles M y m.
- 5º) Los intervalos de monotonía se expresan siempre con respecto al eje x, como veremos en los mencionados ejercicios.

V.4) Teorema 2: $x = a$ es M o m de $f(x) \Rightarrow f'(a) = 0$ (¡El recíproco no siempre se cumple!)

O, dicho con palabras: «En un M o m la derivada siempre se anula».

Justificación gráfica: En un M o m la tangente es horizontal, es decir, su pendiente será nula, y por tanto su derivada también:



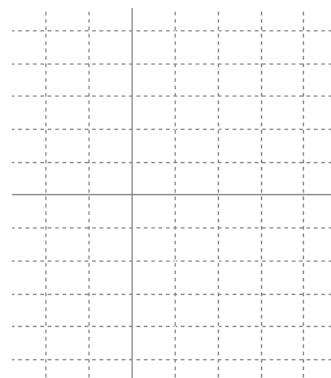
Observaciones:

- 1º) El teorema dice que la condición necesaria (pero no suficiente) para que exista un M o un m en un punto es que la derivada se anule. De hecho, **puede ocurrir que la derivada se anule en un determinado punto, pero no cambie de signo a ambos lados**; por ejemplo, $y = x^3$ entra en el origen con tangente horizontal –es decir, derivada nula–, pero no presenta M ni m, sino lo que se conoce como **punto de inflexión**³.
- 2º) Puede haber varios **M** o **m**, no haber, o infinitos.
- 3º) Si la $f(x)$ es continua, entre dos **M** siempre hay un **m**, y viceversa.
- 4º) Los candidatos a **M** o **m** son los que anulan $f'(x)$
- 5º) Si $f'(x)$ no se anula nunca, no hay **M** ni **m**

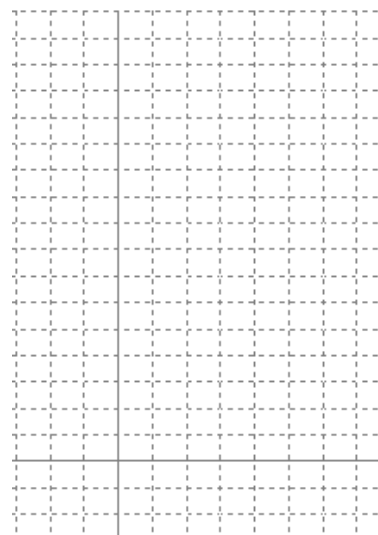


- Ejercicio 15:** Dada la parábola $f(x) = x^2 - 2x - 3$ se pide:
- a) Representarla gráficamente
 - b) Estudiar el signo de $f'(x)$ y deducir sus intervalos de crecimiento y el M, comprobando que coinciden con la información de la gráfica.

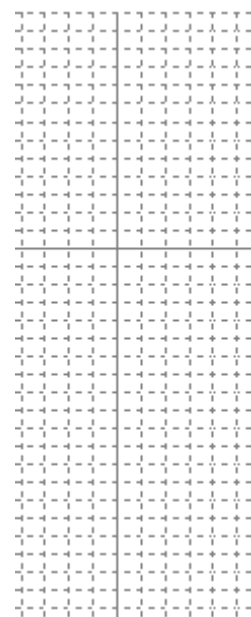
³ Los puntos de inflexión se estudiarán el próximo curso en profundidad.



Ejercicio 16: Ídem con la parábola $y = -x^2 + 4x + 12$



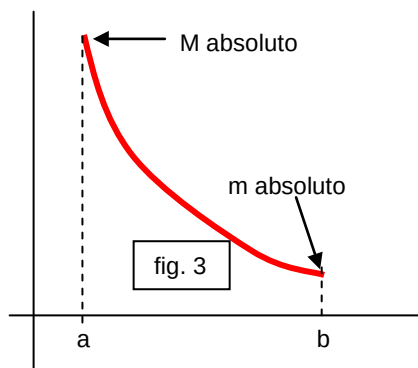
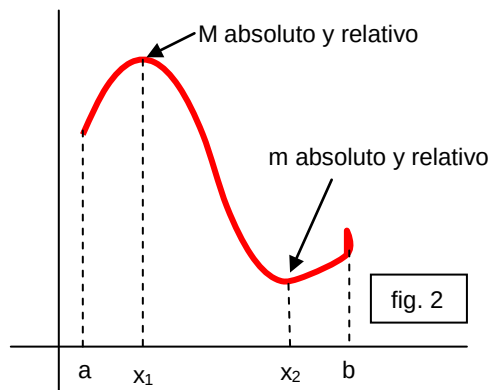
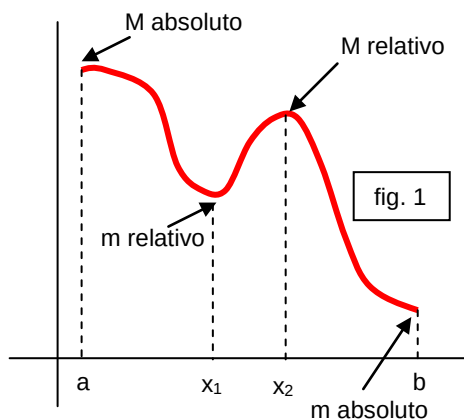
Ejercicio 17: Hallar los intervalos de monotonía y los posibles M y m de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$; dibujar, con esa información, su gráfica.



Ejercicio final tema: 18

V.5) M o m absolutos:

Dada una función continua en un intervalo $[a,b]$, pueden darse varias situaciones en dicho intervalo, que se resumen en las siguientes:



En resumen:

- Los M y m relativos (los que hemos visto en los subapartados anteriores) son máximos "locales", mientras que para los absolutos hay que tener en cuenta todo el intervalo.
- Puede haber varios extremos relativos, o puede no haberlos (fig. 3), pero siempre hay M y m absolutos.
- Puede coincidir el M (o el m) absoluto y relativo (fig. 2); en caso contrario el M (o el m) absoluto lógicamente estará en un extremo (figs. 1 y 3)

Ejercicio 18: Unos grandes almacenes abren a las 10 horas y cierran a las 22 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes puede representarse, en función de la hora del día, como $N(t) = -t^2 + 36t + 260$, con $10 \leq t \leq 22$

a) Representar gráficamente dicha función. **b)** ¿A qué hora se da la máxima afluencia de clientes? ¿Cuál es el máximo número de clientes que registran? **c)** ¿A qué hora se da la mínima afluencia de clientes? ¿De qué número de clientes se trata? **d)** ¿Cuántos clientes quedan a la hora de cerrar?



VI) REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

A la hora de representar una función conviene hallar, por este orden, los siguientes aspectos:

- 1º) Dom(f):**
- Recordar que es el conjunto formado por todos los x para los que existe imagen $f(x)$
 - Las reglas para hallarlo son prácticamente las mismas que las vistas en el tema anterior para estudiar la continuidad de las funciones más usuales (Por ejemplo, recordar que las funciones polinómicas tienen $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$).

2º) Corte con los ejes:

CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	haciendo $y=0$ (habrá que resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	sustituyendo $x=0$	uno o ninguno

Ejercicio 19: Hallar el posible corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 2x - 3$

b) $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$

3º) Intervalos de crecimiento $\Rightarrow M$ y m : Se obtienen, como hemos visto en el apartado IV, estudiando el signo de $f'(x)$

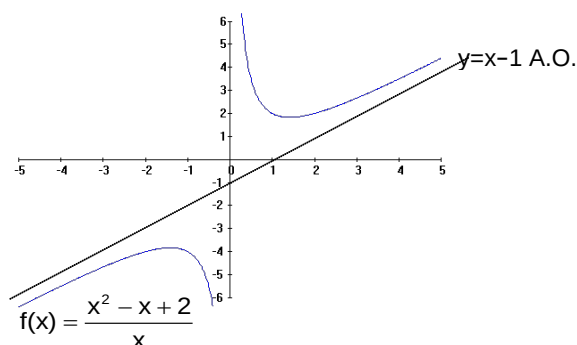
4º) Cálculo de las posibles asíntotas: Ya hemos visto en el tema anterior cómo se calcula la ecuación de las posibles asíntotas horizontales y verticales de una función, y el comportamiento de la gráfica en las proximidades de dichas asíntotas:

Definición de asíntota vertical: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{matrix} \infty \\ (0 - \infty) \end{matrix} \Leftrightarrow x = a \text{ A.V.}$ (16)

Definición de asíntota horizontal: $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (0 - \infty)}} f(x) = L \Leftrightarrow y = L \text{ A.H.}$ (17)

- **Observaciones:**
- 1º La gráfica puede cortar a la A.H. para valores finitos de x
 - 2º En cambio, la gráfica de una función nunca puede cortar a una A.V.
 - 3º Como máximo puede haber dos A.H. (una cuando $x \rightarrow \infty$ y otra cuando $x \rightarrow -\infty$), aunque normalmente es una sola.
 - 4º En la práctica, en la mayoría de los casos las A.V. serán las x que anulen el denominador, pero no el numerador, aunque a veces hay excepciones.
 - 5º Puede haber una, ninguna o varias A.V.

Vamos a ver a continuación otro tipo, las **asíntotas oblicuas**:



$$\left. \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty (0 - \infty)} \frac{f(x)}{x} \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty (0 - \infty)} [f(x) - mx] \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = mx + n \text{ es A.O.}$$

(18)

(no lo vamos a demostrar)

Ejercicio 20: Hallar las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x}$

(Sol: A.V. $x=0$; A.O. $y=x-1$)

b) $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 3}$

(Sol: A.V. $x=-3$; A.O. $y=x-8$)

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$

(Sol: A.V. $x=1$; A.O. $y=x+1$)

d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

(Sol: A.V. $x=\pm 2$; A.O. $y=x$)

- **Observaciones:** 1) Si sale $m=\infty$ (o $-\infty$) o $m=0 \Rightarrow$ no hay A.O.
- 2) IMPORTANTE: Una función no puede tener por el mismo lado (∞ o $-\infty$) a la vez A.H. y A.O.
- 3) La gráfica puede cortar a la A.O. para valores finitos de x , pero no en el ∞
- 4) IMPORTANTE: una función racional tiene A.O. si el grado del numerador es una unidad superior al del denominador.
- 5) IMPORTANTE: Los polinomios no tienen asíntotas de ningún tipo (lo que presentan son ramas infinitas)
- 6) Un método alternativo para hallar asíntotas oblicuas consiste en hacer la división polinómica del numerador y el denominador: la expresión del cociente resultante será la ecuación de la A.O. (naturalmente, esto sólo es posible en el caso de funciones racionales).
- 5º) Finalmente, a la hora de representar una función, a veces puede ser útil completar la información anterior confeccionando una pequeña **tabla de valores** con los valores más imprescindibles.

Ejercicios final tema: 19 a 23

Reseña histórica:

El cálculo infinitesimal fue desarrollado a la vez y de manera independiente por el alemán Wilhelm Gottfried **Leibniz** (1646-1716) y el inglés Isaac **Newton** (1642-1727) antes de 1680. Ambos encontraron la importante relación entre el cálculo diferencial e integral. Aunque Newton en esta disciplina llegó mucho más allá que Leibniz, éste inventó una notación superior a aquél: mientras Newton escribía la derivada como y' , Leibniz escribía dy/dx . Desgraciadamente, ambos mantuvieron en sus últimos años una disputa en torno a quién fue el primer descubridor del cálculo, que se hizo extensiva, tras su muerte, a sus discípulos. Actualmente, está claro que a Leibniz le corresponde la primacía de la publicación y a Newton la del descubrimiento.

Leibniz se dio cuenta bastante pronto de que la diferenciación y la integración como sumación eran procesos inversos. En 1676 obtuvo que $dx^n = nx^{n-1}dx$ y también utilizaba la regla de la cadena. En 1677 dio las reglas para la diferencial de la suma, diferencia, producto, cociente, potencias y raíces. Aunque era doctor en Leyes, sus primeros trabajos fueron sobre combinatoria. Con motivo de una misión diplomática se estableció en París, donde el físico y matemático holandés Christian Huygens (1629-1695) le hizo una puesta al día en las Matemáticas de la época.

Newton, por su parte, empleó el método de "fluxiones", con el que consiguió calcular tangentes a curvas, áreas y longitudes, y máximos y mínimos y puntos de inflexión. Aparte del cálculo infinitesimal, descubrió la ley de gravitación universal, el primer telescopio funcional, demostró las leyes del movimiento planetario de Kepler, el teorema binomial, la teoría de errores y el método de aproximación de las raíces de una ecuación que lleva su nombre. También descubrió que la luz blanca está compuesta de todos los colores. Y todo esto en 1665 y 1666, aunque al principio no publicó sus trabajos. Su obra maestra, dedicada a la mecánica celeste, son sus *Principia* (1687). Por cierto, se considera que los forjadores de la ciencia moderna son Newton, Descartes, Galileo y Huygens (y, quizá, Copérnico y Kepler).

Las notaciones que empleamos hoy en día para las derivadas sucesivas y para la 1ª derivada las debemos al italiano Joseph-Louis de **Lagrange** (1736-1813).

23 EJERCICIOS de DERIVADAS

Derivada de una función en un punto $f'(a)$:

Fórmulas:
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2)$$

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado, utilizando la fórmula que se señala:

a) $f(x)=x^2$ en $x=2$ mediante (1)

b) $f(x)=2x^2-1$ en $x=-3$ mediante (1)

c) $f(x)=2x-5$ en $x=1$ mediante (2)

d) $f(x)=x^3$ en $x=2$ mediante (1)

e) $f(x)=\sqrt{x}$ en $x=4$ mediante (2)

f) $f(x)=1/x$ en $x=-1$ mediante (1)

g) $f(x)=x^2+x+1$ en $x=0$ mediante (2)

h) $f(x)=\sqrt{2x}$ en $x=2$ mediante (1)

i) $f(x)=1/x^2$ en $x=1$ mediante (2)

(Soluc: a) 4; b) -12; c) 2; d) 12; e) 1/4; f) -1; g) 1; h) 1/2; i) -2)

2. Volver a hacer el ejercicio anterior por la fórmula alternativa en cada caso, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.
3. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-x$ en $x=1$. Dibujar la función y trazar la recta tangente en dicho punto. Hallar el ángulo que dicha tangente forma con OX^+ e interpretar el resultado.

Función derivada $f'(x)$:

Fórmula:
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3)$$

4. Hallar la derivada de las funciones del ejercicio 1 y sustituir el punto indicado en cada caso, para comprobar que se obtiene el mismo resultado.
5. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, y a partir de ella obtener $f'(2)$, $f'(-1)$ y $f'(0)$:
- a) $f(x)=3x-2$ b) $f(x)=x^2-5x+6$ c) $f(x)=x^3+1$ d) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ e) $f(x)=\frac{1}{x+1}$
6. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-3x$ en $x=1$ mediante la definición de derivada (es decir, mediante un límite).
(Sol: -1)

Reglas de derivación. Tabla de derivadas:

7. Utilizando la derivada de la función potencial, $y=x^n \Rightarrow y'=n \cdot x^{n-1} \quad (\forall n \in \mathbb{R})$, hallar la derivada, **simplificada**, de las siguientes funciones:



a) $y=x^2$	b) $y=x^3$	c) $y=3x^4$	d) $y=-2x^5$	e) $y=\frac{3}{2}x^4$
f) $y=\frac{x^2}{4}$	g) $y=\sqrt{x}$	h) $y=\sqrt{x^3}$	i) $y=\sqrt[3]{x^2}$	j) $y=2\sqrt[4]{x^3}$
k) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$	l) $y=x^2\sqrt{x}$	m) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2}$	n) $y=-2x^6$	o) $y=\frac{x^8}{4}$
p) $y=2\sqrt{x}$	q) $y=3\sqrt[5]{x^3}$	r) $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$		

(Soluc: a) $y'=2x$; b) $y'=3x^2$; c) $y'=12x^3$; d) $y'=-10x^4$; e) $y'=6x^3$; f) $y'=x/2$; g) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; h) $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; i) $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;
j) $y'=\frac{3}{2\sqrt[4]{x}}$; k) $y'=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$; l) $y'=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$; m) $y'=\frac{-3\sqrt{x}}{2x^3}$; n) $y'=-12x^5$; o) $y'=2x^7$; p) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$;
q) $y'=\frac{9}{5\sqrt[5]{x^2}}$; r) $y'=\frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$)

8. Utilizando la fórmula de la derivada de la suma de funciones, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+x+1$	b) $y=2x^3-3x^2+5x-3$	c) $y=\frac{x^2}{3}-\frac{x}{5}+1$	d) $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}$
----------------	-----------------------	------------------------------------	--

(Soluc: a) $y'=2x+1$; b) $y'=6x^2-6x+5$; c) $y'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}$; d) $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$)

9. Utilizando en cada caso la fórmula más apropiada de la tabla de derivadas, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones compuestas:

a) $y=\frac{1}{x^2}$	b) $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$	c) $y=\sqrt{x^2+1}$	d) $y=(x^2-3)^2$	e) $y=\frac{2}{x^3}$
f) $y=(x^2+x+1)^3$	g) $y=\sqrt[3]{2x^3-3}$	h) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$	i) $y=3(x^2+1)^{10}$	j) $y=2(3x^2-1)^4$
k) $y=\frac{2}{(x^2+1)^3}$				

(Sol: a) $y'=\frac{-2}{x^3}$; b) $y'=-\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$; c) $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; d) $y'=4x^3-12x$; e) $y'=\frac{-6}{x^4}$; f) $y'=3(2x+1)(x^2+x+1)^2$;
g) $y'=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-3)^2}}$; h) $y'=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; i) $y'=60x(x^2+1)^9$; j) $y'=48x(3x^2-1)^3$; k) $y'=\frac{-12x}{(x^2+1)^4}$)

10. Ídem:

a) $y=x\sqrt{x^3}$	b) $y=(2x-3)(x^2-5)$	c) $y=x^2\sqrt[3]{x}$	d) $y=(2x-3)\sqrt[4]{x^3}$	e) $y=(2x+1)(x^2-3)^2$
f) $y=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2$				

(Soluc: a) $y'=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$; b) $y'=6x^2-6x-10$; c) $y'=\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$; d) $y'=\frac{14x-9}{4\sqrt[4]{x}}$; e) $y'=10x^4+4x^3-36x^2-12x+18$;
f) $y'=\frac{-3x+1}{2(x+1)^3\sqrt{x}}$)

11. Utilizando la fórmula para el cociente de funciones, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x^2 - 5}{x + 2}$

b) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$

c) $y = \frac{x + 2}{x^2 - 5}$

d) $y = \frac{3x}{(2x^2 + 1)^2}$

e) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$

(Sol: a) $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x + 2)^2}$; b) $y' = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$; c) $y' = -\frac{x^2 + 4x + 5}{(x^2 - 5)^2}$; d) $y' = \frac{3 - 18x^2}{(2x^2 + 1)^3}$; e) $y' = \frac{3x^2 + 4x}{2(x + 1)\sqrt{x + 1}}$)

12. Derivar las siguientes funciones, utilizando en cada caso el procedimiento más apropiado, y **simplificar**:

a) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

b) $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$

c) $y = \frac{x + 1}{1 - x}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$

e) $y = \frac{3x^4 - 2x^2 + 5}{2}$

f) $y = (3x^2 + 5)^5$

g) $y = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$

(Sol: a) $y' = \frac{-2}{x^3}$; b) $y' = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$; c) $y' = \frac{2}{(1 - x)^2}$; d) $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$; e) $y' = 6x^3 - 2x$; f) $y' = 30x(3x^2 + 5)^4$

g) $y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + x + 1)^2}$)

13. Hallar la fórmula para la derivada de $y = \frac{u}{v \cdot w}$ e $y = \frac{u \cdot v}{w}$, siendo u, v y w funciones.

Ecuación de la recta tangente:

14. Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x^2 + 8$ en $x = 1$

(Sol: $6x - y + 5 = 0$)

c) $f(x) = x^4 - 1$ en $x = 0$

(Sol: $y = -1$)

b) $y = 2x^5 + 4$ en $x = -1$

(Sol: $10x - y + 12 = 0$)

d) $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 3}$ en $x = 2$

(Sol: $y = -12x + 30$)

15. ¿En qué punto de la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 8$ la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Qué nombre recibe ese punto? ¿Cuál es la ecuación de la tangente? Dibujar la situación.

(Soluc: $y = -1$; vértice $(3, -1)$)

16. ¿En qué punto de la gráfica de la función anterior la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Dibujar la situación. (Soluc: $(7/2, -3/4)$)

17. (S) Determinar los puntos de la curva $y = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y = 12x + 5$ (Soluc: $(1, 16)$ y $(-7, 176)$)

Intervalos de crecimiento. M y m. Representación de funciones:

18. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 1$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

e) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 6$

f) $f(x) = x^3$

g) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 10$

h) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

i) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$

j) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 3$

k) $y = 2x^3 - 9x^2$

l) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

m) $y = x^3 - 12x$

(Soluc: a) $\nearrow (0, \infty) \searrow (-\infty, 0)$; b) $\nearrow (-1, 0) \cup (1, \infty) \searrow (-\infty, -1) \cup (0, 1)$; c) $\nearrow (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \searrow (0, 2)$; d) $\nearrow (-\infty, 1) \cup (3, \infty) \searrow (1, 3)$; e) $\nearrow \forall x \in \mathbb{R}$; f) $\nearrow \forall x \in \mathbb{R}$; g) $\searrow (-\infty, 0) \nearrow (0, \infty)$; h) $\nearrow (-\infty, -1) \cup (3, \infty) \searrow (-1, 3)$; i) $\searrow (-\infty, 3) \nearrow (3, \infty)$)

19. Dada $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ se pide: i) Dom (f) ii) Posible Simetría. iii) Posibles cortes con los ejes. iv) Intervalos de crecimiento a partir de $f'(x)$, y posibles M y m que se deducen. v) Ecuación de las asíntotas, en caso de existir. vi) Con la información anterior, representarla gráficamente.

20. Ídem para:

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $y = \frac{x+2}{x-1}$

c) $y = x^4 - 2x^2$

d) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

e) $f(x) = x^3 - 3x^2$

f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

g) $y = -x^3 + 12x$

h) $f(x) = \frac{9}{x^2 - 9}$

i) $f(x) = \frac{16 - 8x}{x^2}$

j) $y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$

k) $y = \frac{x}{x^2 - x + 1}$

l) $y = \frac{4x}{(x-1)^2}$

m) $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$

21. Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones, y a partir de ellos los intervalos de monotonía y su representación gráfica:

a) $y = \frac{x^2}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^4 + 3}$

d) $y = \frac{1}{x^3 + x}$

e) $f(x) = |x|$

(Soluc: a) M(-4, -8) m(0, 0); b) M(0, 1); c) M(0, 1/3); d) no tiene; e) m(0, 0))

22. Hallar los M y m y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3}$

(Soluc: m(-1, $\sqrt[3]{2}$); $\searrow (-\infty, -1) \nearrow (-1, \infty)$)

23. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$f(x) = \frac{4x+5}{2x-3}$

(Solución: decreciente $\forall x \in \text{Dom}(f)$)

73 DERIVADAS (con SOLUCIONES)

■ Hallar las derivadas simplificadas de las siguientes funciones:

1. $y=3$	$(y'=0)$	20. $y=(x+1)^5$	$(y'=5(x+1)^4)$
2. $y=x$	$(y'=1)$	21. $y=(2x^2-3x+1)^3$	$(y'=3(2x^2-3x+1)^2(4x-3))$
3. $y=5x$	$(y'=5)$	22. $y=(x^2+1)^{100}$	$(y'=200x(x^2+1)^{99})$
4. $y=x^3$	$(y'=3x^2)$	23. $y=\frac{x+1}{x-1}$	$(y'=\frac{-2}{(x-1)^2})$
5. $y=x^4+x^3+x^2+x+1$	$(y'=4x^3+3x^2+2x+1)$	24. $y=\frac{1}{x^2+1}$	$(y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2})$
6. $y=4x^4-x^3+3x^2-7$	$(y'=16x^3-3x^2+6x)$	25. $y=3\frac{2x^2-1}{x^3+1}$	$(y'=3\frac{-2x^4+3x^2+4x}{(x^3+1)^2})$
7. $y=-\frac{x^5}{5}+4x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}-3$	$(y'=-x^4+16x^3-\frac{1}{2}x^2+x)$	26. $y=\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^4$	$(y'=\frac{44(2x-3)^3}{(x+4)^5})$
8. $y=3(x^2+x+1)$	$(y'=3(2x+1))$	27. $y=\sqrt{x^2+1}$	$(y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$
9. $y=4(3x^3-2x^2+5)+x^2+1$	$(y'=36x^2-14x)$	28. $y=2\sqrt{x^3-x^2+1}(2x^2+3)$	$(y'=\frac{14x^4-12x^3+9x^2+2x}{\sqrt{x^3-x^2+1}})$
10. $y=\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{2}$	$(y'=3x^2-3x+2)$	29. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}$	$(y'=-3x^3+x^2+x+1/x^2)$
11. $y=(x^2+1)(2x^3-4)$	$(y'=10x^4+6x^2-8x)$	30. $y=2/x$	$(y'=-2/x^2)$
12. $y=1/x$	$(y'=-1/x^2)$	31. $y=3(x^2-x+1)(x^2+x-1)$	$(y'=3(4x^3-2x+2))$
13. $y=1/x^3$	$(y'=-3/x^4)$	32. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$	$(y'=\frac{4x}{(x^2+1)^2})$
14. $y=2/x^5$	$(y'=-10/x^6)$	33. $y=x/2$	$(y'=1/2)$
15. $y=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}$	$(y'=\frac{3x^2-2x-6}{x^4})$	34. $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$	$(y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4})$
16. $y=\sqrt{x}$	$(y'=\frac{1}{2\sqrt{x}})$	35. $y=(2x^2-1)(x^2-2)(x^3+1)$	$(y'=14x^6-25x^4+8x^3+6x^2-10x)$
17. $y=\sqrt[3]{x^2}$	$(y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})$	36. $y=\sqrt{\frac{1-x^3}{x^2+1}}$	$(y'=\frac{(-x^4-3x^2-2x)\sqrt{x^2+1}}{2(x^2+1)^2\sqrt{1-x^3}})$
18. $y=\sqrt[5]{x^3}$	$(y'=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}})$	37. $y=(x^2+1)(3x+2)^3$	$(y'=(3x+2)^2(15x^2+4x+9))$
19. $y=2\sqrt[3]{x^2}-3x^2+\frac{1}{5}$	$(y'=\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}-6x)$	38. $y=(3x^2+2)(2x+1)^3$	$(y'=(2x+1)^2(30x^2+6x+12))$

$$39. y = \frac{1}{3x^5 - x^3 + 2} \quad \left(y' = \frac{-15x^4 + 3x^2}{(3x^5 - x^3 + 2)^2} \right)$$

$$40. y = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 3} \quad \left(y' = \frac{2x^3 - 2x}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 3}} \right)$$

$$41. y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} \quad \left(y' = \frac{-2x\sqrt{x^2 - 1}}{(x^2 - 1)^2 \sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$42. y = \sqrt[5]{x^2 + 1} \quad \left(y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} \right)$$

$$43. y = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{5} \quad \left(y' = \frac{4x^3 - 4x}{5} \right)$$

$$44. y = \frac{5}{x^4 - 2x^2 + 1} \quad \left(y' = \frac{20x - 20x^3}{(x^4 - 2x^2 + 1)^2} \right)$$

$$45. y = 3(x+1)^3 \sqrt[3]{x+1} \quad \left(y' = 10\sqrt[3]{(x+1)^7} \right)$$

$$46. y = x^3 \sqrt{x} \quad \left(y' = \frac{7x^2 \sqrt{x}}{2} \right)$$

$$47. y = \sqrt[3]{\frac{1}{2x+1}} \quad \left(y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^4}} \right)$$

$$48. y = 2x(x^2+1)(2x-1)(x+2)$$

$$49. y = 3 \frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1} \quad \left(y' = 3 \frac{2x^3 + 3x^2 - 5}{(x+1)^2} \right)$$

$$50. y = \frac{2x+4}{\sqrt{x+3}} \quad \left(y' = \frac{x+4}{\sqrt{(x+3)^3}} \right)$$

$$51. y = \frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{5} + \frac{1}{x} \quad (y' = 3x^3 - 2x^2 + x - 1/5 - 1/x^2)$$

$$52. y = \sqrt[4]{(x^4 - 1)^3} \quad \left(y' = \frac{3x^3}{\sqrt[4]{x^4 - 1}} \right)$$

$$53. y = \frac{1}{(x^2 + 1)^3} \quad \left(y' = \frac{-6x}{(x+1)^4} \right)$$

$$54. y = \frac{2x^2 - 3}{3x^2 - 2} \quad \left(y' = \frac{10x}{(3x^2 - 2)^2} \right)$$

$$55. y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4} \quad \left(y' = \frac{-18x}{(x^2 - 4)^2} \right)$$

$$56. y = 2(3x^2 - 2)^3 \quad (y' = 324x^5 - 432x^3 + 144x)$$

$$57. y = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} \quad \left(y' = \frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \right)$$

$$58. y = \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x} \quad \left(y' = \frac{-4x^2 + 4x - 9}{x^4} \right)$$

$$59. y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{5} + \sqrt{x}$$

$$60. y = \sqrt[3]{x^3 - 2}^2$$

$$61. y = \sqrt{\frac{2}{x}}$$

$$62. y = 1 + \frac{x^3 - 3}{x^3 + 2}$$

$$63. y = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3$$

$$64. y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{2x^2}$$

$$65. y = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$$

$$66. y = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$$

$$67. y = (x^2 - 3)^3 (2x - 1)$$

$$68. y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$69. y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

$$70. y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

$$71. y = \sqrt[3]{\frac{2}{x}} \quad \left(y' = -\frac{\sqrt[3]{4x^2}}{3x^2} \right)$$

$$72. y = \frac{x}{2} \sqrt{24 - x^2} \quad \left(y' = \frac{12 - x^2}{\sqrt{24 - x^2}} \right)$$

$$73. y = \frac{4}{(2x+2)^2} \quad \left(y' = -\frac{16}{(2x+2)^3} \right)$$

82 DERIVADAS (con SOLUCIONES)

■ Hallar las derivadas simplificadas de las siguientes funciones:

- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $y = 5$ | ($y'=0$) | 20. $y = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1$ | $\left(y' = -\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right)$ |
| 2. $y = 3/2$ | ($y'=0$) | 21. $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ | $\left(y' = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x - 3)^2} \right)$ |
| 3. $y = 3x$ | ($y'=3$) | 22. $y = \frac{3}{x^3 - 2x^2 + 5}$ | $\left(y' = -3 \frac{3x^2 - 4x}{(x^3 - 2x^2 + 5)^2} \right)$ |
| 4. $y = 2x - 3$ | ($y'=2$) | 23. $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{3}$ | $\left(y' = \frac{3x^2 - 4x}{3} \right)$ |
| 5. $y = -x$ | ($y'=-1$) | 24. $y = \sqrt{x}$ | $\left(y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ |
| 6. $y = \frac{x}{2} - 5$ | ($y'=1/2$) | 25. $y = \sqrt{6x}$ | $\left(y' = \frac{3}{\sqrt{6x}} \right)$ |
| 7. $y = x^4$ | ($y'=4x^3$) | 26. $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ | $\left(y' = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \right)$ |
| 8. $y = 2x^5$ | ($y'=10x^4$) | 27. $y = \sqrt[3]{x}$ | $\left(y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right)$ |
| 9. $y = \frac{x^3}{2}$ | $\left(y' = \frac{3x^2}{2} \right)$ | 28. $y = \sqrt[3]{x^2}$ | $\left(y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right)$ |
| 10. $y = x^3 + x^2 + x + 1$ | ($y'=3x^2 + 2x + 1$) | 29. $y = 2\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt{x+1}$ | $\left(y' = \frac{8}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{3}{2\sqrt{x+1}} \right)$ |
| 11. $y = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 8$ | ($y'=8x^3 - 6x + 5$) | 30. $y = (x^2 + 1)^2$ | ($y'=4x^3 + 4x$) |
| 12. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{7} + 5$ | $\left(y' = x^4 - x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{7} \right)$ | 31. $y = (x^2 + 1)^{100}$ | ($y'=200x(x^2 + 1)^{99}$) |
| 13. $y = -x^4 + \frac{1}{7}$ | ($y'=-4x^3$) | 32. $y = (2x^3 - 3x + 5)^3$ | ($y'=3(2x^3 - 3x + 5)^2(6x^2 - 3)$) |
| 14. $y = \frac{1}{x}$ | $\left(y' = -\frac{1}{x^2} \right)$ | 33. $y = 5(\sqrt{x} + 1)^2$ | $\left(y' = \frac{5(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} \right)$ |
| 15. $y = \frac{3}{x}$ | $\left(y' = -\frac{3}{x^2} \right)$ | 34. $y = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$ | $\left(y' = 5\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^4 \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) \right)$ |
| 16. $y = \frac{1}{3x}$ | $\left(y' = -\frac{1}{3x^2} \right)$ | 35. $y = (2x^2 - 3)(x^2 - 3x + 1)$ | ($y'=8x^3 - 18x^2 - 2x + 9$) |
| 17. $y = \frac{1}{x^2}$ | $\left(y' = -\frac{2}{x^3} \right)$ | | |
| 18. $y = \frac{3}{x^3}$ | $\left(y' = -\frac{9}{x^4} \right)$ | | |
| 19. $y = \frac{1}{2x^4}$ | $\left(y' = -\frac{2}{x^5} \right)$ | | |

$$36. y = (x^2+x+1)(x^2-x+1) \quad (y'=4x^3+2x)$$

$$37. y = (x^2-3)(2x^2-5)^3$$

$$38. y = (x^2+1)(x-3)(x^2+x) \quad (y'=5x^4-8x^3-6x^2-4x-3)$$

$$39. y = x^2 \sqrt{x} \quad \left(y' = \frac{5}{2} x \sqrt{x} \right)$$

$$40. y = \sqrt[4]{x^3} (2x-3) \quad \left(y' = \frac{14x-9}{4\sqrt[4]{x}} \right)$$

$$41. y = \frac{2x-3}{2x+3} \quad \left(y' = \frac{12}{(2x+3)^2} \right)$$

$$42. y = \frac{x^2-3}{2x+1} \quad \left(y' = \frac{2x^2+2x+6}{(2x+1)^2} \right)$$

$$43. y = \frac{2x^2-1}{x^2+2} \quad \left(y' = \frac{10x}{(x^2+2)^2} \right)$$

$$44. y = \frac{3}{x^2-1} \quad \left(y' = \frac{-6x}{(x^2-1)^2} \right)$$

$$45. y = \frac{x}{\sqrt{x}} \quad \left(y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$46. y = \sqrt{\frac{1}{x}+1} \quad \left(y' = \frac{-1}{2x\sqrt{x^2+x}} \right)$$

$$47. y = 3 \frac{x^2-4}{x^2+1} \quad \left(y' = \frac{30x}{(x^2+1)^2} \right)$$

$$48. y = \frac{(3x^2-1)^3}{x^2+1} \quad \left(y' = \frac{108x^7+108x^5-108x^3+20x}{(x^2+1)^2} \right)$$

$$49. y = \sqrt[4]{x^3} \quad \left(y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} \right)$$

$$50. y = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \left(y' = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2} \right)$$

$$51. y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \left(y' = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}} \right)$$

$$52. y = \frac{x}{\sqrt[3]{x}} \quad \left(y' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}} \right)$$

$$53. y = \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad \left(y' = -\frac{3\sqrt{x}}{2x^3} \right)$$

$$54. y = x^3 \sqrt{x} \quad \left(y' = \frac{7\sqrt{x^5}}{2} \right)$$

$$55. y = \frac{1}{(x^2+x+1)^2} \quad \left(y' = -\frac{4x}{(x^2+x+1)^3} \right)$$

$$56. y = \frac{x}{x^2+1} \quad \left(y' = -\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} \right)$$

$$57. y = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \left(y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \right)$$

$$58. y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}} \quad \left(y' = \frac{(x^2+2x-1)\sqrt{x+1}}{2(x+1)^2\sqrt{x^2+1}} \right)$$

$$59. y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad \left(y' = -\frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)^2\sqrt{x+1}} \right)$$

$$60. y = \sqrt{x^5} \quad \left(y' = \frac{5\sqrt{x^3}}{2} \right)$$

$$61. y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2} \quad \left(y' = -\frac{3x+8}{2x^3\sqrt{x+2}} \right)$$

$$62. y = \frac{2x+3}{x^2+4x-1} \quad \left(y' = -\frac{2x^2+6x+14}{(x^2+4x-1)^2} \right)$$

$$63. y = \frac{3x}{x^2-4} \quad \left(y' = -\frac{3x^2+12}{(x^2-4)^2} \right)$$

$$64. y = \frac{x}{x-1} \quad \left(y' = -\frac{1}{(x-1)^2} \right)$$

$$65. y = \sqrt{x^2-5} \quad \left(y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \right)$$

$$66. y = x^6-10x^4+8x-3 \quad (y' = 6x^5-40x^3+8)$$

$$67. y = \frac{x^3-x+1}{x-3} \quad \left(y' = \frac{2x^3-9x^2+2}{(x-3)^2} \right)$$

$$68. y = \frac{x^2}{x^2-25} \quad \left(y' = -\frac{50x}{(x^2-25)^2} \right)$$

$$69. y = 5x^4+x^3-x+6 \quad (y' = 20x^3+3x^2-1)$$

70. $y = \sqrt[3]{2x^7}$	$\left(y' = \frac{7 \sqrt[3]{2x^7}}{3x} \right)$	76. $y = 4x + \sqrt[5]{x}$	$\left(y' = 4 + \frac{1}{5 \sqrt[5]{x^4}} \right)$
71. $y = \frac{5}{x} + \sqrt{x^3}$	$\left(y' = -\frac{5}{x^2} + \frac{3}{2} \sqrt{x} \right)$	77. $y = 5x + \frac{2}{x}$	$\left(y' = 5 - \frac{2}{x^2} \right)$
72. $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$	$\left(y' = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2} \right)$	78. $y = 5x^9 (3x + 2)^3$	$(y' = 45x^8 (3x + 2)^2 (4x + 2))$
73. $y = x^4 - 10x^2 + 8$	$(y' = 4x^3 - 20x)$	79. $y = \frac{x\sqrt{x}}{x + 2}$	$\left(y' = \frac{\sqrt{x}(x + 6)}{2(x + 2)^2} \right)$
74. $y = \sqrt[6]{x}$	$\left(y' = \frac{1}{6 \sqrt[6]{x^5}} \right)$	80. $y = \frac{2x}{5x + 8}$	$\left(y' = \frac{16}{(5x + 8)^2} \right)$
75. $y = \frac{5}{x^2} + \sqrt{x}$	$\left(y' = -\frac{10}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$	81. $y = (x^3 + 8x)^{10}$	$(y' = 10 (x^3 + 8x)^9 (3x^2 + 8))$
		82. $y = \frac{3x - 1}{x^5 - 4x}$	$\left(y' = \frac{-12x^5 + 5x^4 - 4}{(x^5 - 4x)^2} \right)$

83. Deducir la fórmula de la derivada de $y = \sqrt[n]{x}$ e $y = \sqrt[n]{u}$

84. Deducir las derivadas de $y = \frac{u}{v \cdot w}$ e $y = \frac{u \cdot v}{w}$

ESTADÍSTICA UNIDIMENSIONAL



MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato CCNN

**Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas**



I) INTRODUCCIÓN. DEFINICIONES

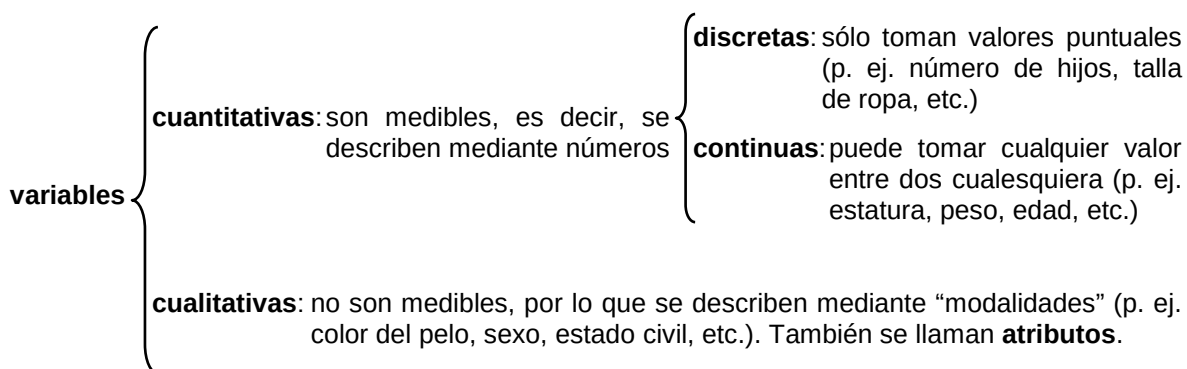
La **Estadística** es la rama de las Matemáticas que utiliza conjuntos de datos numéricos para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades. Es una ciencia relativamente reciente, pues sus orígenes se remontan al siglo XVIII. Pero su implantación hoy en día es muy acusada:

- Se diseñan encuestas para recopilar información previa al día de elecciones y así predecir el resultado de las mismas.
- Se seleccionan al azar consumidores para obtener información con el fin de predecir la preferencia con respecto a ciertos productos y/o servicios.
- Los economistas consideran varios índices de la situación económica durante cierto periodo y utilizan la información para predecir la situación económica futura.
- Su utilidad es evidente también para los asesores financieros que han de evaluar las oportunidades de inversión a través de las bolsas de valores.
- Los portales de apuestas deportivas online recurren a la Estadística para, de acuerdo con todos los datos hasta la fecha, determinar el nivel de confianza de cada una de los posibles resultados.

La Estadística se divide en dos grandes ramas:

- La **Estadística Descriptiva** se dedica a recolectar, ordenar, analizar y representar un conjunto de datos, con el fin de describir apropiadamente las características de éstos. Utiliza para ello las llamadas «medidas de centralización», que veremos en el apartado IV. Esta es la que estudiaremos este curso.
- La **Estadística Inductiva o Inferencial** tiene como objeto obtener conocimientos sobre un colectivo, utilizando para ello las observaciones de una muestra, para así poder inferir resultados¹. En este proceso se utiliza el cálculo de probabilidades.

Para todo lo anterior, la Estadística trabaja con una serie de aspectos, cualidades o propiedades de los individuos de la población, llamados **caracteres**; los valores que recorre un determinado carácter se llaman **variables estadísticas**. Pueden ser de varios tipos:



Población es el conjunto de elementos que se investigan, **muestra** es una parte representativa de la población, e **individuo** es cada uno de los elementos que forman la población.

Ejemplo 1: Una población puede ser los 90 individuos de los tres grupos de 1º de Bachillerato de un centro. Para estudiarla con mayor comodidad, podemos tomar una muestra formada por los 5 primeros

¹ Es decir, pretende tomar como generales propiedades que sólo se han verificado para casos particulares. Las preguntas típicas que se hace la Estadística Inferencial son: ¿Cómo se elige la muestra? ¿Qué grado de confianza tiene el resultado obtenido? Por el contrario, la Estadística Descriptiva no intenta extraer conclusiones para un grupo mayor.

de la lista de cada grupo. Ejemplos de variables que podemos analizar son su nivel de inglés (variable cualitativa), número de hermanos (cuantitativa discreta) y edad (cuantitativa continua).

Ejercicios final tema: 1 y 2

II) FRECUENCIAS y TABLAS

Ejemplo 2: En un instituto hay una clase de 1º de Bachillerato cuyos 20 alumnos presentan las siguientes edades:

16 16 16 16 16 16 16 16 17 16
16 16 19 18 18 18 16 16 17 17

La variable que vamos a estudiar en esta distribución es la edad (variable cuantitativa), que llamaremos x_i . Para ello, vamos a construir la siguiente tabla²:

x_i Edad (años)	f_i	F_i	h_i	H_i
16	13	13	0,65	0,65
17	3	16	0,15	0,80
18	3	19	0,15	0,95
19	1	20	0,05	1
$\Sigma=20$ alumnos			$\Sigma=1$	

La 2ª columna recoge la **frecuencia absoluta**, f_i , que es el **número de veces que aparece cada valor de la variable**.

La 3ª columna refleja la **frecuencia absoluta acumulada**, F_i , que se obtiene **sumando la frecuencia absoluta de cada fila con las anteriores** (es decir, $F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$). Por ejemplo, el dato 16 de la 2ª fila significa que hay 16 alumnos que tienen 17 años o menos. Más adelante veremos (apdo. IV.2) que sirve para calcular la mediana.

En la 4ª columna tenemos la **frecuencia relativa**, h_i , que es la **frecuencia absoluta dividida por el nº de datos**, N :

$$h_i = \frac{f_i}{N} \quad (1)$$

Obviamente, la suma de las frecuencias absolutas es N , y la de las relativas es 1:

$$\sum_{i=1}^n f_i = N \quad \sum_{i=1}^n h_i = 1 \quad (2)$$

Esto último es muy útil a la hora de detectar posibles errores en los datos de una tabla. Las h_i pueden verse como un tanto por uno. Por ejemplo, el dato 0,15 de la 3ª fila nos dice que el 15% de la clase tiene 18 años.

Finalmente, la última columna recoge la **frecuencia relativa acumulada**, H_i , que se obtiene **sumando la frecuencia relativa de cada fila con las anteriores**. Por ejemplo, el dato 0,95 de la 3ª fila significa que el 95% de los alumnos tienen 18 años o menos.

² La idea de utilizar una tabla es que así un gran número de datos se pueden visualizar más cómodamente. Por tanto, cuando la distribución esté formada por pocos datos, no tiene sentido hacer una tabla, sino que basta con presentarlos ordenados.

Ejemplo 3: En la misma clase del ejemplo anterior los 20 alumnos presentan las siguientes estaturas (en cm):

164 175 165 170 168 157 167 172 177 160
168 160 164 174 170 182 161 171 173 194

Nótese que hemos indicado los valores mínimo y máximo subrayados. La variable que vamos a estudiar ahora es la estatura (variable cuantitativa). Para confeccionar la tabla utilizaremos intervalos de amplitud 10 –llamados **intervalos de clase**–, comenzando por 155:

x_i Estatura (cm)	f_i	F_i	h_i	H_i
[155-165)	6	6	0,30	0,30
[165-175)	10	16	0,50	0,80
[175-185)	3	19	0,15	0,95
[185-195]	1	20	0,05	1
$\Sigma=20$ alumnos			$\Sigma=1$	

Adviértase que en cada intervalo de clase se incluye el extremo inferior pero no el superior, salvo en el último. El punto medio de cada intervalo de clase se llama **marca de clase**, y lo denotaremos por x_i .

¿Cuándo utilizar un tipo de tabla u otro?:

- 1º) **Tablas con los valores de la variable individualizados** (como en el ejemplo 2): **cuando**, ya sean pocos o muchos datos, **la variable toma pocos valores diferentes** (es decir, los valores se repiten mucho).
- 2º) **Tablas con los valores de la variable agrupados en intervalos** de clases (como en el ejemplo 3): **cuando el número de datos y de valores diferentes que toma la variable son grandes**. Con ello perderemos algo de información pero ganaremos en claridad...

En este último caso, ¿cuántos intervalos de clase utilizar? Existe un criterio orientativo según el cual el nº de clases debe ser aproximadamente igual a la $\sqrt{\text{del número de datos}}$:

$$\boxed{\text{nº clases} = \sqrt{N}} \quad (3)$$

En el ejemplo anterior sería $\sqrt{20} \cong 4,47$, es decir, 4 intervalos vendrían bien. A continuación, se determina la amplitud de los intervalos teniendo en cuenta los valores mínimo (157 cm) y máximo (194 cm) de la distribución:

$$\frac{194\text{cm} - 157\text{cm}}{4\text{ intervalos}} = \frac{37\text{cm}}{4\text{ intervalos}} \cong 9,25\text{cm / intervalo} \quad (4)$$

de modo que 10 cm por intervalo es lo apropiado. A la hora de decidir dónde comienza el primer intervalo **se recomienda que**, finalmente, **los extremos de los intervalos no coincidan con ninguno de los datos**.

Nótese que en la práctica el elegir un tipo de tabla u otro puede ser relativo: ¿qué se entiende por “pocos datos”? Veremos que una misma distribución se puede estudiar con dos tablas no necesariamente iguales, y las dos pueden ser perfectamente válidas.

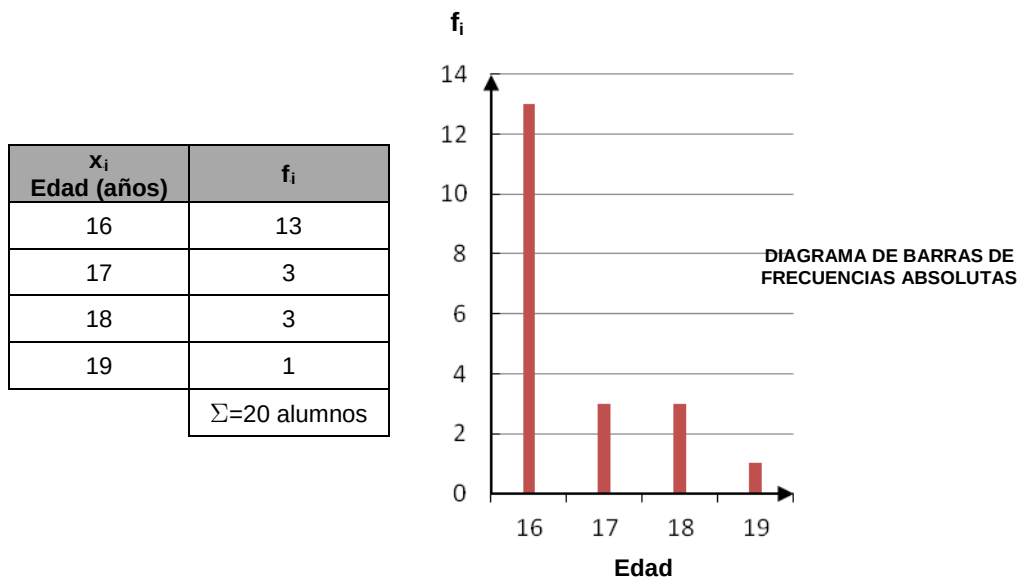
También, téngase en cuenta que en ciertos casos los intervalos no tienen por qué ser necesariamente de igual amplitud (véase el ejemplo 4)

Ejercicios final tema: 3 y 4

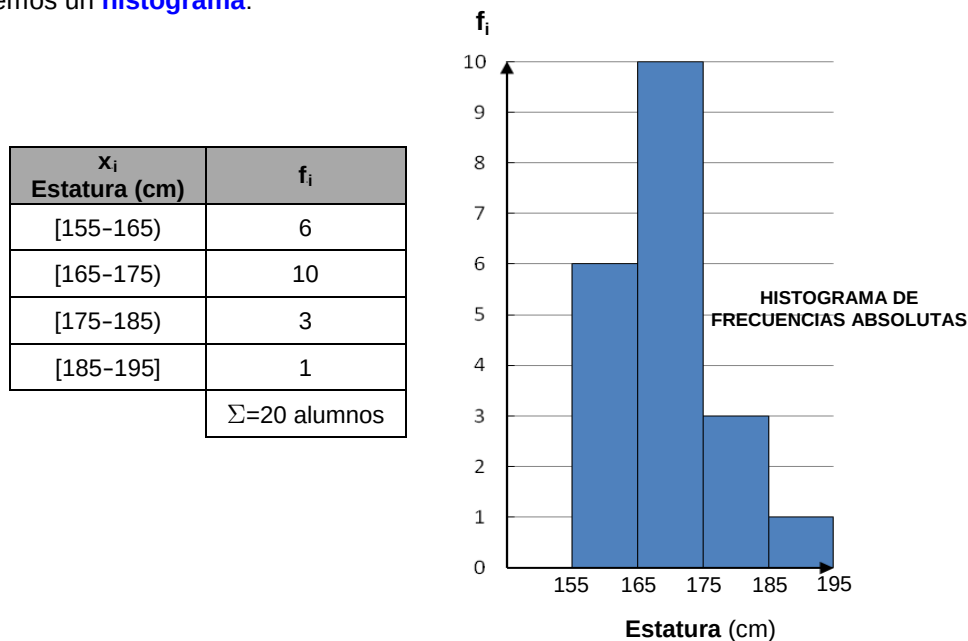
III) REPRESENTACIONES GRÁFICAS

III.1) Diagrama de barras/Histograma

Consideremos la distribución del ejemplo 2. En unos ejes cartesianos situamos en el eje horizontal las edades y en el vertical la frecuencia absoluta f_i . Levantamos, a continuación, barras cuya altura es la frecuencia. Obtendremos así un **diagrama de barras**³:



Si hacemos lo propio con el ejemplo 3 pero, esta vez, dando a las barras el ancho de los intervalos, obtendremos un **histograma**:



¿Cuál es la diferencia entre el diagrama de barras y el histograma?

- El **diagrama de barras** visualiza las frecuencias como alturas, y se utiliza para **variables discretas** (y también para **cualitativas**)
- En el **histograma** el **área de cada rectángulo representa la frecuencia correspondiente**, y se utiliza para **datos agrupados en intervalos** (i.e. variable continua, o discreta agrupada en intervalos).

³ Obviamente, la idea de representar gráficamente los datos de la distribución es poder visualizar mejor ésta. Por tanto, si se trata de pocos datos, no tiene sentido ni tabularlos ni hacer una gráfica: basta con presentarlos ordenados.

En el histograma anterior, y puesto que los intervalos tenían la misma amplitud, los rectángulos tienen la altura correspondiente a la f_i . Ahora bien, si son de distinta amplitud, entonces habrá que ajustar la altura a_i de cada rectángulo mediante la siguiente fórmula:

$$\text{área} = f_i = \text{amplitud} \cdot a_i \Rightarrow a_i = \frac{f_i}{\text{amplitud}} \quad (5)$$

Veámoslo en el siguiente ejemplo:

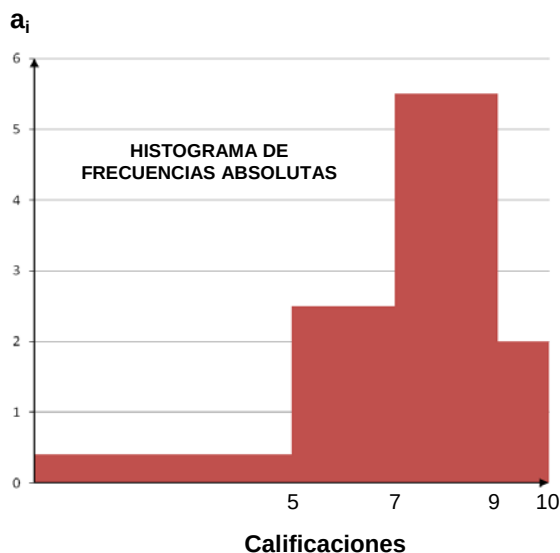
Ejemplo 4: Las calificaciones de una evaluación de los 20 alumnos de 1º Bachillerato A son:

10 8 7 5 5 7 7 7 5 7
10 7 4 6 6 8 7 8 7 4

Confeccionar la correspondiente tabla agrupando los datos en intervalos de suspensos (0 a 5), aprobados (5 a 7), notables (7 a 9) y sobresalientes (9 a 10). Construir el histograma de frecuencias absolutas.

x_i Calificación	f_i	F_i	$a_i=f_i/\text{amplitud}$	h_i	H_i
[0-5)	2	2	$2/5=0,4$	0,10	0,10
[5-7)	5	7	$5/2=2,5$	0,25	0,35
[7-9)	11	18	$11/2=5,5$	0,55	0,90
[9-10]	2	20	$2/1=2$	0,10	1
$\Sigma=20$ alumnos				$\Sigma=1$	

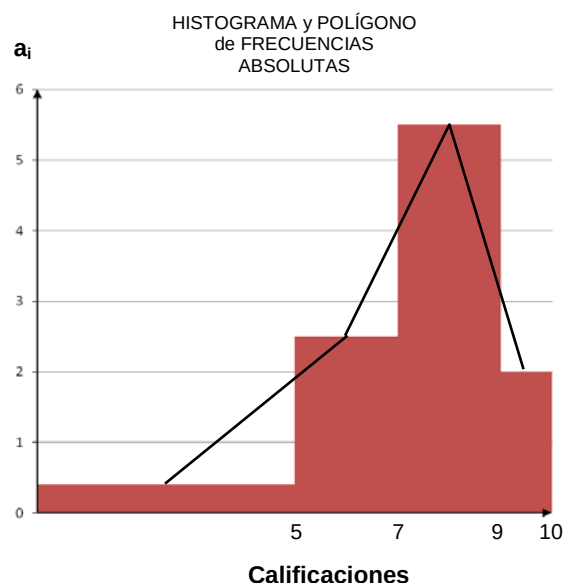
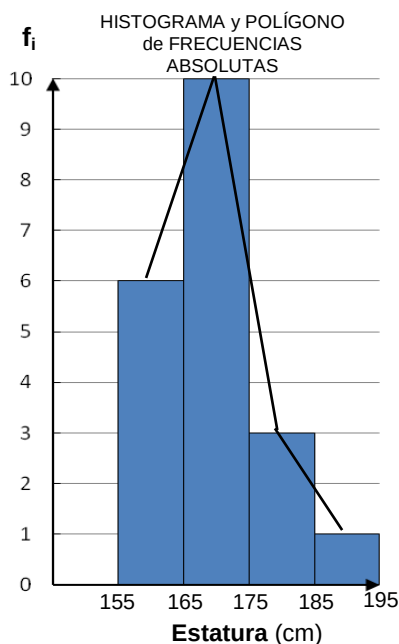
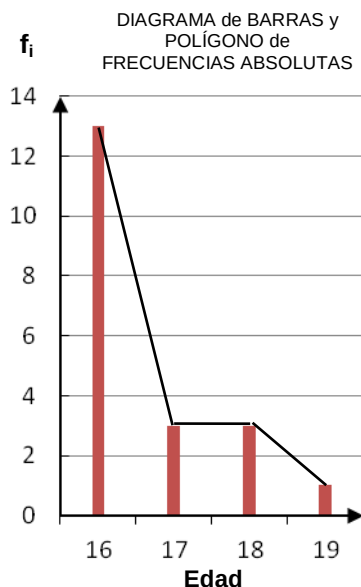
Adviértase que en la 4ª columna se ha tenido que ajustar la altura a_i de cada rectángulo, de acuerdo con la fórmula (5), de forma que su área sea igual a su f_i . De esta forma, el histograma quedaría de la siguiente forma:



III.2) Polígono de frecuencias

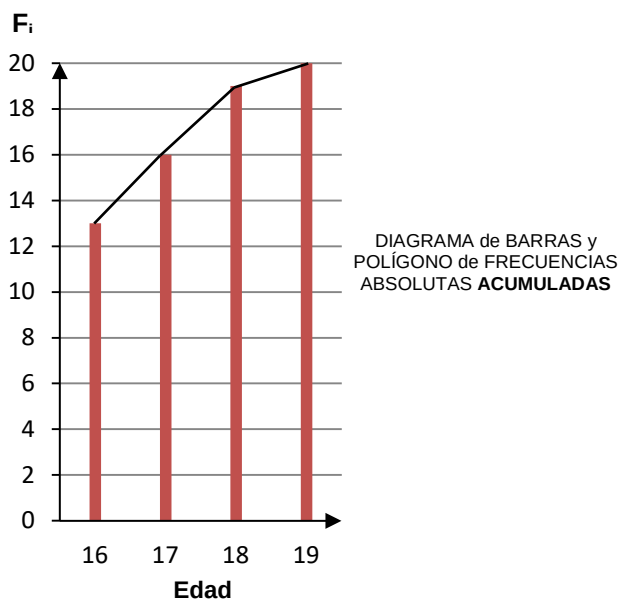
Uniéndolo los extremos superiores de las barras de un diagrama de barras, o los puntos medios del lado superior de cada rectángulo de un histograma⁴, obtenemos el llamado **polígono de frecuencias**. Veámoslo para los ejemplos anteriores:

⁴ En el caso del polígono de frecuencias acumuladas en datos agrupados en intervalos, y como veremos en el apartado IV, para poder obtener gráficamente la mediana no se unen los puntos medios, sino los extremos derechos...



Observaciones:

- 1º) En los ejemplos anteriores lo que se representaba era la frecuencia absoluta. Pero, evidentemente, también existen diagramas de barras o histogramas de frecuencias relativas, de frecuencias acumuladas, polígonos de frecuencias absolutas o relativas acumuladas, etc. Por ejemplo, en el caso del ejemplo 2:

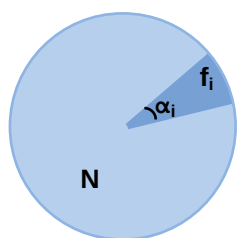


- 2º) En el caso de datos agrupados en intervalos, más adelante explicaremos cómo obtener el polígono de frecuencias (absolutas o relativas) acumuladas, el cual se utiliza para hallar gráficamente la mediana.
- 3º) Obviamente, si la variable es cualitativa, no tienen sentido los gráficos acumulativos....

III.3) Gráfico de sectores

Si dividimos un círculo en sectores circulares de área⁵ proporcional a cada frecuencia absoluta f_i , obtendremos un **gráfico de sectores**. Vamos a obtener, mediante regla de tres, la fórmula que nos indique cuántos grados α_i corresponden a cada sector:

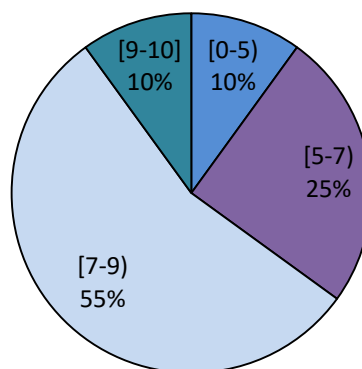
⁵ Lógicamente, si el área del sector circular es proporcional a f_i , también lo será su amplitud.



$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \rightarrow N \\ \alpha_i \rightarrow f_i \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_i = \frac{f_i}{N} \cdot 360^\circ = h_i \cdot 360^\circ \quad (6)$$

Vamos a aplicarla al caso concreto del ejemplo 4:

x_i Calificación	f_i	h_i	$\alpha_i = h_i \cdot 360^\circ$
[0-5]	2	0,10	36°
[5-7]	5	0,25	90°
[7-9]	11	0,55	198°
[9-10]	2	0,10	36°
$\Sigma=20$ alumnos		$\Sigma=1$	$\Sigma=360^\circ$



Nótese que, si la tabla está bien confeccionada, obviamente todos los α_i sumarán 360° . Además, se suele indicar el % que corresponde a cada sector.

Por último, conviene indicar que, en el caso de variables cualitativas, existen otros tipos alternativos de representaciones gráficas (si bien, las dos primeras obedecen más a fines de tipo publicitario que a consideraciones de tipo matemático...):

- **pictograma**: en lugar de una barra se utiliza una figura alusiva de altura o tamaño proporcional a la frecuencia. P. ej. para indicar la producción de automóviles de distintos países. Tiene el inconveniente de ser poco preciso.
- **cartograma**: es un mapa coloreado en distintos tonos y colores con una leyenda al margen que indica su significado (v.g. la información meteorológica).
- **diagramas de columnas apiladas**: p. ej. la misma columna se divide en porcentaje de hombres y mujeres.
- **pirámide de población**: es un tipo de gráfico muy conocido pues se utiliza mucho en Ciencias Sociales para cuestiones demográficas.

CUADRO-RESUMEN:

variable	cuantitativa:	discreta: diagrama de barras ↔ polígono de frecuencias diagrama de sectores
		continua: histograma ↔ polígono de frecuencias diagrama de sectores
	cualitativa:	diagrama de barras (¡nunca frecuencias acumuladas!) ↔ polígono de frecuencias diagrama de sectores pictogramas, cartogramas, pirámides de población...

Ejercicios final tema: 5 y 6

IV) MEDIDAS de TENDENCIA CENTRAL (media, mediana, moda)

IV.1) Media aritmética

Se define como la **suma de todos los valores x_i dividida por el número de valores, N** . Se designa como $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} \quad (7)$$

Esta es la típica fórmula que se utiliza, por ejemplo, para calcular la nota media de una serie de exámenes. Ahora bien, en general, cada valor x_i se repetirá con una frecuencia f_i . En ese caso, la fórmula sería:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N} \quad (8)$$

Observaciones:

- 1º) En el caso de valores agrupados en intervalos, x_i indica la marca de clase, es decir, el punto intermedio de cada intervalo.
- 2º) Obviamente, no existe la media si los datos son cualitativos. Ni tampoco si los datos están agrupados y alguna clase está abierta (p. ej. si en una encuesta el último grupo fuera "mayores de 60 años")
- 3º) La media es el centro de gravedad de la distribución; es decir, si las barras tuvieran peso representaría el punto donde habría que sostener la base del diagrama para que no se venciera.

Vamos a ver cómo se calcula la media en los ejemplos 2 y 3:

Edad (x_i)	f_i	$f_i x_i$
16	13	208
17	3	51
18	3	54
19	1	19
$\Sigma=20$ alumnos		$\Sigma=332$ años

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N} = \frac{332}{20} = 16,6 \text{ años}$$

Estatura (cm)	x_i	f_i	$f_i x_i$
[155-165)	160	6	960
[165-175)	170	10	1700
[175-185)	180	3	540
[185-195]	190	1	190
$\Sigma=20$ alumnos		$\Sigma=3390$ cm	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N} = \frac{3390}{20} = 169,5 \text{ cm}$$

Obsérvese que es fundamental no olvidarse de indicar las unidades. Las unidades de la media, por ejemplo, son siempre las de la variable x_i .

IV.2) Mediana

Es un **valor de la variable x_i tal que la mitad de los valores de la distribución son menores o iguales que él, y la otra mitad mayores o iguales**⁶. Se representa como **Me**. Para calcularla, cabe distinguir tres posibles situaciones:

- 1º) **Distribuciones con pocos valores**, es decir, series estadísticas: Se ordenan crecientemente dichos valores, y la mediana será el valor central (si el número de datos es par, se toma el promedio de los dos centrales).

⁶ Es decir, la mediana deja por debajo y por encima de ella el mismo nº de valores, esto es, la mitad. De ahí su nombre...

Ejemplo 5: Los sueldos mensuales (en €) de 7 trabajadores de una empresa son los siguientes:

3000 915 650 825 700 775 1580

Si calculamos la media (1206,43 €) observamos que no es muy representativa de los datos de esta distribución, ya que éstos se encuentran muy dispersos. Obtengamos la mediana:

650 700 775 **825** 915 1580 3000

El valor obtenido, 825 €, sí es representativo de la mayoría de los datos.

2º) **Variable discreta** (como en el ejemplo 2): construimos la tabla de frecuencias absolutas acumuladas, F_i , calculamos $N/2$ y buscamos los valores de F_i que verifiquen:

$$F_{i-1} < \frac{N}{2} < F_i \quad (9)$$

La mediana será entonces el valor x_i de la variable correspondiente a F_i , es decir, **el primer valor de la variable cuya F_i excede a $N/2$.**

NOTA: Si coincide $F_{i-1} = \frac{N}{2} < F_i$, se toma $M_e = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ (10)

Ejemplo 2:

Edad (años)	f_i	F_i
16	13	13
17	3	16
18	3	19
19	1	20
$\Sigma=20$		

Me=16 años

3º) **Variable agrupada en intervalos** (como en el ejemplo 3): como en el caso anterior, construimos la tabla de frecuencias absolutas acumuladas, F_i , calculamos $N/2$ y buscamos los valores de F_i que verifiquen:

$$F_{i-1} < \frac{N}{2} < F_i$$

El intervalo mediano –es decir, **en el que está la mediana**– será entonces aquel correspondiente a F_i .

NOTA: Si coincide $F_{i-1} = \frac{N}{2} < F_i$, se toma, como antes, $M_e = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

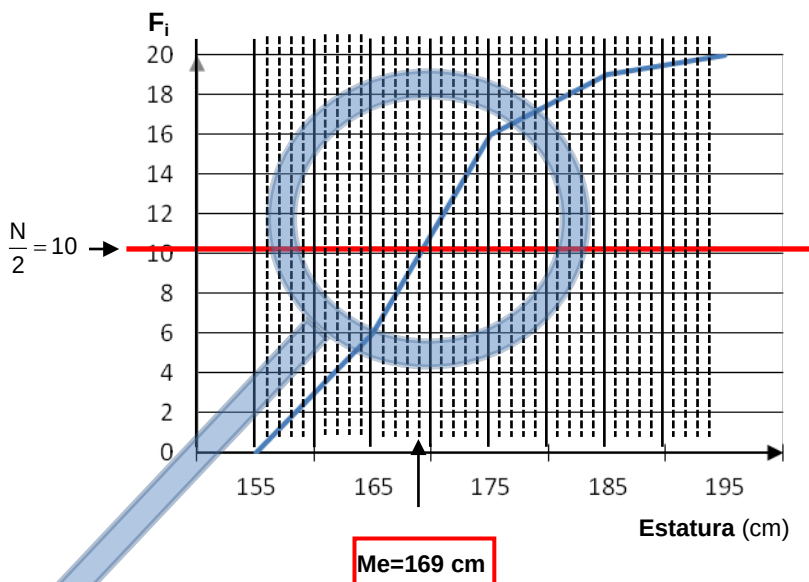
Ejemplo 3:

Estatura (cm)	f_i	F_i
[155-165)	6	6
[165-175)	10	16
[175-185)	3	19
[185-195]	1	20
$\Sigma=20$		

Intervalo mediano

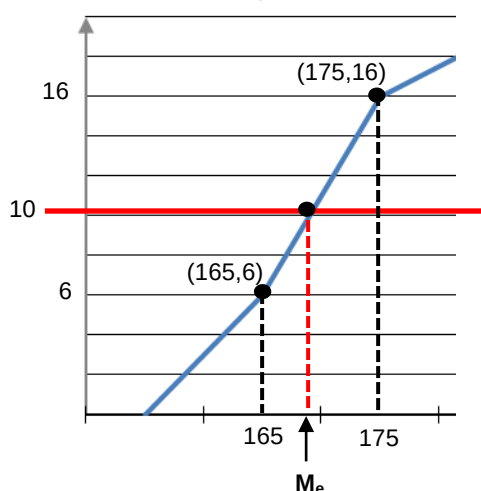
Ahora bien, ¿Cómo saber el valor exacto de la mediana? El método más sencillo es el gráfico, que consiste en dibujar el polígono de frecuencias absolutas acumuladas en papel milimetrado. Para ello, supondremos que la frecuencia se distribuye de manera uniforme a lo largo de cada intervalo (algo lógico), de modo que asignaremos los sucesivos valores de cada frecuencia acumulada **al extremo superior** del intervalo correspondiente (en negrita en la tabla inferior):

Estatura (cm)	extremo sup. x	F_i
	155	0
[155-165)	165	6
[165-175)	175	16
[175-185)	185	19
[185-195]	195	20



Seguidamente, trazamos una línea horizontal a la altura de $N/2=10$, la cual corta al polígono de frecuencias en el punto de abscisa 169 cm, que es precisamente la mediana.

Ello se puede obtener también analíticamente⁷, recordando la interpolación lineal vista en el tema 2:



Obtenemos, en primer lugar, la recta que pasa por los puntos (165,6) y (175,16):

$$\begin{aligned}
 y &= mx + n \\
 (165,6) &\rightarrow 6 = 165m + n \\
 (175,16) &\rightarrow 16 = 175m + n
 \end{aligned}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} -6 = -65m - n \\ 16 = 175m + n \end{array} \right. \quad +$$

$$\begin{aligned}
 10 &= 10m \\
 m &= 1 \Rightarrow n = -159
 \end{aligned}$$

Por tanto, el tramo de polígono de frecuencias correspondiente al intervalo mediano tiene la ecuación $y=x-159$. Finalmente, sustituyendo $y=10$ se obtiene $x=169$ cm.

NOTA: Existe una fórmula general para calcular la mediana en estos casos, cuya obtención, procediendo como acabamos de explicar, se escapa de las pretensiones de este curso:

⁷ Y existe otra tercera forma, aplicando semejanza de triángulos en la figura.

clases	f_i	F_i
		F_{i-1}
$[L_{i-1}-L_i)$	f_i	

Intervalo
mediano

$$c_i = L_i - L_{i-1}$$

$$M_e = L_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot c_i = 165 + \frac{10-6}{10} \cdot 10 = 165 + 4 = 169 \text{ cm} \quad (11)$$

Observaciones:

- 1º) Evidentemente, las unidades de la mediana son las mismas que las de la variable x_i .
- 2º) Curiosamente, la mediana depende del orden de los datos y no de su valor.
- 3º) La mediana se puede calcular, evidentemente, en distribuciones de tipo cuantitativo, pero también en las de tipo cualitativo cuyas modalidades se pueden ordenar.
- 4º) Además de la mediana, existen otros parámetros de posición, como por ejemplo los **cuartiles**⁸, **percentiles**⁹, etc. cuyo cálculo es similar al de la mediana.

IV.3) Moda

«Es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia». Se representa como **Mo**. Representa el valor dominante de la distribución; por ejemplo, en unas elecciones la moda sería el partido más votado.

Ejemplo 2:

Edad (años)	f_i
16	13
17	3
18	3
19	1

M_o

Ejemplo 3:

Estatura (cm)	f_i
[155-165)	6
[165-175)	10
[175-185)	3
[185-195]	1

Intervalo modal

Observaciones:

- 1º) Sus unidades son las mismas que las de x_i .
- 2º) La M_o existe siempre¹⁰, en cualquier tipo de distribuciones (cualitativas o cuantitativas).
- 3º) Vemos que en las que presentan los datos agrupados en intervalos se habla de **intervalo modal** o **clase modal**. Para este caso existe una fórmula –que sobrepasa las pretensiones del presente

⁸ El primer cuartil, Q_1 , deja el 25% de la población por debajo de él; por lo tanto, el Q_2 coincide con la mediana. Y el Q_3 dejará el 75 % de los individuos por debajo de su valor.

⁹ El percentil p_k es el que deja al k% de los individuos por debajo de él. Por ejemplo, $Q_1=p_{25}$, $M_e=p_{50}$, $Q_3=p_{75}$.

¹⁰ Salvo el inusual caso en el que todas las f_i sean iguales...

curso–, del estilo de la vista para la mediana, para hallar en qué punto concreto del intervalo modal se halla la moda.

- 4º) En una distribución sólo hay una media y una mediana, pero **puede haber más de una moda**. Y no tiene por qué situarse en la zona central.

Ejercicios final tema: 7 a 10

V) MEDIDAS de DISPERSIÓN (recorrido, varianza, desviación típica)

Tienen por objeto dar una idea de la mayor o menor concentración de los valores de una distribución alrededor de los valores centrales.

V.1) Recorrido

«Es la diferencia entre el mayor y el menor valor de una distribución».

Ejemplo 6: Las notas de los exámenes de Matemáticas de dos alumnos a lo largo del curso son:

Carlos:	5	7	7	7	9
Ana:	2	6	8	10	9

Puede comprobarse que ambos tienen la misma media, 7. Pero Ana tiene sus notas mucho más dispersas que Carlos:

Recorrido notas Carlos=9-5=4

Recorrido notas Ana=10-2=8

V.2) Varianza y desviación típica

Antes de definir la varianza, conviene considerar en una serie de datos su **desviación respecto a la media**, que sería la diferencia entre cada dato y la media, en valor absoluto (para que siempre sea >0):

$$d_i = |x_i - \bar{x}| \quad (12)$$

La **varianza**, V , se define como «la **media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media**»:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} \quad (13)$$

Observaciones:

- 1º) No es necesario el valor absoluto en las desviaciones $x_i - \bar{x}$, puesto que éstas están al cuadrado (es decir, son siempre positivas).
- 2º) Puede comprobarse¹¹ que la fórmula (13) es equivalente a la siguiente:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \quad (14)$$

y esta es precisamente, por su comodidad, la más utilizada en la práctica.

¹¹ Mediante demostración –no es muy complicada– o, más recomendable, comprobando con ejemplos concretos que ambas fórmulas conducen al mismo resultado.

3º) Las unidades de la varianza son al cuadrado, p.ej. cm^2 , años^2 , €^2 , etc.

4º) La varianza siempre es positiva.

Como la varianza, por estar expresada en unidades cuadradas, no se puede comparar con la media, se utiliza la **desviación típica**, s , que se define como la **raíz cuadrada de la varianza**:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2} \quad (15)$$

Observaciones:

1º) La s tiene las mismas unidades que la variable x_i .

2º) La varianza y la desviación típica no tienen sentido en distribuciones en las que no se puede calcular la media aritmética.

3º) Es bastante habitual nombrar la varianza como s^2 .

4º) La s nos dice cómo de alejados de la media, es decir, cómo de dispersos se encuentran los datos.¹² cuanto más agrupados estén los datos en torno a la media, menor será s . De hecho, **para poder comparar varias distribuciones y ver cuál está más dispersa respecto a la media** se utiliza el llamado **coeficiente de variación** o dispersión:

$$\text{C.V.} = \frac{s}{\bar{x}} \quad (16)$$

que habitualmente se expresa en %.

Ejemplo 6: Las notas de los exámenes de Matemáticas de dos alumnos a lo largo del curso son:

Carlos: 5 7 7 7 9

Ana: 2 6 8 10 9

Antes vimos que ambos tienen la misma media, $\bar{x} = 7$. En un caso tan sencillo como este, es decir, en una simple serie estadística, la fórmula de la varianza se simplifica:

$$V_{\text{Carlos}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{5^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 9^2}{5} - 7^2 = \frac{25 + 49 + 49 + 49 + 81}{5} - 49 = \frac{253}{5} - 49 = 50,6 - 49 = 1,6$$

$$\Rightarrow s_{\text{Carlos}} = \sqrt{1,6} \approx 1,26$$

$$V_{\text{Ana}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{2^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 9^2}{5} - 7^2 = \frac{4 + 36 + 64 + 100 + 81}{5} - 49 = \frac{285}{5} - 49 = 57 - 49 = 8$$

$$\Rightarrow s_{\text{Ana}} = \sqrt{8} \approx 2,83$$

Vemos que $s_{\text{Carlos}} < s_{\text{Ana}}$, lo cual confirma lo que ya sabíamos...

¹² En el próximo curso, cuando se vea la *Distribución normal*, se explicará gráficamente el significado de s en relación con $\bar{x}$.

Ejemplo 2:

Edad (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
16	13	208	3328
17	3	51	867
18	3	54	972
19	1	19	361
	$\Sigma=20$ alumnos	$\Sigma=332$ años	$\Sigma=5528$ años ²

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N} = \frac{332}{20} = 16,6 \text{ años}$$

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{5528}{20} - 16,6^2 = 276,4 - 275,56 = 0,84 \text{ años}^2$$

$$s = \sqrt{0,84} \cong 0,92 \text{ años}$$

Ejemplo 3:

Estatura (cm)	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
[155-165)	160	6	960	153 600
[165-175)	170	10	1700	289 000
[175-185)	180	3	540	97 200
[185-195]	190	1	190	36 100
		$\Sigma=20$ alumnos	$\Sigma=3390$ cm	$\Sigma=575 900$ cm ²

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N} = \frac{3390}{20} = 169,5 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{575 900}{20} - 169,5^2 = 28795 - 28730,25 = 64,75 \text{ cm}^2$$

$$s = \sqrt{64,75} \cong 8,05 \text{ cm}$$

V.3) Obtención de los parámetros estadísticos con la calculadora



Vamos a explicarlo para una Casio fx-82 MS, uno de los modelos más extendidos entre los estudiantes¹³. Para cualquier otro modelo se suele proceder de forma bastante análoga. Utilizaremos los datos del **ejemplo 3**:

1º) Ponemos la calculadora en modo SD (estadístico): **MODE** 2

2º) Borramos, por precaución, los datos previos de la memoria:

SHIFT CLR 1 **=**

3º) Introducimos los datos:

160 **▢** 6 DT 170 **▢** 10 DT 180 **▢** 3 DT 190 **▢** 1 DT
 ↑ ↑
 x_i f_i

NOTA: Podemos utilizar **▲** y **▼** para ver los datos ya introducidos. Incluso podemos modificar alguno y luego pulsar **=**, o borrar pulsando **SHIFT** CL

4º) **SHIFT** **S-SUM** 1 $\rightarrow \Sigma x_i^2 = 575 900$

SHIFT **S-VAR** 1 $\rightarrow \bar{x} = 169,5$

SHIFT **S-SUM** 2 $\rightarrow \Sigma f_i x_i = 3 390$

SHIFT **S-VAR** 2 $\rightarrow s = 8,0467385$

SHIFT **S-SUM** 3 $\rightarrow N = 20$

¹³ Puede descargarse el manual en https://www.dropbox.com/s/nr5qlmhcupv7t8s/manual_casio_fx_82_ms.pdf

Ejercicios final tema: 11 y ss.

Reseña histórica:

El término *Estadística* proviene del alemán *Statistik*, introducido por el economista alemán Gottfried **Achenwall** (1719-1772) en 1749, para referirse al análisis de datos del estado. En efecto, en su origen la estadística fue utilizada por los estados para recoger gran número de datos sobre la población, alimentos, bienes económicos, etc. De hecho, esto ya fue llevado a cabo en cierta medida en las antiguas civilizaciones, que ya elaboraban censos poblacionales: Egipto, China, Roma, etc.

Pero hasta el siglo XIX el término estadística no adquiere el significado de recolectar y clasificar datos. Este concepto fue introducido por el militar británico Sir John **Sinclair** (1754-1835). Desde entonces la Estadística ha ido de la mano de la teoría de probabilidades, sobre todo con la contribución de los británicos Francis **Galton** (1822-1911) y Karl **Pearson** (1857-1936), fundadores de la moderna Estadística Matemática.

16 EJERCICIOS de ESTADÍSTICA UNIDIMENSIONAL

Conceptos. Definiciones:

1. De los siguientes caracteres de una población, indicar **razonadamente** los que son cualitativos y los que son cuantitativos (discretos o continuos):

a) Sexo	d) Número de hermanos	g) Estatura
b) Nacionalidad	e) Color del pelo	h) Número de calzado
c) Edad	f) Nota de Matemáticas	

2. De las siguientes variables cuantitativas, indicar **razonadamente** las que son discretas y las que son continuas:

a) Número de vecinos de un edificio	c) Nota de Matemáticas en un examen	e) Contenido en cm^3 de una lata de conservas
b) Número de horas que un determinado individuo ve la televisión	d) Nota de Matemáticas en el boletín de notas	

■ Pasos a seguir a la hora de abordar un ejercicio de Estadística:

- 1º) ¿Cuál es la variable, x_i ?
- 2º) ¿Qué tipo de variable es: cuantitativa (discreta o continua) o cualitativa?
- 3º) Agrupar los datos en función del tipo de variable y empezar a construir la tabla estadística, adjuntando, de momento, dos columnas: x_i y f_i .
- 4º) En función de lo que nos piden ($\bar{x}$, s , histograma, etc.) añadir las columnas necesarias: F_i , H_i , $\sum f_i x_i$, $\sum f_i x_i^2$, etc.

Frecuencias y tablas:

3. El número de hermanos de 40 alumnos es:

3	4	2	3	4	3	4	4	4	2
3	4	4	3	4	1	2	3	5	4
2	2	2	5	3	4	4	6	2	6
4	3	2	1	2	3	2	4	3	1

- a) ¿De qué tipo de variable se trata? Construir una tabla estadística en la que figuren todas las frecuencias.
 - b) ¿Cuántos alumnos tienen 5 o más hermanos? ¿Cuántos 3 o menos?
4. Se aplica un test de inteligencia para averiguar el cociente intelectual de 40 alumnos de 1º de Bachillerato, obteniéndose los siguientes resultados:

106	136	81	110	95	92	99	106	81	95
110	103	88	81	81	99	110	114	128	103
103	74	95	136	95	88	106	121	106	114
117	92	85	125	95	110	132	95	103	81

- Razonar qué tipo de variable es. Construir una tabla estadística en la que figuren todas las frecuencias.
- ¿Cuántos alumnos tienen un CI por debajo de 100?
- Si se consideran superdotados a los que tienen $CI > 130$, ¿hay alguno en clase?
- ¿Qué porcentaje de alumnos tiene de CI 110 o más?

Representaciones gráficas:

- Construir el diagrama de barras y polígono de frecuencias absolutas, y el diagrama de sectores, de la distribución del ejercicio 3.
- Construir el histograma y polígono de frecuencias relativas, y el diagrama de sectores, de la distribución del ejercicio 4.

Parámetros de centralización:

- En la figura adjunta aparecen los resultados de la última jornada de la Liga de fútbol 2013-2014. Se pide:
 - Formar con los goles/partido una tabla estadística apropiada para responder a los apartados siguientes.
 - Dibujar el diagrama de barras, polígono y diagrama de sectores, todos ellos de frecuencias absolutas
 - Calcular la media de goles/partido, moda y mediana.
Sol : $\bar{x} = 2,4$ goles / partido)
- El número de horas de sol registradas en un determinado mes en 50 estaciones meteorológicas es:

83	82	78	72	107	107	93	72	85
98	<u>71</u>	76	75	83	72	126	102	76
112	99	155	118	150	129	119	148	181
151	167	156	180	173	149	80	131	121
110	200	162	214	176	186	187	186	141
212	186	199	198	<u>219</u>				

Málaga		1 - 0		Levante
Real Madrid		3 - 1		Espanyol
Barcelona		1 - 1		Atlético
Valencia		2 - 1		Celta
R. Sociedad		1 - 2		Villarreal
Almería		0 - 0		Athletic
Osasuna		2 - 1		Betis
Rayo		1 - 2		Getafe
Valladolid		0 - 1		Granada
Sevilla		3 - 1		Elche

- Razonar de qué clase de variable se trata. Confeccionar una tabla estadística de cara a los siguientes apartados.
 - Dibujar el histograma de frecuencias relativas y el polígono de frecuencias absolutas acumuladas
 - Calcular la media de horas de sol, la moda y la mediana. *Sol : $\bar{x} = 134$ h / mes)*
- En la tabla figuran los datos de las pulsaciones de un equipo de atletismo después de una carrera:

Pulsaciones	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94	95-99
Nº de atletas	3	3	7	10	12	8

- ¿Qué tipo de variable es? Construir una tabla apropiada para lo que se pide a continuación.
- Hallar la media. *(Sol: $\cong 88,2$ pulsaciones)*

- c) Hallar la mediana ¿Qué significa el valor obtenido? (Sol: $\cong 89,25$ pulsaciones)
- d) Hallar la moda.
- e) Construir el histograma y el polígono de frecuencias absolutas.

10. A un conjunto de cinco notas cuya media es 7,31 se le añaden las calificaciones siguientes: 4,47 y 9, 15
¿Cuál es la nueva media?

Parámetros de dispersión:

11. Los datos que siguen corresponden a las medidas del tórax, en cm, de cien hombres adultos. Construir la tabla estadística necesaria para responder a las siguientes cuestiones:

Medida del tórax (cm)	Nº de hombres
[80,85)	4
[85,90)	10
[90,95)	24
[95,100)	32
[100,105)	22
[105,110]	8

- a) Hallar la media. Sol: $\bar{x} = 96,6$ cm)
- b) Calcular la mediana. ¿Qué significado tiene el valor obtenido?
- c) Hallar la moda.
- d) Obtener la desviación típica. Sol: $\bar{s} \cong 6,14$ cm)
- e) Dibujar el histograma y el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

12. En un centro militar se ha tomado una muestra de 16 jóvenes, obteniéndose las siguientes estaturas (en cm):

160 172,4 168 167 175 179 180 198
164 166 174 177 182,5 185 191 173,5

- a) Construir una tabla estadística apropiada.
- b) Obtener el histograma y el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.
- c) Calcular la media, moda, mediana y desviación típica. (Sol: $\bar{x} \cong 176,25$ cm; $M_e = 175$ cm; $s \cong 9,9$ cm)

13. Se han medido los pesos y las alturas de 6 personas, obteniéndose los datos siguientes:

Peso (kg)	65	60	65	63	68	68
Altura (cm)	170	150	168	170	175	180

- a) ¿Qué medidas están más dispersas, los pesos o las alturas? Utilizar el coeficiente de variación.
(Sol: Las alturas, puesto que $CV_a = 6\% > CV_p = 4\%$)
- b) Comprobar lo anterior gráficamente.

14. La tabla siguiente nos da las puntuaciones obtenidas por un grupo de 20 alumnos en un test:

Puntuaciones	0-20	20-40	40-50	50-60	60-80	80-100
Nº alumnos	3	6	5	3	-	3

Al mismo grupo de alumnos se le hace otra prueba y las puntuaciones obtenidas son:

10 11 20 5 10 8 11 12 5 9
14 11 3 9 11 12 11 8 9 11

- a) ¿Qué datos se hallan más dispersos? Utilizar el coeficiente de variación.
(Sol: Las puntuaciones, ya que $CV_1 \cong 54,7\% > CV_2 \cong 34,6\%$)

b) Comprobar lo anterior gráficamente.

15. Las calificaciones de los 25 alumnos de 1º de Bach. A son:

6	6	7	6	7	5	5	6	7	5	4	5	4
9	3	3	5	5	5	9	5	4	5	4	8	

mientras que las de los 20 alumnos de 2º Bach. B son:

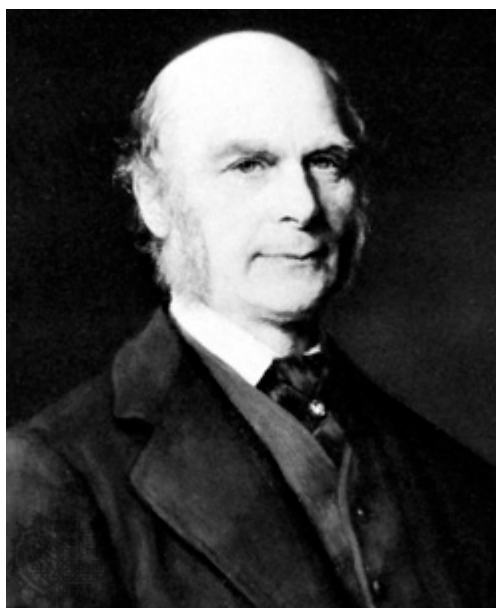
6	6	7	3	10	3	5	5	2	5	4	3	9
4	9	5	6	6	6	7						

Calcular en qué grupo las notas están más dispersas. (Sol: En el B, puesto que $CV_a \cong 28,6\% < CV_p \cong 38,9\%$)

16. Hallar la media, moda, mediana y desviación típica del ejercicio 4.

(Sol: $\bar{x} = 3$ hermanos; $s \cong 1,22$ hermanos)

ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL



*Sir Francis Galton (1822-1911), matemático inglés que acuñó el término *regresión*.*

MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato CCNN



**Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas**

I) INTRODUCCIÓN. DEFINICIONES

		PJ	G	E	P	Pt
1	Atlético	38	28	6	4	90
2	Barcelona	38	27	6	5	87
3	Real Madrid	38	27	6	5	87
4	Athletic	38	20	10	8	70
5	Sevilla	38	18	9	11	63
6	Villarreal	38	17	8	13	59
7	R. Sociedad	38	16	11	11	59
8	Valencia	38	13	10	15	49
9	Celta	38	14	7	17	49
10	Levante	38	12	12	14	48
11	Málaga	38	12	9	17	45
12	Rayo	38	13	4	21	43
13	Getafe	38	11	9	18	42
14	Español	38	11	9	18	42
15	Granada	38	12	5	21	41
16	Elche	38	9	13	16	40
17	Almería	38	11	7	20	40
18	Osasuna	38	10	9	19	39
19	Valladolid	38	7	15	16	36
20	Betis	38	6	7	25	25

Ejemplo 1: De la clasificación final de la Liga 2013-2014 consideramos las columnas de partidos ganados (G) y perdidos (P):

G	28	27	27	20	18	17	16	13	14	12	12	13	11	11	12	9	11	10	7	6
P	4	5	5	8	11	13	11	15	17	14	17	21	18	18	21	16	20	19	16	25

Se trata de una tabla de **distribución bidimensional**, pues contempla dos variables, G y P, para cada equipo.

Ahora bien, podemos agrupar cada variable en una **tabla de doble entrada**, p. ej. en intervalos de amplitud 5:

		Perdidos				
		[0-5)	[5-10)	[10-15)	[15-20)	[20-25]
Ganados	[5-10)				Elche Valladolid 2	Betis 1
	[10-15)			Levante 1	Valencia Getafe Celta Málaga Español Osasuna 6	Rayo Almería 3 Granada
	[15-20)			Sevilla Real Soc. 3 Villarreal		
	[20-25)		Athletic 1			
	[25-30]	Atlético 1	Barcelona R. Madrid 2			

Por ejemplo, hay **2** equipos –Barcelona y R. Madrid– entre [25–30) ganados y [5–10) perdidos, hay **1** equipo –el Levante– entre [10–15) ganados y [10–15) perdidos, etc. Cada uno de estos valores, 1, 2..., se llama frecuencia absoluta bidimensional:

«**Frecuencia absoluta bidimensional** f_{ij} es el número de veces que aparece cada par (x_i, y_j) de las variables».

Lógicamente, «la suma de las frecuencias absolutas bidimensionales es igual al número total de elementos, N», en este ejemplo, 20:

$$\sum f_{ij} = N \quad (1)$$

«**Distribución bidimensional** es aquella en la que, para cada elemento, se consideran los valores correspondientes a dos características distintas» (partidos ganados y perdidos en este caso). Una tabla de doble entrada como la anterior, que contiene las frecuencias correspondientes a las dos variables

consideradas, se denomina **tabla de contingencia**. Se aplican tanto a variables cuantitativas (ejemplo anterior) como cualitativas.

Dividiendo cada frecuencia absoluta bidimensional por el número total de elementos, N , se obtienen las **frecuencias relativas bidimensionales**, h_{ij} :

		Perdidos				
		[0-5)	[5-10)	[10-15)	[15-20)	[20-25]
Ganados	[5-10)				0,1	0,05
	[10-15)			0,05	0,3	0,15
	[15-20)			0,15		
	[20-25)		0,05			
	[25-30]	0,05	0,1			

Se trata de las frecuencias en tanto por uno. Multiplicándolas por 100 las tendremos en %. Por ejemplo, el valor 0,3 significa que el 30% de los equipos (es decir, 6 en total) han ganado entre [10-15) partidos y perdido entre [15-20).

NOTA: Las **tablas de doble entrada** se utilizan cuando el número de datos, N , es grande, en cuyo caso se agrupan en intervalos. Cuando el número de observaciones es muy pequeño, se considera una **tabla simple** de dos filas como la del principio del tema. Esto último será lo habitual.

Ejercicio 1: Clasificar los datos del ejemplo anterior en intervalos de amplitud 10. Obtener las frecuencias absolutas y relativas bidimensionales.

II) FRECUENCIAS y GRÁFICOS

Frecuencias marginales

Si en la tabla de doble entrada **sumamos las frecuencias por filas y por columnas** obtenemos una nueva fila y una nueva columna que representan las **frecuencias absolutas marginales**, f_i y f_j :

		Perdidos					
		[0-5)	[5-10)	[10-15)	[15-20)	[20-25]	
Ganados	[5-10)				2	1	3
	[10-15)			1	6	3	10
	[15-20)			3			3
	[20-25)		1				1
	[25-30]	1	2				3
		1	3	4	8	4	$\Sigma=20$

Vemos que, lógicamente, la suma de ambas frecuencias absolutas marginales coincide con la suma de las frecuencias bidimensionales:

$$\sum f_i = \sum f_j = \sum f_{ij} = N \quad (2)$$

Estas frecuencias marginales tienen en cuenta una sola variable, por lo que se puede construir con ellas sendas distribuciones unidimensionales y obtener parámetros representativos (De hecho, en el apartado IV veremos que es necesario calcular alguno de ellos), como hacíamos en el tema anterior:

Partidos ganados	f_i
[5,10)	3
[10-15)	10
[15-20)	3
[20-25)	1
[25-30]	3
$\Sigma=20$	

$$\bar{x}_G = 15,25 \text{ partidos}$$

$$s_G \cong 6,22 \text{ partidos}$$

Partidos perdidos	f_j
[0-5)	1
[5-10)	3
[10-15)	4
[15-20)	8
[20-25]	4
$\Sigma=20$	

$$\bar{x}_P = 15,25 \text{ partidos}$$

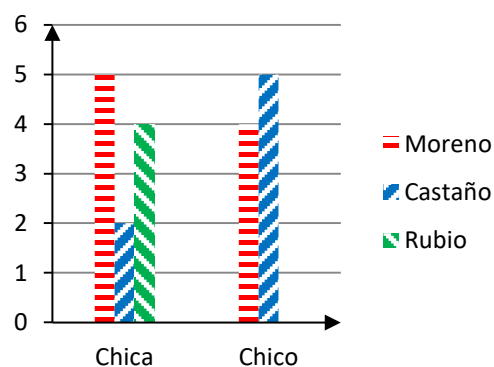
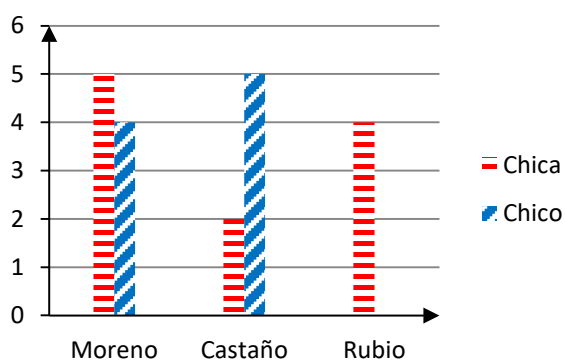
$$s_P \cong 5,58 \text{ partidos}$$

Ahora bien, en la práctica veremos que esto se hace en una sola tabla, de doble entrada. Es decir, no es necesario separar en dos tablas. Además, recordemos del tema anterior que la media y desviación típica sólo se pueden obtener¹ en el caso de variable cuantitativa. En el caso de variable cualitativa sólo podemos obtener porcentajes. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2: Los 20 alumnos de 1º de Bachillerato A se clasifican por sexo y color de pelo de acuerdo con los datos de la siguiente tabla de doble entrada, en la que también hemos reflejado los porcentajes:

		Pelo			f_i	%
		Moreno	Castaño	Rubio		
Sexo	Chica	5	2	4	11	55
	Chico	4	5		9	45
	f_j	9	7	4	$\Sigma=20$	
	%	45	35	20		$\Sigma=100$

Se pueden construir diagramas de barras de frecuencias absolutas bidimensionales agrupadas por una u otra variable:



¹ En el caso de distribuciones bidimensionales no se puede calcular la mediana, y la moda no tiene sentido.

«Las frecuencias absolutas marginales divididas por el total de observaciones, N , nos dan las frecuencias relativas marginales, h_i y h_j »:

		Pelo			h_i
		Moreno	Castaño	Rubio	
Sexo	Chica	0,25	0,1	0,2	0,55
	Chico	0,2	0,25		0,45
	h_j	0,45	0,35	0,2	$\Sigma=1$

Vemos que, por ejemplo, el 20% de la clase son chicos morenos.

Frecuencias condicionadas

Supongamos que nos planteamos preguntas de este estilo: ¿Qué % de alumnos de pelo moreno son chicas? ¿Qué % de chicas tienen el pelo moreno?, etc.

En primer lugar, si para cada color de pelo (TOTALES) calculamos las frecuencias relativas, se obtienen las **frecuencias relativas condicionadas** al color del pelo:

	Moreno	Castaño	Rubio	
Chica	5/9=0,56	2/7=0,29	4/4=1	TOTALES
Chico	4/9=0,44	5/7=0,71		
$\Sigma=1$	$\Sigma=1$	$\Sigma=1$	$\Sigma=1$	

Por ejemplo, del total de alumnos castaños, el 29% son chicas y el 71% chicos.

Pero también podemos hallar, para cada sexo, las frecuencias relativas, obteniéndose así las frecuencias relativas condicionadas al sexo:

	Moreno	Castaño	Rubio	
Chica	5/11=0,46	2/11=0,18	4/11=0,36	$\Sigma=1$
Chico	4/9=0,44	5/9=0,56		$\Sigma=1$

Del total de chicos, el 44% son morenos y el 56% castaños.
No hay rubios

«Las **frecuencias relativas condicionadas** nos permiten conocer el % de los valores de una variable condicionada a cada valor de la otra variable».

Observación: Las frecuencias condicionadas son siempre relativas.

Ejercicio 2: Responder a las dos preguntas del comienzo de este epígrafe, y a otras que formule el profesor.

RESUMEN: Hemos visto 5 tipos de frecuencias:

Frec. absoluta bidimensional: f_{ij} $\longrightarrow$ Frec. relativa bidimensional: $h_{ij} = \frac{f_{ij}}{N}$

Frecs. absolutas marginales: f_i y f_j $\longrightarrow$ Frecs. relativas marginales: $h_i = \frac{f_i}{N}$ y $h_j = \frac{f_j}{N}$

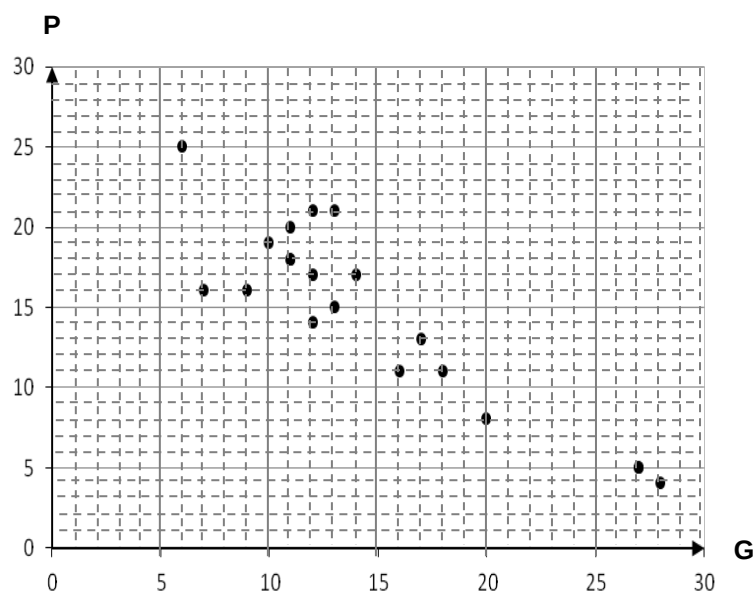
Frecs. relativas condicionadas: Son relativas al total de cada variable.

Ejercicios final tema: 1 y 2

III) NUBE de PUNTOS

Sobre unos ejes cartesianos vamos a representar los puntos (G,P) del ejemplo 1:

G	28	27	27	20	18	17	16	13	14	12	12	13	11	11	12	9	11	10	7	6
P	4	5	5	8	11	13	11	15	17	14	17	21	18	18	21	16	20	19	16	25



Esta representación gráfica del conjunto de pares de valores $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ recibe el nombre de **nube de puntos** o diagrama de dispersión. **La nube de puntos es la representación gráfica de las distribuciones bidimensionales** cuando el número de datos es pequeño y, por lo tanto, no están agrupados en intervalos. Lógicamente, siempre va a ser posible en el caso de variables cuantitativas (si al menos una de las dos variables es cualitativa, no será posible). Pero si se trata de una distribución cuyos datos estén agrupados en intervalos la opción² es asignar a cada dato un punto de tamaño proporcional a su frecuencia. o bien poner agrupados tantos puntos como indique la frecuencia.

La relación que existe entre las variables partidos ganados, G, y perdidos, P, no es de tipo funcional³ – es decir, no sigue ninguna ley o fórmula– sino estadística.

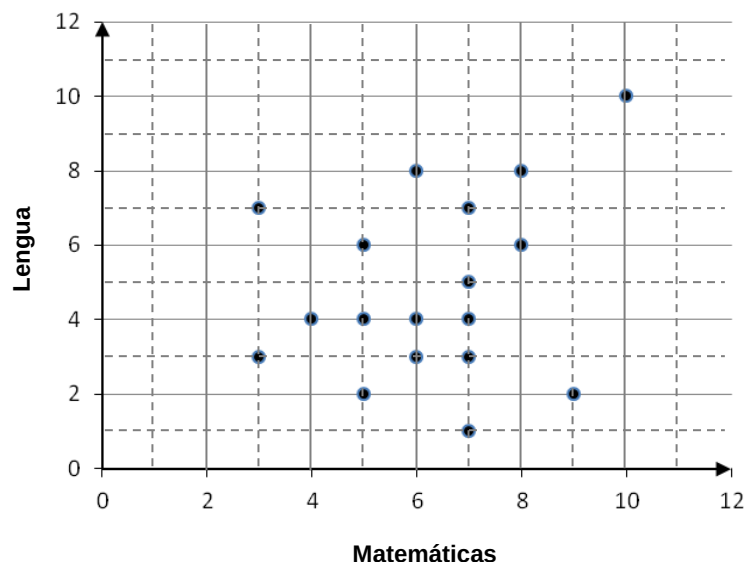
² Otra opción –complicada– es hacer un estereograma, levantando barras de alturas proporcionales a cada frecuencia.

³ Una relación funcional sería, por ejemplo, el espacio s recorrido por un automóvil que viaja a 90 km/h y el tiempo t empleado: $s=90t$.

La nube de puntos nos permite apreciar si hay una mayor o menor relación o dependencia entre las variables. En el ejemplo anterior se observa algo lógico: cuantos más partidos gana un equipo, menos pierde.

El proceso inverso también es posible, es decir, a partir de una nube de puntos podemos obtener la distribución:

Ejemplo 3: Las calificaciones en Matemáticas y Lengua de los 18 alumnos de 1º de Bachillerato A son las representadas por la siguiente nube de puntos:



A partir de esta nube es inmediato deducir la distribución:

Matemáticas	3	3	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	9	10
Lengua	3	7	4	2	4	6	3	4	8	1	3	4	5	7	6	8	2	10

Observaciones:

- 1º) Hay nubes de puntos en las que los puntos están muy dispersos entre sí, como en el ejemplo 3: los alumnos buenos en Lengua no tienen por qué ser siempre buenos –o malos– en Matemáticas. Por el contrario, en otros casos los puntos se concentran aproximadamente en torno a una línea aproximada, como ocurre en el ejemplo 2: cuantos más partidos ha ganado un equipo normalmente ha perdido menos partidos. Esto lo estudiaremos en el próximo apartado.
- 2º) En resumen, **tenemos dos formas de representar una distribución bidimensional: mediante tabla o mediante nube de puntos.**

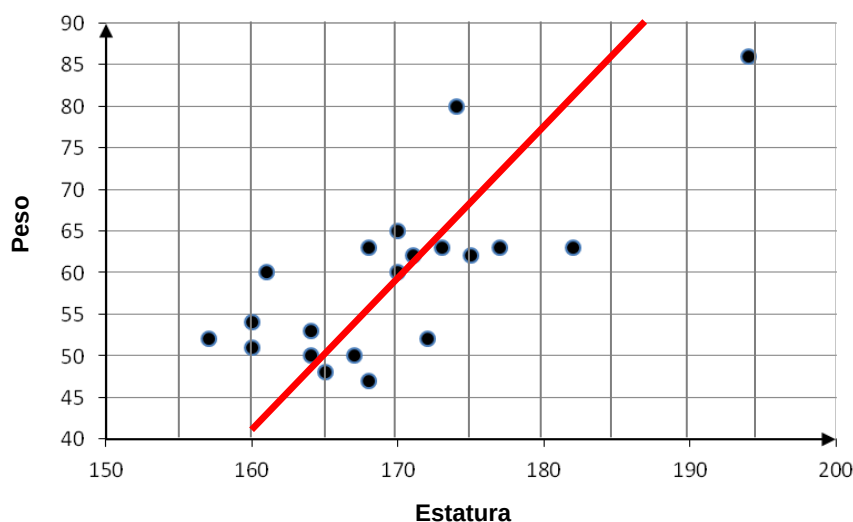
Ejercicios final tema: 3, 4 y 5

IV) AJUSTE de una NUBE de PUNTOS: RECTA de REGRESIÓN

Ejemplo 4: La estatura y el peso de 20 alumnos de 1º de Bachillerato son:

(164,53)	(175,62)	(165,48)	(170,60)	(168,47)	(157,52)	(167,50)
(172,52)	(177,63)	(160,54)	(168,63)	(160,51)	(164,50)	(174,80)
(170,65)	(182,63)	(161,60)	(171,62)	(173,63)	(194,86)	

Dibujamos la nube de puntos:



Nuestro objetivo es obtener la recta de la figura, es decir, la que mejor se ajusta⁴ a la nube de puntos.

Aplicando un procedimiento denominado de mínimos cuadrados –cuyo nivel se escapa a las pretensiones de este curso⁵– se obtiene que la ecuación de la recta de ajuste es:

$$y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} (x - \bar{x}) \quad (3)$$

donde $s_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{N} - \bar{x} \bar{y}$ se llama covarianza. Puede ser negativa. (4)

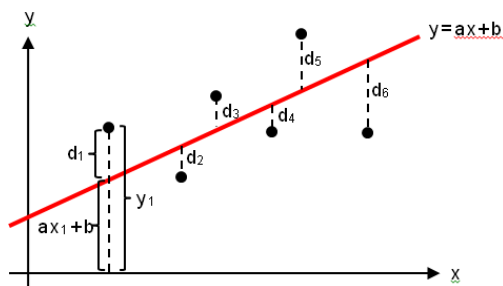
⁴ Supongamos que los puntos fueran localidades. Entonces la recta buscada representaría el trazado de una carretera que diera servicio equitativamente a todas ellas.

⁵ La ecuación de la recta de ajuste, $y = ax + b$, va a ser aquella tal que **a** y **b** cumpla las dos siguientes condiciones:

1º) Que la recta pase por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ ← centro de gravedad de la nube

2º) Que la suma $\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$ sea mínima.

Esta 2ª condición, gráficamente, significa que la suma de los cuadrados de las distancias $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots$, es decir, $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + \dots$ ha de ser mínima:



Aplicando el mencionado procedimiento de mínimos cuadrados se llega a obtener $a = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{N} - \bar{x} \bar{y}}{\sigma_x^2} \equiv \frac{s_{xy}}{s_x^2}$. Por otra parte, la 1ª condición significa que $\bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x}$. Sustituyendo **a** y **b** en $y = ax + b$ se obtiene (3).

La recta de ajuste dada por (3) y (4) se llama ⁶ **recta de regresión de y sobre x**.

NOTA: También está la recta de regresión **de x sobre y**, que sería ⁷ $x - \bar{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2} (y - \bar{y})$

Vamos a obtener la recta de regresión del ejemplo 4:

Estatura (cm) x_i	Peso (kg) y_i	$x_i y_i$	x_i^2
164	53	8692	26896
175	62	10850	30625
165	48	7920	27225
170	60	10200	28900
168	47	7896	28224
157	52	8164	24649
167	50	8350	27889
172	52	8944	29584
177	63	11151	31329
160	54	8640	25600
168	63	10584	28224
160	51	8160	25600
164	50	8200	26896
174	80	13920	30276
170	65	11050	28900
182	63	11466	33124
161	60	9660	25921
171	62	10602	29241
173	63	10899	29929
194	86	16684	37636
$\Sigma x_i = 339$ 2 cm	$\Sigma y_i = 118$ 4 kg	$\Sigma x_i y_i = 202032$ cm·kg	$\Sigma x_i^2 = 57668$ 8 cm ²

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} = \frac{3392}{20} = 169,6 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{N} = \frac{1184}{20} = 59,2 \text{ kg}$$

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{N} - \bar{x} \bar{y} = \frac{202032}{20} - 169,6 \cdot 59,2 = 61,28 \text{ cm} \cdot \text{kg}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{57668}{20} - 169,6^2 = 69,24 \text{ cm}^2$$

Con estos parámetros, la recta de regresión (de y sobre x) será:

$$y - 59,2 = \frac{61,28}{69,24} (x - 169,6) \Rightarrow \boxed{y = 0,89x - 91,74}$$

que es la recta del gráfico de la página anterior.

Utilidad de la recta de regresión: Con ella podemos hacer estimaciones. Por ejemplo, un alumno que mida 180 cm pesará:

$$y = 0,89 \cdot 180 - 91,74 = 68,5 \text{ kg}$$

La validez de la estimación estará en función del grado de correlación de ambas variables, como veremos en el apartado siguiente. Además, lógicamente hay que hacerlas en el intervalo de las variables o muy cerca de ellas.

Obtención de los parámetros de regresión con la calculadora

Vamos a explicarlo, como hicimos en el tema anterior, para una Casio fx-82 MS, uno de los modelos más extendidos entre los estudiantes⁸. Para cualquier otro modelo se suele proceder de forma bastante análoga. Utilizaremos los datos del ejemplo anterior:

1º) Ponemos la calculadora en modo REG (regresión): **MODE** 3

⁶ Como curiosidad, se llama *de regresión* porque el inglés Francis Galton (1822-1911), al estudiar la estatura de los padres en relación con la de los hijos, encontró que a padres altos corresponden hijos altos, pero no tanto; y a padres muy bajos corresponden hijos no tan bajos. Es decir, parece que la estatura de los hijos *regresa* hacia la media de la población...

⁷ Se obtendría de forma análoga a la anterior, pero considerando mínima la suma de los cuadrados de las distancias de cada punto a la recta en horizontal, no en vertical.

⁸ Puede descargarse el manual en https://www.dropbox.com/s/nr5qlmhcupv7t8s/manual_casio_fx_82_ms.pdf



2º) Elegimos, en el menú que aparece, 1: lin (regresión lineal)

3º) Borramos, por precaución, los datos previos de la memoria:

SHIFT CLR 1 **=**

4º) Introducimos los datos:

164 **'** 53 DT 175 **'** 62 DT 165 **'** 48 DT 170 **'** 60 DT etc.
 $\uparrow$ $\uparrow$
 x_i y_i

NOTA: Podemos utilizar $\blacktriangle$ y $\blacktriangledown$ para ver los datos ya introducidos. Incluso podemos modificar alguno y luego pulsar **=**, o borrar pulsando **SHIFT** CL

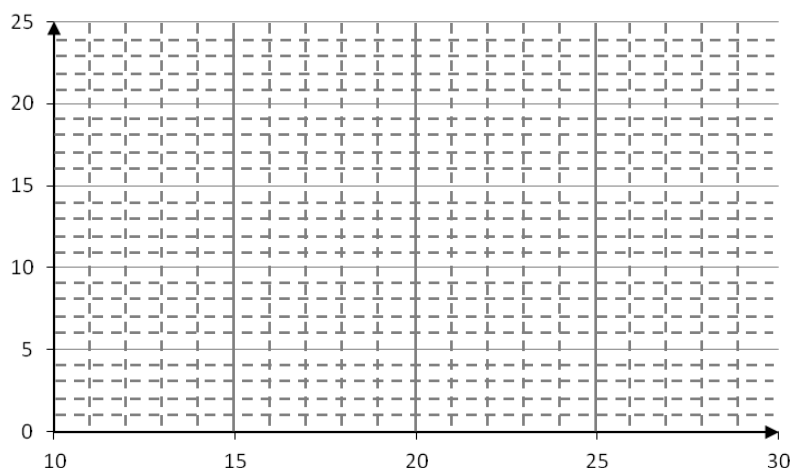
5º) **SHIFT** **S-SUM** 1 $\rightarrow \sum x_i^2 = 576668$ **SHIFT** **S-SUM** **▶** 1 $\rightarrow \sum y_i^2$
SHIFT **S-SUM** 2 $\rightarrow \sum x_i = 3392$ **SHIFT** **S-SUM** **▶** 2 $\rightarrow \sum y_i$
SHIFT **S-SUM** 3 $\rightarrow N = 20$ **SHIFT** **S-SUM** **▶** 3 $\rightarrow \sum x_i y_i = 202032$
SHIFT **S-VAR** 1 $\rightarrow \bar{x} = 169,6$ **SHIFT** **S-VAR** **▶** 1 $\rightarrow \bar{y} = 59,2$
SHIFT **S-VAR** 2 $\rightarrow s_x = 2,88$ **SHIFT** **S-VAR** **▶** 2 $\rightarrow s_y$
SHIFT **S-VAR** **▶▶** 1 $\rightarrow$ coef. b } $y = ax + b$
SHIFT **S-VAR** **▶▶** 2 $\rightarrow$ coef. a }
SHIFT **S-VAR** **▶▶** 3 $\rightarrow$ coef. correlación r

NOTA: La calculadora nos da la recta de regresión de y sobre x. La otra debemos calcularla a a partir de los parámetros.

Ejercicio 3: Las temperaturas máxima y mínima (en °C) en una determinada localidad a lo largo del año han sido las siguientes:

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
Máxima	16	17	19	19	21	25	28	27	23	21	18	17
Mínima	7	10	12	13	15	19	21	22	18	15	12	9

a) Dibujar la nube de puntos.



b) Obtener la ecuación de la recta de regresión utilizando una tabla estadística apropiada.

Máxima (°C) x_i	Mínima (°C) y_i	$x_i y_i$	x_i^2
16	7		
17	10		
19	12		
19	13		
21	15		
25	19		
28	21		
27	22		
23	18		
21	15		
18	12		
17	9		
$\Sigma x_i =$	$\Sigma y_i =$	$\Sigma x_i y_i =$	$\Sigma x_i^2 =$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} = \quad (\text{Sol : } 20,92)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{N} = \quad (\text{Sol : } 14,42)$$

$$s_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{N} - \bar{x} \bar{y} = \quad (\text{Sol : } 17,37)$$

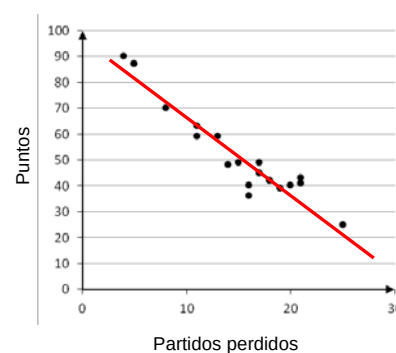
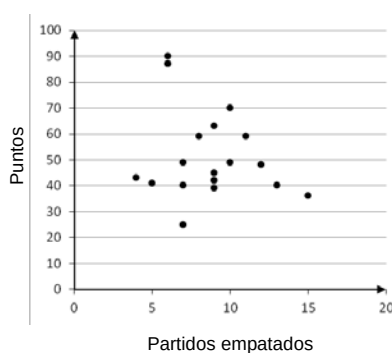
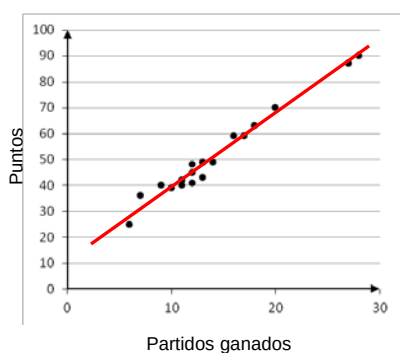
$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \quad (\text{Sol : } 5,9)$$

c) Dibujar la recta de regresión sobre la nube de puntos anterior.

d) ¿Qué temperatura mínima corresponderá a una máxima de 30°?

V) CORRELACIÓN

Observemos los siguientes tres ejemplos de nubes de puntos correspondientes al **ejemplo 1**. Nos servirán para ver el concepto de **correlación**, es decir, el **grado de dependencia entre las dos variables**:



–Al aumentar el valor de una variable aumenta el valor de la otra.

–**CORRELACIÓN DIRECTA**
(o positiva)

–Recta de regresión **CRECIENTE**

–No existe ningún grado de dependencia entre las dos variables.

–**CORRELACIÓN NULA**

–No tiene sentido la recta de regresión

–Al aumentar el valor de una variable disminuye el valor de la otra.

–**CORRELACIÓN INVERSA**
(o negativa)

–Recta de regresión **DECRECIENTE**

Para conocer si la correlación es directa o inversa sin necesidad de observar la gráfica basta con ver el signo de la covarianza. En efecto, como vimos en el apartado anterior la pendiente de la recta de regresión venía dada por:

$$a = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \quad (5)$$

Como el denominador es siempre >0 por ser un cuadrado, se deduce que el signo de la pendiente vendrá dado por el signo de S_{xy} . Por lo tanto:

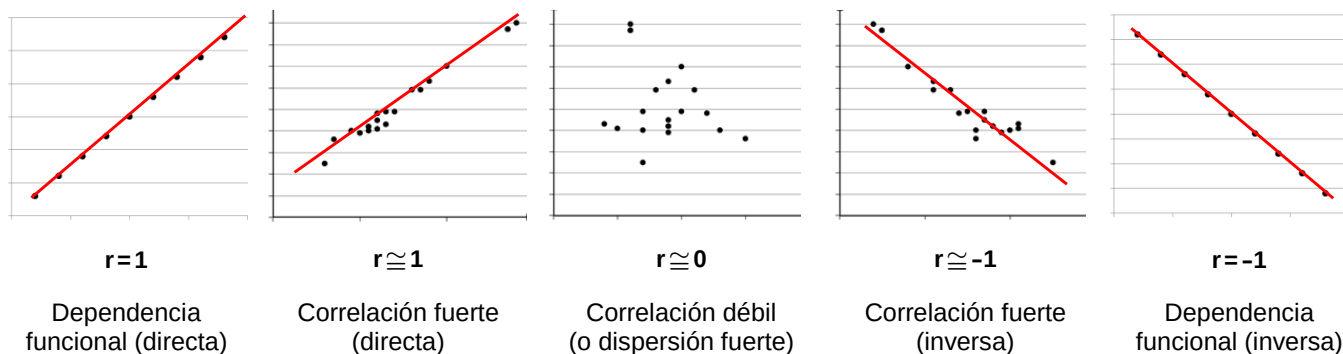
$$\begin{aligned} S_{xy} > 0 &\Rightarrow \text{correlación directa} \\ S_{xy} < 0 &\Rightarrow \text{correlación inversa} \end{aligned}$$

Ahora bien, para determinar o cuantificar el grado de dependencia entre variables vamos a definir un nuevo parámetro, el **coeficiente de correlación**, r :

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \quad (6)$$

Observaciones:

- 1º) El por qué se define precisamente así escapa a las pretensiones del curso. Pero veremos en los ejemplos y ejercicios que este coeficiente así definido efectivamente indica muy bien el grado de dependencia entre variables. **De hecho, lo primero que se calcula es r , para ver si tiene sentido o no obtener a continuación la recta de regresión.**
- 2º) No tiene unidades.
- 3º) Puede demostrarse que $-1 \leq r \leq 1$. Las posibilidades son las siguientes:



Por ejemplo, en las tres nubes del comienzo de este apartado tenemos $r=0,99$, $r=-0,29$ y $r=-0,95$ respectivamente.

- 4º) Cuánto más próximo sea $|r|$ a 1 más tenderán a ser coincidentes las rectas de regresión de y sobre x y de x sobre y .

Ejemplo 4: Vamos a calcular el coeficiente de correlación correspondiente a la recta de regresión calculada en el apartado anterior para la estatura y el peso de 20 alumnos de 1º de Bachillerato.

Recordemos que obtuvimos: $S_{xy} \cong 61,28$
 $S_x^2 \cong 69,24 \Rightarrow S_x \cong 8,32$

Con estos parámetros, la recta de regresión (de y sobre x) era: $y = 0,89x - 91,74$

Vemos que para calcular r mediante (6) nos falta S_y . Por tanto, tendremos que añadir una nueva columna, correspondiente a Σy_i^2 :

Estatura (cm) x_i	Peso (kg) y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
164	53	8692	26896	2809
175	62	10850	30625	3844
165	48	7920	27225	2304
170	60	10200	28900	3600
168	47	7896	28224	2209
157	52	8164	24649	2704
167	50	8350	27889	2500
172	52	8944	29584	2704
177	63	11151	31329	3969
160	54	8640	25600	2916
168	63	10584	28224	3969
160	51	8160	25600	2601
164	50	8200	26896	2500
174	80	13920	30276	6400
170	65	11050	28900	4225
182	63	11466	33124	3969
161	60	9660	25921	3600
171	62	10602	29241	3844
173	63	10899	29929	3969
194	86	16684	37636	7396
$\Sigma x_i = 339$ 2 cm	$\Sigma y_i = 118$ 4 kg	$\Sigma x_i y_i = 202032$ cm·kg	$\Sigma x_i^2 = 57666$ 8 cm ²	$\Sigma y_i^2 = 72032$ kg ²

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{N} = \frac{1184}{20} = 59,2 \text{ kg}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{72032}{20} - 59,2^2 = 96,96 \text{ kg}^2$$

$$\Rightarrow s_y \cong 9,85 \text{ kg}$$

Finalmente, sustituyendo s_x , s_y y s_{xy} en (6) obtenemos

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{61,28}{8,32 \cdot 9,85} = \frac{61,28}{81,96} \cong 0,75$$

es decir, las estimaciones a partir de la recta de regresión tienen una fiabilidad del 75%.

En resumen, cuanto más se aproxime r a 1 o -1 mayor validez tendrá toda estimación obtenida de la recta de regresión. **A partir de $r = \pm 0,80$ se puede aceptar la estimación.**

Ejercicio 3: Calcular el coeficiente de correlación correspondiente a la recta de regresión calculada para las temperaturas máxima y mínima (en °C) en una determinada localidad a lo largo del año:

Máxima (°C) x_i	Mínima (°C) y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
16	7	112	256	
17	10	170	289	
19	12	228	361	
19	13	247	361	
21	15	315	441	
25	19	475	625	
28	21	588	784	
27	22	594	729	
23	18	414	529	
21	15	315	441	
18	12	216	324	
17	9	153	289	
$\Sigma x_i = 251$	$\Sigma y_i = 173$	$\Sigma x_i y_i = 3827$	$\Sigma x_i^2 = 5429$	$\Sigma y_i^2 =$

$$s_{xy} = 17,37$$

$$s_x^2 = 14,91$$

$$\bar{y} = 14,42$$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{N} - \bar{y}^2 =$$

(Sol : $s_y \cong 4,60$)

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} =$$

(Sol : $\cong 0,98$)

Ejercicios final tema: 6 y ss.

13 EJERCICIOS de ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL

Frecuencias, tablas y gráficos:

1. Dos fotógrafos hacen una exposición de fotos grandes, medianas y pequeñas, cuyo número es:

	Grandes	Medianas	Pequeñas
Fotógrafo 1	9	8	7
Fotógrafo 2	10	11	5

- a) Calcular los 5 tipos de frecuencias vistos en el tema (utilizando cuatro tablas en total):

- frecuencias absolutas bidimensionales
 - absolutas marginales
 - relativas bidimensionales
 - relativas marginales
 - condicionadas → dos tablas
- } una tabla
- } una tabla

- b) Diagramas de barras de frecuencias absolutas bidimensionales

2. Los ingresos mensuales, en €, en cuatro sucursales de loterías y apuestas, han sido los siguientes:

	Lotería Nacional	Primitiva	Apuestas por Internet	Bonoloto	Euromillones	Gordo de la primitiva
Centro	10529	5139	1288	1053	568	311
Aeropuerto	3179	1259	314	218	200	97
Estación de tren	2115	1495	376	229	135	106
Barrio del Pilar	7386	4875	1015	950	417	309

- a) ¿Qué % supone la Lotería Nacional por sucursal? (Construir la tabla necesaria para responder a esta cuestión) ¿Qué tipo de frecuencia es?
- b) ¿Qué % se ha jugado en la sucursal del aeropuerto en cada tipo de apuestas? (Construir la tabla necesaria para responder a ello) ¿De qué tipo de frecuencia se trata?

Nube de puntos:

3. Se pregunta a los 20 alumnos de una clase sobre la talla de su calzado y el número de hermanos (contándose él), obteniéndose los siguientes resultados:

(38,4) (41,2) (38,2) (37,2) (37,3) (36,2) (37,3) (38,4) (42,5) (38,3)
 (40,2) (38,3) (42,3) (46,4) (38,2) (39,3) (43,1) (48,1) (40,2) (36,2)

- a) Obtener la nube de puntos.
- b) Razonar si se trata de una relación funcional o estadística.
- c) ¿Si comparáramos talla de calzado y estatura la nube sería tan dispersa?

4. En una copistería los precios de las fotocopias son los siguientes:

Nº fotocopias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Precio (cent)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

- a) Representar la nube de puntos.
- b) ¿Se trata de una relación funcional o estadística? En caso de ser funcional, indicar la ley o fórmula que siguen.
5. Las temperaturas máxima y mínima (en °C) en una determinada localidad a lo largo del año han sido las siguientes:

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
Máxima	16	17	19	19	21	25	28	27	23	21	18	17
Mínima	7	10	12	13	15	19	21	22	18	15	12	9

- a) Representar la nube de puntos.
- b) Razonar si es una relación funcional o estadística.
- c) Indicar qué grado de dispersión se observa y si hay o no cierta correlación entre ambas variables
- NOTA: En los ejercicios que siguen, y en el examen, a la hora de hallar los parámetros estadísticos que conduzcan a la obtención del coeficiente de correlación y a la recta de regresión es obligatorio construir la tabla estadística apropiada, aunque también se recomienda comprobar los cálculos mediante calculadora (o mediante Excel).

Correlación y regresión:

6. Para cada una de las distribuciones bidimensionales que siguen dibujar la nube de puntos y construir una tabla apropiada para hallar el coeficiente de correlación y, si procede, la recta de regresión de y sobre x:

a)

x	2	3	4	5	6
y	4	2	5	4	6

b)

Clasificación	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ganados (G)	27	24	20	18	19	16	18	15	15	15
Empatados (E)	12	15	11	11	9	13	9	14	12	12
Perdidos (P)	5	5	13	15	16	15	17	15	17	17
Puntos (PT)	66	63	51	47	47	45	45	44	42	42

para las variables (G,P), (G,PT) y (G,E).

c)

Gastos en publicidad (miles €)	1	2	3	4	5	6	7	8
Ventas (miles €)	15	16	14	17	20	18	18	19

d)

Nº horas estudio (E)	Nº horas TV (T)	Nº suspensos (S)
4	2	1
5	1,5	0
4	2,5	3
2,5	4	2
6	0,5	0
0,5	5,5	6
1	5	2
2	4	5
3	2,5	3
4,5	1,5	2
3	3,5	4
1,5	5	3
3,5	2,5	4
5,5	3,5	1
2,5	3,5	3

para las variables (E,T), (E,S) y (T,S)

7. La evolución de los asuntos que entraron por la vía civil y penal en una determinada localidad se expresa en la siguiente tabla:

Años	Juzgado civil	Juzgado penal
2010	134	87
2011	171	107
2012	196	135
2013	199	143
2014	216	168

¿Cuántos asuntos cabe esperar en el juzgado penal un año que se hayan recibido 300 en el civil?

8. La evolución del SIDA en España desde su aparición viene expresada en la siguiente tabla:

Año	Nº de casos	Nº de muertos
1981	1	1
1982	6	6
1983	17	17
1984	46	43
1985	164	128
1986	437	274
1987	624	322

En un año que se vayan a presentar 700 casos, ¿cuántos muertos se prevén? ¿Tendría sentido hacer una estimación para, por ejemplo, 1000 casos? (Sol: $y=0,53x+14,21$)

9. Se determina la pérdida de efectividad de un determinado preparado farmacéutico con el tiempo y se obtiene el siguiente resultado:

Tiempo (meses)	1	2	3	4	5
Actividad (en %)	90	75	42	30	21

- a) ¿Qué % de actividad quedará a los 6 meses?
b) ¿En cuánto tiempo la actividad se reduce al 50 %?

10. La evolución del IPC y la tasa de inflación en los primeros nueve meses de un año viene reflejada en la siguiente tabla:

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP
IPC	0,7	1,1	1,7	2	1,9	1,9	2,9	2,9	3,8
Inflación	6	6	6,3	6,2	5,8	4,9	4,9	4,5	4,4

¿Qué tasa de inflación es razonable esperar en un mes en el que el IPC sea 4,5?

11. El número de separaciones matrimoniales y divorcios en una determinada provincia en el período 2010-2014 se distribuye según la siguiente tabla:

Año	Separaciones	Divorcios
2010	2357	4000
2011	2586	3428
2012	2689	2903
2013	2821	2711
2014	3073	2910

¿Cuántas separaciones se prevé que se produzcan en un determinado año sabiendo que hubo 3600 divorcios? (Sol: $y = -1,63x + 7605,97$; 2457 separaciones)

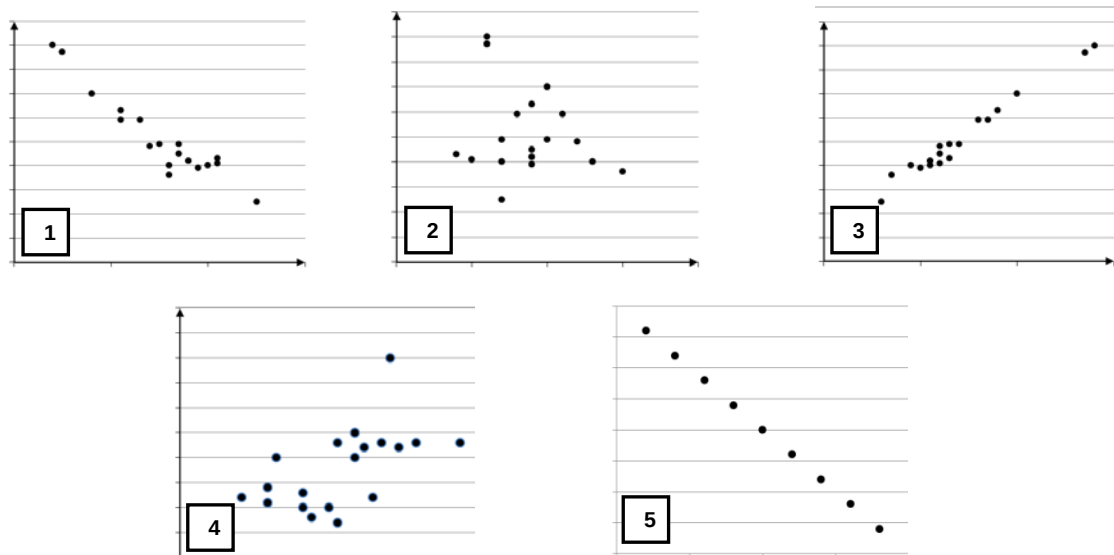
12. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de escolares en una batería de test en la que se trata de medir la habilidad verbal y el razonamiento abstracto, son las siguientes?

		Habilidad verbal			
		[10-20]	[20-30]	[30-40]	[40-50]
Razonamiento abstracto	[15-25]	5	3		
	[25-35]	2	6	1	
	[35-45]		1	4	2
	[45-55]			3	3
	[55-65]			1	2

¿Qué puntuación en razonamiento abstracto está previsto que tenga un alumno que tuvo 45 en habilidad verbal?

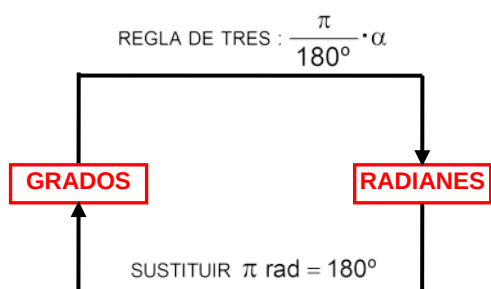
13. TEORÍA:

- a) Si el valor absoluto del coeficiente de correlación lineal es muy próximo a la unidad, ¿podemos estar seguros de que las previsiones que realicemos serán fiables? ¿Podemos extrapolar los resultados obtenidos?
- b) ¿Puede ser la varianza de una variable negativa? ¿Y la desviación típica? ¿Y la covarianza? Razonar las respuestas.
- c) Los números 0,95, -0,29, -1, 0,75 y 0,89 son los coeficientes de correlación de las distribuciones bidimensionales cuyos diagramas de dispersión se adjuntan. Asignar a cada diagrama su coeficiente:



- d) Razonar qué tipo de relación –correlación directa o inversa, funcional, etc. – presentan los siguientes pares de variables:
- Goles a favor y goles en contra de los equipos de fútbol de 1ª división.
 - Estatura media de los padres y de los hijos de una serie de familias.
 - Notas de los alumnos de 1º Bachillerato B en Filosofía y Educación Física en una evaluación.
 - Notas de los alumnos de 1º Bachillerato A en Matemáticas y Física en una evaluación.
 - Edad del marido y la mujer en un conjunto de matrimonios.
 - Altura de un objeto que se deja caer y tiempo de caída, en una serie de lanzamientos desde diferentes alturas.
 - Distancia de lanzamiento y número de canastas de un jugador de baloncesto tras una serie de intentos.
 - Índice de mortalidad infantil y promedio de horas de televisión por habitante de un conjunto de países.
 - Índice de mortalidad infantil y número de médicos de un conjunto de países.
 - Kwh consumidos en las viviendas de un edificio en un mes y coste del recibo de la luz.
 - Número de personas que viven en cada casa y coste del recibo de la luz.
- e) Si conocemos el signo de la covarianza, ¿podemos afirmar algo sobre la correlación? ¿Qué valor toma r cuando la covarianza es nula?
- f) ¿Tiene sentido calcular la recta de regresión de una distribución bidimensional sabiendo que $r=0,17$?

FÓRMULAS de TRIGONOMETRÍA



$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad (1)$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (4)$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad (2)$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (3)$$

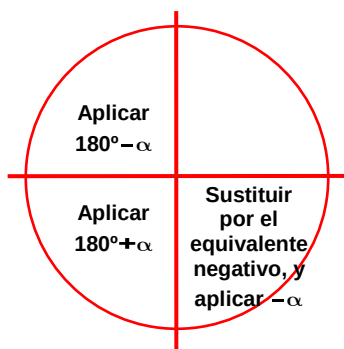
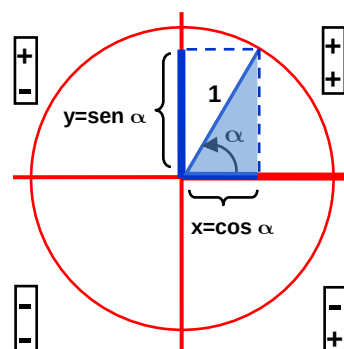
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (6)$$

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (7)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \quad (8)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad (9)$$



$$\left. \begin{array}{l} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array} \right\} \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad (10)$$

ÁNGULOS OPUESTOS

$$\left. \begin{array}{l} \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \end{array} \right\} \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad (11)$$

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

$$\left. \begin{array}{l} \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha \end{array} \right\} \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \quad (12)$$

ÁNGULOS que DIFIEREN 180°

$$\left. \begin{array}{l} \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \end{array} \right\} \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha \quad (13)$$

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

$$\left. \begin{array}{l} \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \end{array} \right\} \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \quad (14)$$

ÁNGULOS que DIFIEREN 90°

$$\left. \begin{array}{l} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (15)$$

RAZONES de la SUMA y RESTA

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (16)$$

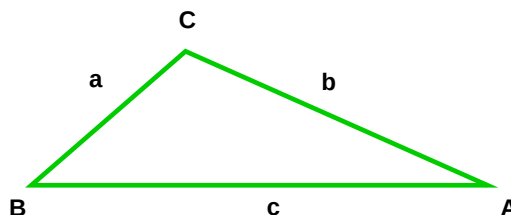
ÁNGULO DOBLE

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (17)$$

ÁNGULO MITAD

$$\left. \begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

TRANSFORMACIONES de SUMAS o RESTAS en PRODUCTOS



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (19)$$

TH. del SENO

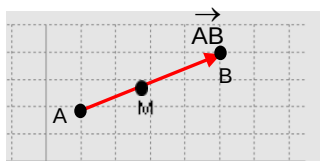
$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

TH. del COSENO

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} bc \sin A \\ A &= \frac{1}{2} ac \sin B \\ A &= \frac{1}{2} ab \sin C \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ÁREA del TRIÁNGULO

FÓRMULAS de VECTORES



COORDENADAS DEL VECTOR QUE UNE DOS PUNTOS:

$$\vec{AB} = B - A$$

(1)

COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO:

$$M = \frac{A + B}{2}$$

(2)

« $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ forman una **base** de $\mathbb{V}^2$ si cualquier $\vec{w}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base, es decir,

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \gg$$

(3)

«Se dice entonces que λ y μ son las **coordenadas** de $\vec{w}$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ »

DEFINICIÓN: «Dos vectores son **ortonormales** si son $\perp$ y **unitarios**»

(4)

DEFINICIÓN: «Dos vectores son **ortogonales** si son $\perp$ »

(5)

MÓDULO DE $\vec{u} = (a, b)$:

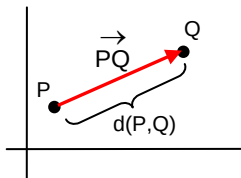
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(6)

VECTOR CON LA DIRECCIÓN DE $\vec{u}$ Y UNITARIO:

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

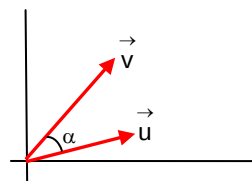
(7)



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS:

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\|$$

(8)



DEFINICIÓN DE PRODUCTO ESCALAR:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

(9)

EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO ESCALAR:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$$

(10)

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD:

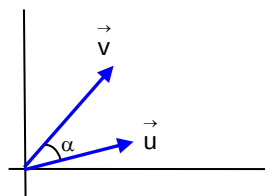
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

(11)

VECTOR $\perp$ A $\vec{u} = (a, b)$:

$$\vec{n} = (-b, a)$$

(12)

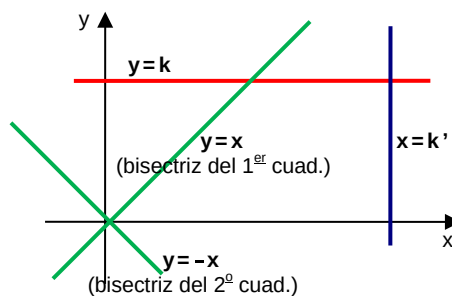
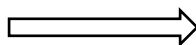
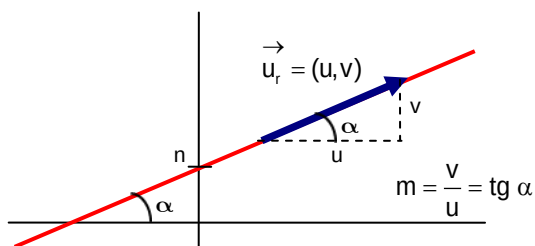
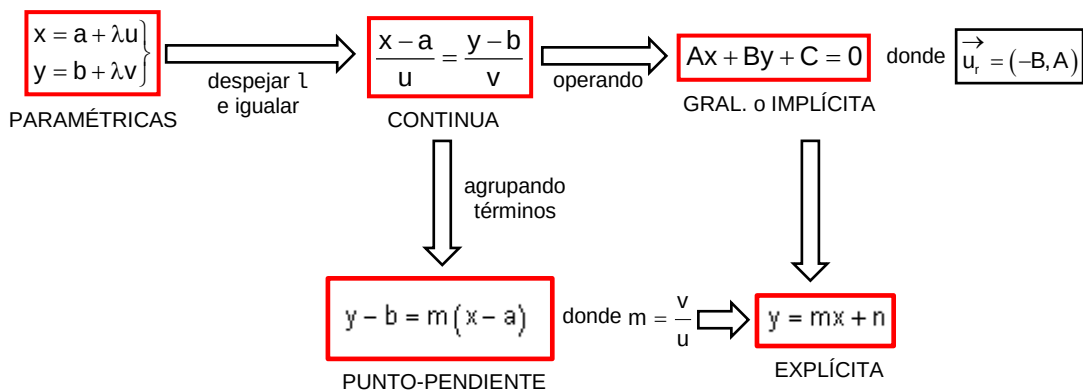


ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

(13)

RESUMEN de RECTAS



	RECTAS en EXPLÍCITAS	RECTAS en IMPLÍCITAS
	$y = mx + n$ $y = m'x + n'$	$Ax + By + C = 0$ $A'x + B'y + C' = 0$
SECANTES	$m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$
PARALELAS	$m = m'$ $n \neq n'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
COINCIDENTES	$m = m'$ $n = n'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

COND. de
PARALELISMO

$$\cos \alpha = \cos \left(\vec{u}_r, \vec{u}_s \right) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{\|\vec{u}_r\| \|\vec{u}_s\|} \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|m_2 - m_1|}{1 + m_1 m_2} \quad (2)$$

ÁNGULOS de 2 RECTAS

$$AA' + BB' = 0 \quad (3)$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad (4)$$

CONDICIÓN de PERPENDICULARIDAD

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (5)$$

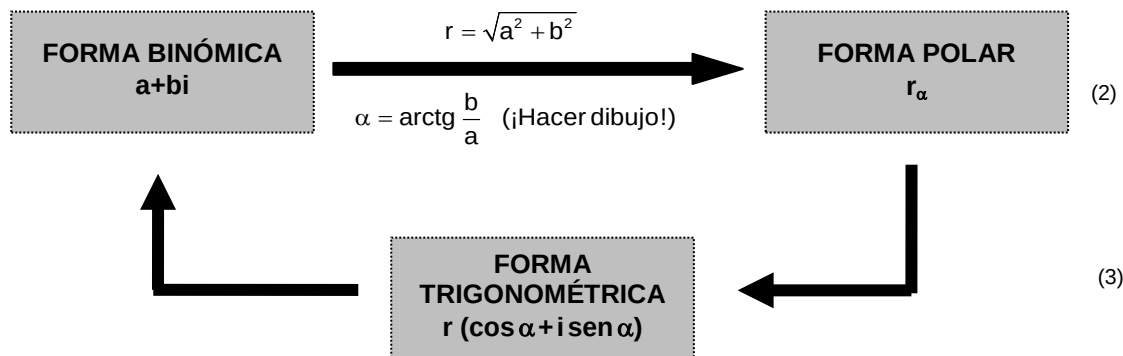
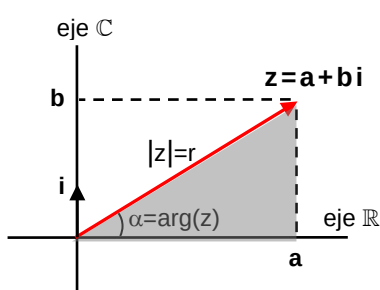
DISTANCIA PUNTO-RECTA

FÓRMULAS de COMPLEJOS

DEF:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \end{aligned}$$

es decir, $\sqrt{-1} = i$ (1)



PRODUCTO EN FORMA POLAR:

$$r_{\alpha} \cdot r'_{\alpha'} = (r \cdot r')_{\alpha + \alpha'} \quad (4)$$

COCIENTE EN FORMA POLAR:

$$\frac{r_{\alpha}}{r'_{\alpha'}} = \left(\frac{r}{r'} \right)_{\alpha - \alpha'} \quad (5)$$

POTENCIA EN FORMA POLAR:

$$(r_{\alpha})^n = (r^n)_{n \cdot \alpha} \quad (6)$$

FÓRMULA DE DE MOIVRE:

$$[r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = r^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) \quad (7)$$

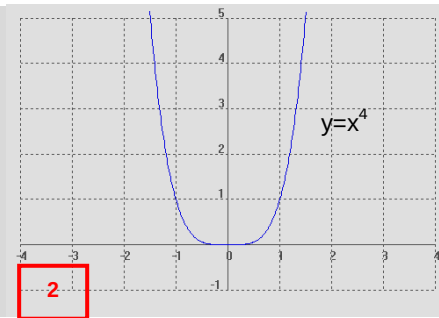
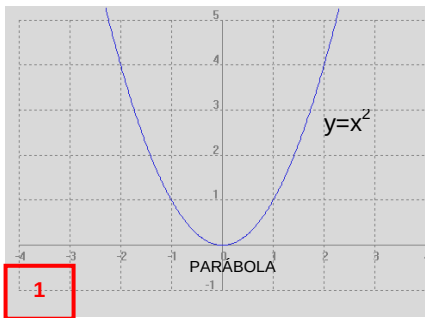
RAÍCES EN FORMA POLAR:

$$\sqrt[n]{r_{\alpha}} = R_{\beta}, \text{ donde } \begin{cases} R = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}, \text{ donde } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (8)$$

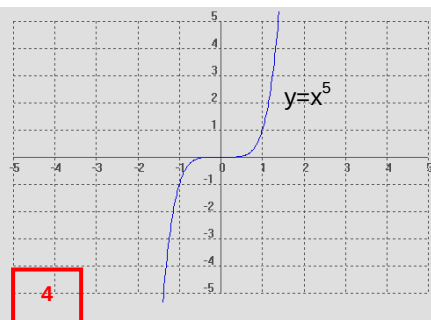
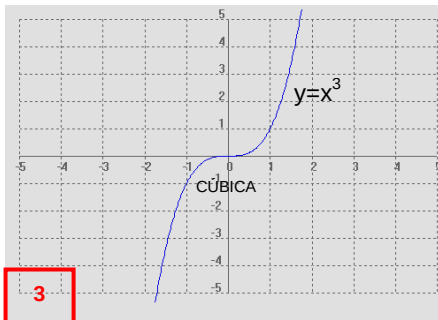
Transformaciones de funciones

FUNCIÓN ORIGINAL	TIPO DE TRANSFORMACIÓN	FUNCIÓN TRANSFORMADA	GRÁFICA	RESULTADO
	TRASLACIONES	$y=f(x)\pm k$		TRASLACIÓN hacia ARRIBA
				TRASLACIÓN hacia ABAJO
		$y=f(x\pm k)$		TRASLACIÓN hacia la IZQUIERDA
				TRASLACIÓN hacia la DERECHA
	CONTRACCIONES o EXPANSIONES	$y=k \cdot f(x)$	$k > 1$	CONTRACCIÓN
			$0 < k < 1$	EXPANSIÓN
			$-1 < k < 0$	(Reflexión +) EXPANSIÓN
			$k < -1$	(Reflexión +) CONTRACCIÓN
	REFLEXIONES	$y=-f(x)$		REFLEXIÓN respecto al EJE X
		$y=f(-x)$		REFLEXIÓN respecto al EJE Y

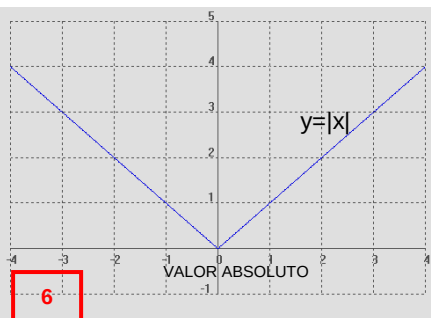
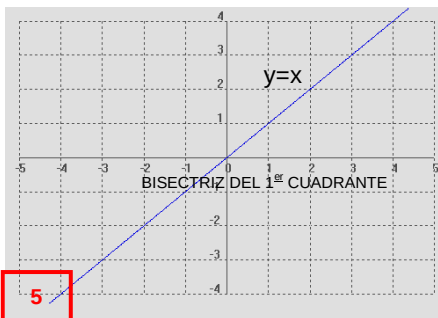
GRÁFICAS MÁS REPRESENTATIVAS



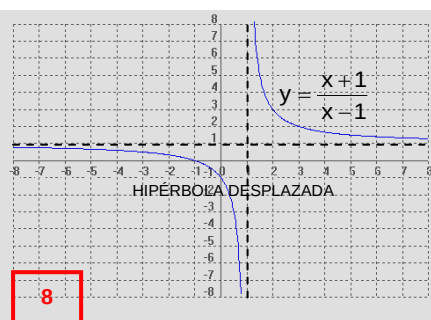
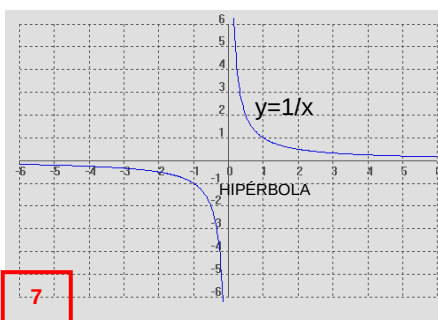
En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo par, tienen esta forma.
(cuanto mayor es n , más acusada es la curvatura)



En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo impar ($\neq 1$), tienen esta forma.
(cuanto mayor es n , más acusada es la curvatura)



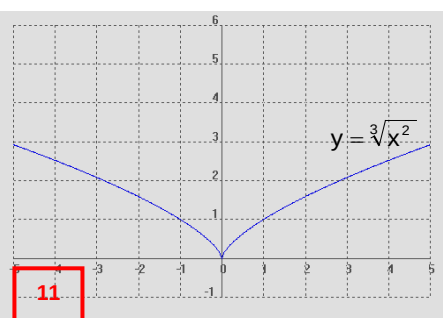
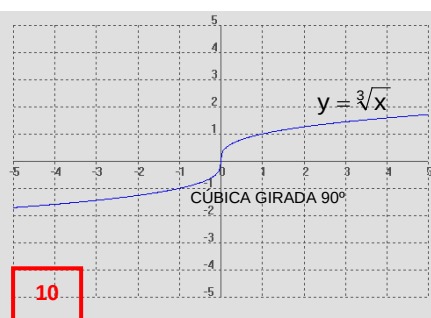
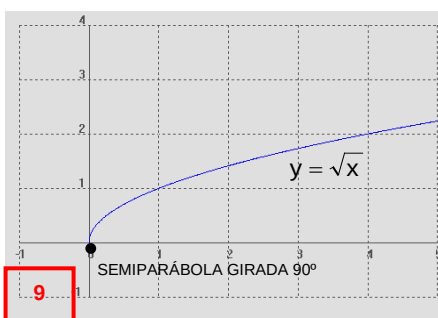
En general, la gráfica de $y=|f(x)|$ se obtiene reflejando la de $f(x)$ respecto al eje OY en el semiplano superior.

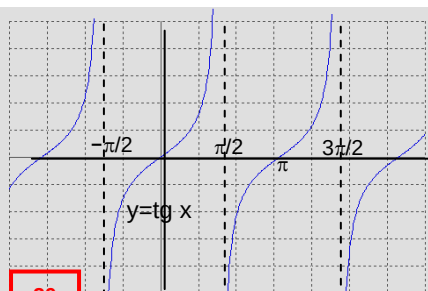
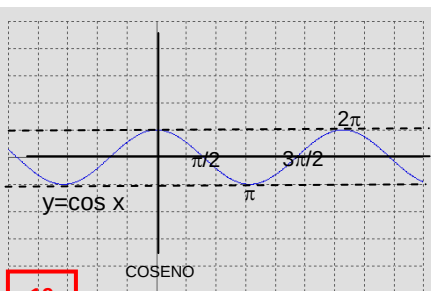
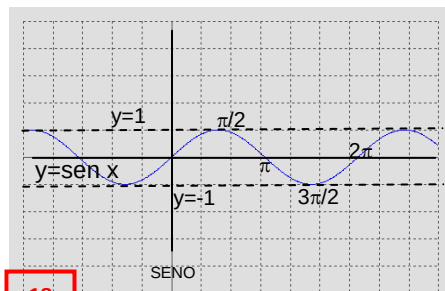
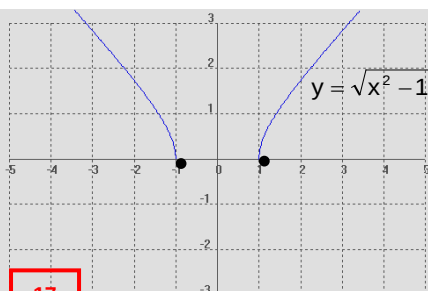
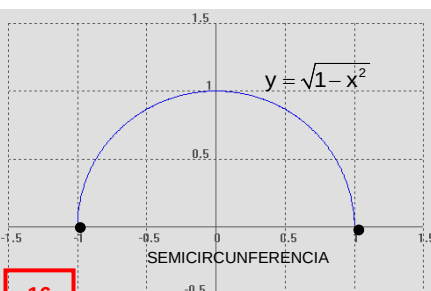
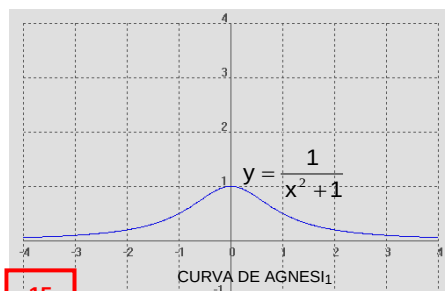
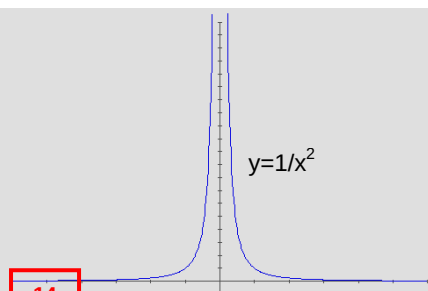
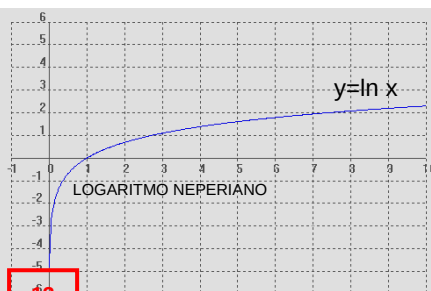
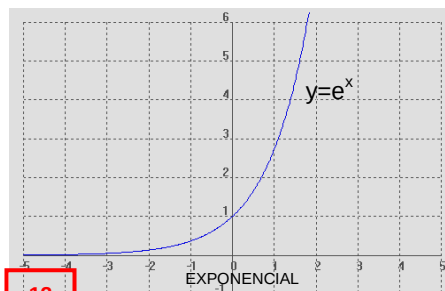


En general,

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

donde $c \neq 0$, es una hipérbola.





Nombre	Símbolo	
	Minúscula	Mayúscula
1 Alfa	α	A
2 Beta	β	B
3 Gamma	γ	Γ
4 Delta	δ	Δ
5 Épsilon	ϵ	E
6 Zeta	ζ	Z
7 Eta	η	H
8 Theta	θ, ϑ	Θ
9 Iota	ι	I
10 Kappa	κ	K
11 Lambda	λ	Λ

12	My	μ	M
13	Ny	ν	N
14	Xi	ξ	Ξ
15	Ómicron	$\omicron$	O
16	Pi	π	Π
17	Rho	ρ	P
18	Sigma	σ, ς	Σ
19	Tau	τ	T
20	Ípsilon	υ	Y
21	Fi	ϕ, φ	Φ
22	Ji	χ	X
23	Psi	ψ	Ψ
24	Omega	ω	Ω

FÓRMULAS de LOGARITMOS

Definición de logaritmo: $\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$ (donde $a > 0$, $a \neq 1$) (1)

Sistemas de logaritmos más utilizados:

NOMBRE	BASE	NOTACIÓN	DEFINICIÓN
Logaritmo decimal	$a=10$	$\log$	$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$
Logaritmo neperiano. ¹	$a=e$	$\text{Ln}, \ln$	$\ln N = x \Leftrightarrow e^x = N$

donde $e \cong 2,718281828459\dots$ se llama cte. de Euler; es un número irracional.

Fórmulas del cálculo logarítmico: $\log(p \cdot q) = \log p + \log q$ (2)

(todas son válidas en cualquier base)

$\log \frac{p}{q} = \log p - \log q$ (3)

$\log p^n = n \cdot \log p$ $\log \sqrt[n]{p} = \frac{1}{n} \log p$ (4) y (5)

Casos particulares: $\log_a a^x = x$ $a^{\log_a x} = x$ (6) y (7) $\ln e^x = x$ $e^{\ln x} = x$ (10) y (11)

$\log_a a = 1$ $\log_a 1 = 0$ (8) y (9) $\ln e = 1$ $\ln 1 = 0$ (12) y (13)

Fórmula del cambio de base: $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ (14)

¹ En honor a *John Napier* (*Neper*, en latín), matemático inglés (1550-1617) inventor de los logaritmos.

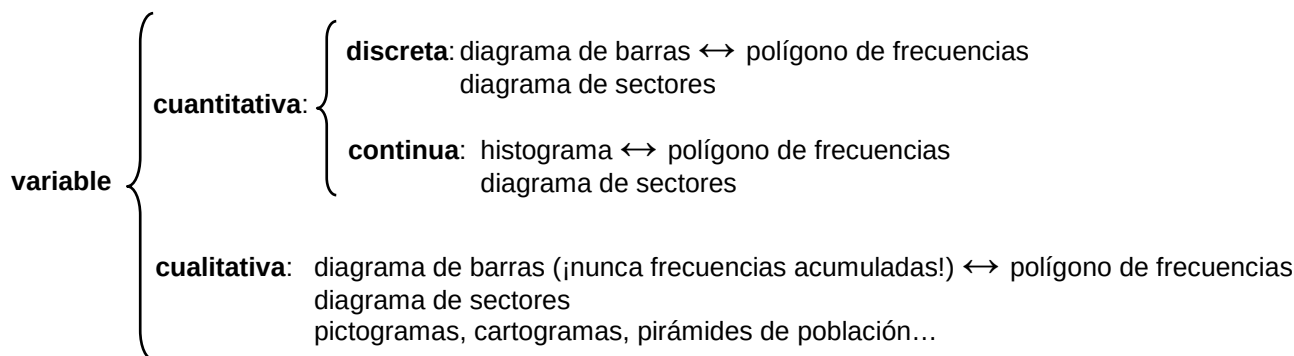
FÓRMULAS de ESTADÍSTICA

FRECUENCIA RELATIVA:
$$h_i = \frac{f_i}{N} \quad (1)$$

Nº DE INTERVALOS DE CLASE PARA N DATOS:
$$n^\circ \text{ clases} = \sqrt{N} \quad (2)$$

ALTURA DE CADA RECTÁNGULO EN UN HISTOGRAMA:
$$a_i = \frac{f_i}{\text{amplitud}} \quad (3)$$

GRADOS CORRESPONDIENTES A CADA SECTOR EN UN GRÁFICO DE SECTORES:
$$\alpha_i = \frac{f_i}{N} = h_i \cdot 360^\circ \quad (4)$$



MEDIA ARITMÉTICA:
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N} \quad (5)$$

VARIANZA:
$$V = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{X})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{N} - \bar{X}^2 \quad (6)$$

DESVIACIÓN TÍPICA:
$$S = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{N} - \bar{X}^2} \quad (7)$$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN:
$$C.V. = \frac{S}{\bar{X}} \quad (8)$$

TABLA DE DERIVADAS ELEMENTALES

	FUNCIONES SIMPLES:		FUNCIONES COMPUESTAS (Regla de la cadena)	
1	$y=k$	$y'=0$		
2	$y=x$	$y'=1$		
3	$y=k \cdot x$	$y'=k$	$y=k \cdot u$	$y'=k \cdot u'$
4	$y=x^n, (n \in \mathbb{R})$	$y'=n \cdot x^{n-1}$	$y=u^n, (n \in \mathbb{R})$	$y'=n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
5			$y=u \pm v$	$y'=u' \pm v'$
6			$y=u \cdot v$	$y'=u' \cdot v + u \cdot v'$
7			$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
8	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{u'}{u^2}$
9	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
10	$y = \sqrt[n]{x}$	hacer $y=x^{1/n}$	$y = \sqrt[n]{u}$	hacer $y=u^{1/n}$

NOTA: en esta tabla k es cualquier constante, y u y v son funciones.

FÓRMULAS de DERIVABILIDAD

Derivada de una función en un punto, $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1), \text{ o bien: } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2)$$

Función derivada, $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3)$$

Ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=a$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (4)$$

Teorema 1:

$$\begin{aligned} f'(a) > 0 &\Rightarrow f(x) \text{ creciente en } x = a \\ f'(a) < 0 &\Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } x = a \end{aligned} \quad (5)$$

Teorema 2:

$$x = a \text{ es M o m de } f(x) \Rightarrow f'(a) = 0 \quad (6)$$

Consecuencias: Los candidatos a **M** o **m** son los que anulan $f'(x)$ (7)

Si $f'(x)$ no se anula nunca, no hay **M** ni **m** (8)

Corte con los ejes:

CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	haciendo $y=0$ (habrá que resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	sustituyendo $x=0$	uno o ninguno

Definición de asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{matrix} \infty \\ (0 - \infty) \end{matrix} \Leftrightarrow x = a \text{ A.V.} \quad (9)$$

Definición de asíntota horizontal:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (0 - \infty)}} f(x) = L \Leftrightarrow y = L \text{ A.H.} \quad (10)$$

Definición de asíntota oblicua:

$$\left. \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty (0 - \infty)} \frac{f(x)}{x} \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty (0 - \infty)} [f(x) - mx] \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = mx + n \text{ es A.O.} \quad (11)$$

PRINCIPALES SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

	SÍMBOLO	SIGNIFICADO
1	$\forall$	Para todo
2	$\exists$	Existe al menos uno
3	$\exists!$	Existe un único
4	$\nexists$	No existe
5	$/$	Tal que
6	$:$	Tal que
7	$<$	Menor que
8	$=$	Igual que
9	$>$	Mayor que
10	$\leq$	Menor o igual que
11	$\geq$	Mayor o igual que
12	∞	Infinito
13	$\circ$	Composición de funciones
14	$\propto$	Proporcional a
15	$\perp$	Perpendicular a
16	$\neq$	Distinto de
17	$\approx \cong \simeq$	Aproximadamente igual a
18	$\equiv$	Idéntico a
19	$\cup$	Unión de conjuntos
20	$\cap$	Intersección de conjuntos
21	$\subset$	Contenido en
22	$\supset$	Contiene a
23	$\in$	Perteneciente a
24	$\notin$	No perteneciente a
25	$\emptyset$	Conjunto vacío
26	$\Rightarrow$	Implica
27	$\Leftrightarrow$	Si y sólo si
28	Σ	Sumatorio
29	Π	Productorio
30	$\mathbb{N}$	Números naturales
31	$\mathbb{Z}$	Números enteros
32	$\mathbb{Q}$	Números racionales
33	$\mathbb{I}$	Números irracionales ¹
34	$\mathbb{R}$	Números reales
35	$\mathbb{C}$	Números complejos

¹ En realidad esta notación no es muy estándar; la forma correcta de nombrar los irracionales sería $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$