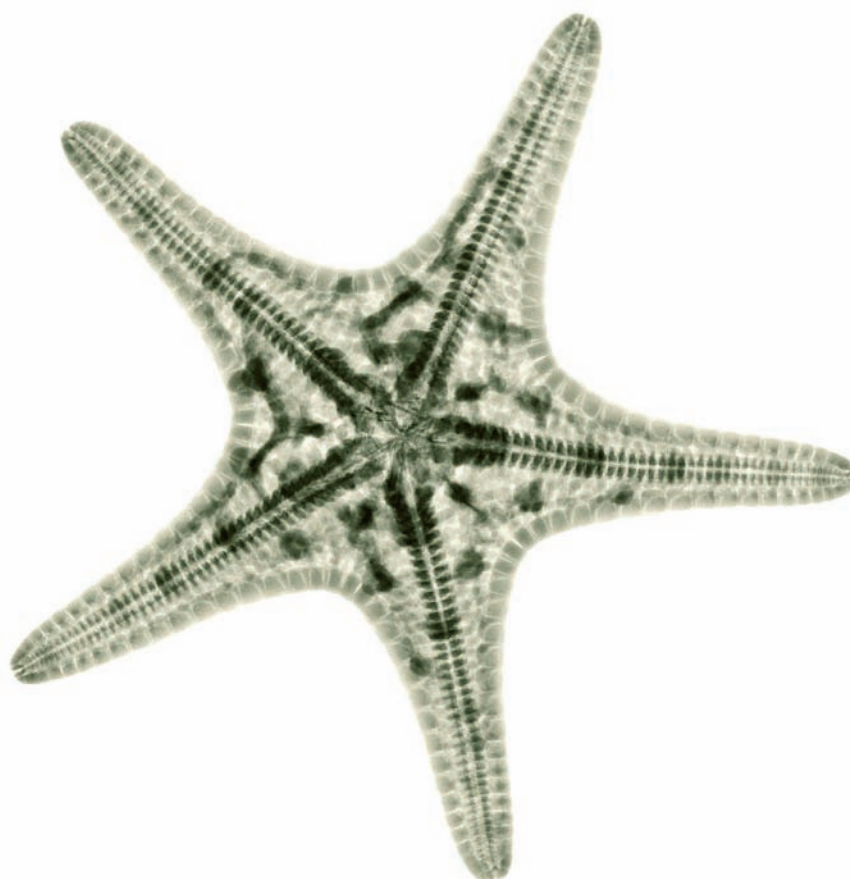


Matemáticas

María José Ruiz
Jesús Llorente
Carlos González

2

BACHILLERATO



Unidad 1 – Matrices

PÁGINA 7

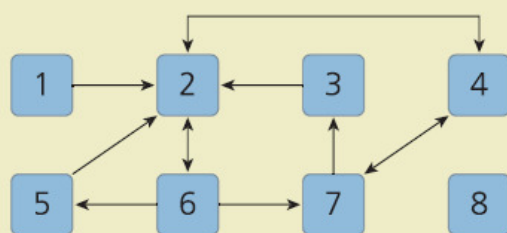
cuestiones iniciales

1. Expresa en notación matricial y resuelve por el método de Gauss los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - 3y + 4z = 9 \\ 3x + 5y - z = 17 \\ -2x + 6y + z = 18 \end{cases} \end{array}$$

2. Si se cumple que $PQ = P$ y $QP = Q$, prueba que $P^2 = P$.

3. El grafo siguiente nos muestra las relaciones que se establecen en un grupo de ocho personas. Construye una tabla que indique las relaciones anteriores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos personas y con 0 la no existencia de relación.



SOLUCIONES

1. La resolución de los sistemas puede expresarse de la forma siguiente:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 28 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 - 2F_2 \rightarrow F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 28 \\ 0 & 13 & 78 \end{pmatrix}$$

La segunda matriz proporciona la solución $x=5, y=6$.

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & -1 & 17 \\ -2 & 6 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 3F_1 - F_2 \rightarrow F_3 \\ 2F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 \\ 0 & -14 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{pmatrix}$$

La última matriz proporciona la solución $x=2, y=3, z=4$.

2. Veamos que $P^2 = P$. Para ello,

$$P^2 = P \cdot P = PQ \cdot P = P \cdot QP = PQ = P$$

(1) (2) (3) (4) (5)

Las igualdades anteriores son debidas a:

- (1) la definición de la potencia al cuadrado;
- (2) la hipótesis $PQ = P$;
- (3) la propiedad asociativa del producto;
- (4) la hipótesis $QP = Q$;
- (5) la hipótesis $PQ = P$.

3. La que indica las relaciones existentes en el grafo es:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	1	0
5	0	1	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	1	0	1	0
7	0	0	1	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

PÁGINA 23

ACTIVIDADES

■ Con el fin de que te acostumbres a escribir los protocolos de resolución de los problemas, escribe los protocolos de los siguientes problemas:

- 1. Las edades de la familia.** Una madre de familia, que ronda la cuarentena, observa que, si escribe tres veces seguidas su edad, obtiene un número que es igual al producto de su edad multiplicada por la de su marido y las edades de sus cuatro hijos. ¿Qué edad tiene cada uno de los miembros de la familia?
- 2. Dos números.** Encuentra dos números tales que su suma, su producto y su cociente sean iguales.

SOLUCIONES

- Supongamos que la edad de la madre es de 39 años; imponiendo las condiciones del problema, obtenemos:

$$393939 = 39 \cdot P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \Rightarrow P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 10101$$

$$P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$$

Luego si la madre tiene 39 años, el padre tiene 37 y los cuatro hijos tienen respectivamente, 13, 7, 3 y 1 años.

Observamos que si partimos de que la madre tiene 38 años obtenemos la misma respuesta, e igual que para 37, 36, 35 años. Es decir, independientemente de la edad de la madre, nos salen las edades del padre, 37 años, y las edades de los hijos: 13, 7, 3 y 1 años.

En general la madre tendrá xy años $xy = 10x + y$ años.

$$xyxyxy = xy \cdot P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \Rightarrow \frac{xyxyxy}{xy} = P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4$$

Ahora bien:

$$\frac{xyxyxy}{xy} = \frac{100000x + 10000y + 1000x + 100y + 10xy}{10x + y} =$$

$$= \frac{101010x + 10101y}{10x + y} = \frac{10101(10x + y)}{10x + y} = 10101$$

Descomponemos 10 101 en factores y es: $10101 = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$

Luego las edades serán:

$$\begin{array}{ll} Q = 37 \text{ años} & H_3 = 3 \text{ años} \\ H_1 = 13 \text{ años} & H_4 = 1 \text{ año} \\ H_2 = 7 \text{ años} & \end{array}$$

2. Llamamos x, y a los números. Se debe cumplir que:

$$x + y = x \cdot y = \frac{x}{y}$$

Resolviendo:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = x \cdot y \\ x \cdot y = \frac{x}{y} \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{x}{x-1}$$
$$\left. \begin{array}{l} x + y = x \cdot y \\ x \cdot y = \frac{x}{y} \end{array} \right\} \Rightarrow xy^2 = x \Rightarrow y = \pm 1$$

Luego para $y = +1 \Rightarrow \frac{x}{x-1} = 1$ no tiene solución.

$$\text{Para } y = -1 \Rightarrow \frac{x}{x-1} = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

La solución válida es: $x = \frac{1}{2}; y = -1$

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Calcula a, b, c y d para que se cumpla $2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{pmatrix}$.
- 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:
- a) $A + B$ b) $A - B - C$ c) $3A + 5B - 6C$ d) $AB - BC$ e) $2AB + 3AC - 5BC$
- 3. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula AB y BA .
- 4. Calcula los productos posibles entre las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
- 5. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n , ¿son ciertas, en general, las igualdades siguientes?:
- a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ b) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ c) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
- 6. Obtén las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:
- a) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$
- 7. Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten, respectivamente, con las matrices siguientes:
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
- 8. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, efectúa las siguientes operaciones:
- a) $C \cdot A^t$ b) $A^t \cdot B^t$ c) $2 \cdot C^t \cdot C$ d) $B \cdot A \cdot C^t$
- 9. Descompón en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica las matrices siguientes:
- a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$
- 10. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{97} y B^{59} .
- 11. Calcula A^n , para $n \in \mathbb{N}$, siendo A las siguientes matrices:
- a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



SOLUCIONES

1. Realizando las operaciones indicadas y aplicando la igualdad de matrices, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 & a+b+7 \\ c+d-2 & 3d+4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = a+5 \\ 2b = a+b+7 \\ 2c = c+d-2 \\ 2d = 3d+4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, $a=5$, $b=12$, $c=-6$, $d=-4$.

2. La solución en cada caso queda:

$$a) A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A - B - C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) 3A + 5B - 6C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -19 \end{pmatrix}$$

$$d) AB - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & +2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e) 2AB + 3AC - 5BC = \\ = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & +2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \\ - 5 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -18 & 27 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} -20 & 40 \\ 25 & -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & -39 \\ -49 & 55 \end{pmatrix}$$

3. Los productos quedan:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 8 & 13 & 13 \\ 0 & 20 & 12 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$$

4. Los productos posibles son:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

5. En general, las igualdades anteriores no son ciertas, ya que el producto de matrices no es conmutativo.

$$a) (A + B)^2 = (A + B)(A + B) = AA + AB + BA + BB = \\ = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$b) (A - B)^2 = (A - B)(A - B) = AA - AB - BA + BB = \\ = A^2 - AB - BA + B^2$$

$$c) (A + B)(A - B) = AA - AB + BA - BB = \\ = A^2 - AB + BA - B^2$$

6. Llamamos A y B a las matrices numéricas que aparecen en cada uno de los sistemas. Resolvemos éstos por el método de reducción y obtenemos:

$$a) \begin{cases} 2X + Y = A \\ X - 3Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = A \\ 7Y = A - 2B \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 3/7 A + 1/7 B \\ Y = 1/7 A - 2/7 B \end{cases}$$

$$\text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 & 4/7 \\ -1 & 3/7 & 1/7 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 9/7 & 8/7 & 6/7 \\ 0 & 1/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1/2 A + 1/2 B \\ Y = 1/2 A - 1/2 B \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{cases} 2X + Y = A \\ X + 2Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = A \\ Y = 1/3 A + 2/3 B \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 2/3 A - 1/3 B \\ Y = -1/3 A + 2/3 B \end{cases}$$

$$\text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & -8/3 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 10/3 \end{pmatrix}$$

7. En cada uno de los casos queda:

Operando en la igualdad

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{cases}$$

La solución del sistema es $c=0$, $a=d$ y b cualquiera.

Por tanto, las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con a y b números reales cualesquiera.

De una forma análoga obtenemos que las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ son de la forma $\begin{pmatrix} d-c & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$

8. Las operaciones quedan:

a) $C \cdot A^t = \begin{pmatrix} 7 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 0 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

c) $2 \cdot C^t \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 6 \\ 12 & 6 & 18 \end{pmatrix}$

d) $B \cdot A \cdot C^t = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

9. Toda matriz cuadrada A puede expresarse de la forma $A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$.

En la suma anterior, el sumando $\frac{A+A^t}{2}$ es una matriz simétrica y el sumando $\frac{A-A^t}{2}$ es una matriz antisimétrica.

Las descomposiciones pedidas son:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 3/2 & 7/2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -7/2 \\ 1/2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 9/2 \\ 1/2 & 0 & 5 & 9/2 \\ 0 & 5 & 7 & 9/2 \\ 9/2 & 9/2 & 9/2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 3 & -1/2 \\ -3/2 & 0 & 1 & 5/2 \\ -3 & -1 & 0 & -3/2 \\ 1/2 & -5/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

10. En cada uno de los dos casos queda del siguiente modo:

Calculamos las potencias sucesivas de A y B .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = -I; \text{ etcétera.}$$

Observamos que las potencias de la matriz A se repiten de cuatro en cuatro. Así:

$$A^{97} = A^{4 \cdot 24 + 1} = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = I \cdot A = A$$

Calculando las sucesivas potencias de $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos que:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos continuar y observar que las potencias pares siguen una recurrencia y las impares otra. Es decir:

$$\text{Si } n \text{ es par } B^n = \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} \text{ y si } n \text{ es impar } B^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{\frac{n+1}{2}} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } B^{59} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{30} \\ 2^{29} & 0 \end{pmatrix}$$

11. Quedan del siguiente modo:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

b) Si $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$,

entonces $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2+n/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

■ 12. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

■ 13. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

■ 14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

■ 15. Calcula la matriz $B^{-1}A^2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

■ 16. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

■ 17. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a :

a) $\begin{pmatrix} a-2 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

■ 18. a) Escribe tres matrices de dimensión 3×4 , que tengan, respectivamente, rango 2, 1 y 4. Razona la respuesta.

b) Escribe cuatro matrices de orden 4, que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

■ 19. Si A es una matriz cuadrada de orden n , tal que $A^2 = A$, e I es la matriz unidad de orden n , ¿qué matriz es B^2 , si $B = 2A - I$?

■ 20. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Demuestra que si $A \cdot B = A$ y $B \cdot A^{-1} = B$ entonces $A^2 = A$.

b) Si A es una matriz que conmuta con B y C , ¿es cierto que $(B \cdot C) \cdot A = A \cdot (B \cdot C)$?

■ 21. Contesta las siguientes preguntas:

a) Dada una matriz A , ¿existe otra matriz B tal que el producto AB sea una matriz de una sola fila?

b) Sea A una matriz cuadrada, demuestra que $A + A^t$ es simétrica.

c) Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica.

■ 22. Sean X , Y , Z tres matrices tales que es posible efectuar $Z^t - XY$. ¿Es posible efectuar $(Y \cdot Z)^t + X^t$?

SOLUCIONES

12. Las triangulares equivalentes son:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 - F_2 \rightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ 2F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_3 \rightarrow F_3} \xrightarrow{F_2 - 2F_3 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 3F_1 - F_2 \rightarrow F_2 \\ 4F_1 - F_3 \rightarrow F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 8 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_3} \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 2F_1 - F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \\ 3F_1 - F_4 \rightarrow F_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 - F_3 \rightarrow F_3 \\ 2F_4 - F_2 \rightarrow F_4 \end{matrix}}$$

13. Las inversas quedan del siguiente modo:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & : & 1 & 0 \\ 2 & 0 & : & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & : & 0 & 1 \\ 0 & 1 & : & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & : & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 1 & 0 \\ 3 & 4 & : & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 1 & 0 \\ 0 & 2 & : & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 1 & 0 \\ 0 & 1 & : & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & -2 & 1 \\ 0 & 1 & : & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 1 & 0 \\ 4 & 8 & : & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 1 & 0 \\ 0 & 0 & : & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ No existe matriz inversa}$$

$$d) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & : & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & : & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & : & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & : & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & : & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 0 & 1 & 0 & : & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz inversa de } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ es } \begin{pmatrix} -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/3 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ no tiene inversa.}$$

14. Queda:

$$\text{La matriz } (AB) \text{ es } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz traspuesta de la anterior } (AB)^t \text{ es } \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz inversa de la anterior } (AB)^{-1} \text{ es } \begin{pmatrix} -1/14 & 1/2 \\ 3/14 & -1/2 \end{pmatrix}$$

15. Queda:

$$\text{La matriz } B^{-1} \text{ es } \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz } A^2 \text{ es } \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz } B^{-1}A^2 \text{ es } \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -45 \\ -27 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz } B^{-1}A^2B \text{ es } \begin{pmatrix} 36 & -45 \\ -27 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

16. Realizamos operaciones elementales en las filas de las matrices, obteniendo matrices equivalentes.

$$a) \text{ Rango de } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Rango de } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

$$b) \text{ Rango de } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \text{Rango de } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Rango de } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$c) \text{ Rango de } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rango de } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$d) \text{ Rango de } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Rango de } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 5 & 15 & 23 & 18 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Rango de } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

17. Queda del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{a) Rango de } \begin{pmatrix} a-2 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= \text{Rango de } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a-2 & a+2 \end{pmatrix} = \\ &= \text{Rango de } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a-6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $a = 6$ el rango es 1 y si $a \neq 6$ el rango es 2.

$$\begin{aligned} \text{b) Rango de } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} &= \text{Rango de } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & a-4 \end{pmatrix} = \\ &= \text{Rango de } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $a = 4$, el rango es 2 y si $a \neq 4$, el rango es 3.

$$\begin{aligned} \text{c) Rango de } \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} &= \text{Rango de } \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 2a & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \text{Rango de } \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \end{pmatrix} = \\ &= \text{Rango de } \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Si $a = 1$, el rango es 1.
- Si $a = -2$, el rango es 2.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, el rango es 3.

18. Quedan:

a) Las matrices de dimensión 3×4 ,

- con rango 2 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$
- con rango 1 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
- con rango 4 no es posible construirla.

b) Como en el apartado anterior, admite múltiples respuestas. Un ejemplo podría ser:

- con rango 1: $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \\ 10 & -10 & 20 & -30 \end{pmatrix}$

- con rango 2: $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$

- con rango 3: $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

- con rango 4: $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

19. La solución queda:

Se tiene que:

$$B^2 = B \cdot B = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A \cdot A - 2A \cdot I - 2A \cdot I + I^2 = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4A - 4A + I = I$$

Por tanto la matriz B^2 es la matriz unidad. Las matrices como B se denominan idempotentes.

20. Quedan:

a) Se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{array}{ccccccccc} A^2 = A \cdot A & = & (A \cdot B) \cdot A & = & A \cdot (B \cdot A^{-1}) & A & = & A \cdot B \cdot A^{-1} \cdot A & = & AB = A \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{array}$$

ya que:

- (1) Es la definición de potencia cuadrado de una matriz.
- (2) Por la hipótesis $A \cdot B = A$.
- (3) Por la hipótesis $BA^{-1} = B$.
- (4) Por la propiedad asociativa del producto.
- (5) Al ser $A \cdot A^{-1} = I$.
- (6) Por la hipótesis $AB = A$.

b) Se cumple:

$$\begin{array}{ccccccccc} (B \cdot C) \cdot A & = & B \cdot (C \cdot A) & = & B \cdot (A \cdot C) & = & (B \cdot A) \cdot C & = & (A \cdot B) \cdot C & = & A \cdot (B \cdot C) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{array}$$

al ser:

- (1); (3) y (5) Por la propiedad asociativa del producto de matrices.
- (2) Las matrices A y C conmutan.
- (3) Las matrices A y B conmutan.

21. Las respuestas quedan:

- a) En el caso de que la matriz A tenga una dimensión $m \times n$, con $m \neq 1$, es imposible encontrar la matriz B cumpliendo las condiciones pedidas. En el caso de que la matriz A tenga dimensión $1 \times n$, la matriz B tendrá dimensión $n \times m$ y la matriz resultante será la matriz fila $1 \times m$.
- b) $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A$ por tanto la matriz $(A + A^t)$ es simétrica pues coincide con su traspuesta.
- c) Una matriz A es antisimétrica si $A^t = -A$.

Veamos cómo son las potencias sucesivas:

$$(A^2)^t = (A \cdot A)^t = A^t \cdot A^t = (-A) \cdot (-A) = A^2, \text{ luego } A^2 \text{ es simétrica.}$$

$$(A^3)^t = (A^2 \cdot A)^t = A^t \cdot (A^2)^t = (-A) \cdot A^2 = -A^3, \text{ luego } A^3 \text{ es antisimétrica.}$$

Por tanto, las potencias pares son matrices simétricas y las potencias impares son antisimétricas.

22. Sean X , Z , Y tres matrices de dimensiones $m \times n$, $p \times q$ y $r \times s$, respectivamente.

Si es posible calcular XZ tiene que cumplirse que $n=p$ y la dimensión del producto es $m \times q$.

La dimensión de Y^t , $s \times r$, debe coincidir con la de XZ , es decir, con $m \times q$; lo que implica que $s=m$ y $q=r$.

Con las condiciones anteriores, las dimensiones de las matrices anteriores son $m \times n$ para X , $q \times m$ para Y y $n \times q$ para Z .

Es posible calcular $ZY - X^t$ ya que se puede efectuar el producto ZY resultando de dimensión $n \times m$, dimensión que coincide con la de la matriz traspuesta de X .

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

■ 23. Halla las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

■ 24. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula.

■ 25. Obtén la matriz inversa de $A + A^t$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

■ 26. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, construye la matriz $Y = 3A^tA - 2I$, y resuelve la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■ 27. Prueba que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{-1} utilizando la igualdad anterior o de cualquier otra forma.

■ 28. Sean las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si M es una matriz de la forma $M = aI + bJ$, siendo a y b números reales, se pide:

a) Calcula M^2 y M^3 .

b) Calcula M^n , siendo n un número natural.

■ 29. La matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es distinta de la matriz nula. ¿Es inversible? En caso afirmativo, halla M^{-1} .

■ 30. Si A y B son dos matrices diagonales de orden 2, demuestra que $A \cdot B = B \cdot A$. Halla todas las matrices diagonales A tales que $A \cdot A = I$.

■ 31. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^{-1} = A^t$.

b) Utilizando el resultado anterior calcula $(A^t \cdot A)^{1999}$.

■ 32. Estudia según los valores de m el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix}$.

■ 33. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de x la matriz A posee inversa?

b) Encuentra la matriz inversa de A para $x = -1$.

c) ¿Qué dimensiones debe tener una matriz X para que la ecuación $A \cdot X = B \cdot C$ tenga sentido? Halla esta matriz para $x = 1$.



SOLUCIONES

23. La solución es:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b(a+d) \\ b(a+d) & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b(a+d) = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases}$$

Los casos posibles son:

1. $b=0$, entonces $a=0$ ó $a=1$, y $d=0$ ó $d=1$. Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $a=1-d$, entonces $b=\pm\sqrt{d-d^2}$ con $d\in[0,1]$. Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 1-d & \pm\sqrt{d-d^2} \\ \pm\sqrt{d-d^2} & d \end{pmatrix} \text{ con } d\in[0,1]$$

24. Queda del siguiente modo:

$$\text{La matriz } A - kI \text{ es } A - kI = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

La matriz $(A - kI)^2$ es

$$\begin{aligned} (A - kI)(A - kI) &= \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ -2k+2 & -2k+2 & 5-6k+k^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El valor que hace que la última matriz sea la matriz nula es $k=1$.

25. Queda:

La matriz $A + A^t$ es

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz } (A + A^t)^{-1} \text{ es } \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

26. Queda del siguiente modo:

La matriz $Y = 3A^tA - 2I$ es

$$Y = 3 \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 & 39 \\ 39 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 100 & 39 \\ 39 & 13 \end{pmatrix}$$

Para resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, llamamos a

$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, operamos y resolvemos el sistema correspondiente.

$$\text{El sistema es } \begin{cases} 3a_{11} + a_{21} = 2 \\ 5a_{11} + 2a_{21} = 0 \\ 3a_{12} + a_{22} = 0 \\ 5a_{12} + 2a_{22} = 1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $a_{11} = 4$, $a_{21} = -10$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = 3$

La matriz X es: $X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$.

27. Queda:

Calculamos $A^2 - A - 2I$, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la expresión $A^2 - A - 2I = 0$, operando se obtiene:

$$A^2 - A - 2I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} A - I = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} A = I \Leftrightarrow A \left(\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} I \right) = I$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$.

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

28. La solución es:

La matriz $M = aI + bJ$ adopta la expresión $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$,

a) La potencias cuadrada y cúbica de M son:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

b) Para encontrar la expresión de M^n con n natural, calculamos nuevas potencias.

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4 \cdot M = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4b \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, M^n con n natural tiene la expresión siguiente:

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

La demostración de esta última proposición puede efectuarse por el método de inducción.

29. Calculamos la posible matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, obteniendo:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{array} \right) &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & b & a \end{array} \right) &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{-ab}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array} \right) &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

La matriz M siempre es invertible, ya que a y b no pueden ser 0 simultáneamente entonces $a^2 + b^2 \neq 0$.

La matriz inversa de M es:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{-b}{a^2 + b^2} \\ \frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$$

30. Queda:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$. Los productos de ambas son:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = BA \end{aligned}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ una matriz diagonal cualquiera. La

condición $A \cdot A = I$ nos conduce al sistema:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 = 1 \\ a_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \pm 1 \\ a_2 = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Las matrices diagonales buscadas son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

31. La solución queda:

- a) Calculamos A^{-1} mediante el procedimiento de Gauss-Jordan. Para ello intercambiamos las filas primera y segunda y, posteriormente la segunda y la tercera para obtener:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Teniendo en cuenta que $A^t = A^{-1}$ siguiendo la definición de matriz inversa obtenemos la siguiente expresión $A^t \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A^t = I$ y $(A^t \cdot A)^{1999} = (A^{-1} \cdot A)^{1999} = I^{1999} = I$.

32. La solución queda:

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $m=0$ el rango es 2 y para todos los demás valores de m el rango es 3.

33. En cada uno de los casos queda:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 4x - 2 - x^2$$

La matriz A tiene inversa para todos los valores de x excepto aquellos que anulen el determinante de A , es decir, $\exists A^{-1} \quad \forall x \neq -2 \pm \sqrt{2}$

$$\text{b) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) La matriz X ha de ser de dimensión 3×2 . Despejando obtenemos: $X = A^{-1} \cdot B \cdot C$

$$\text{Calculando la matriz } A^{-1} \text{ para } x=1 \text{ y sustituyendo obtenemos: } X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Unidad 2 – Determinantes

PÁGINA 33

cuestiones iniciales

1. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES

1. Las matrices buscadas son las siguientes:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

2. Haciendo ceros escalonamos las matrices, obteniendo:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ luego el rango es 2.}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ luego el rango es 2.}$$

$$c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 2F_3 - F_2 \rightarrow F_3 \\ 2F_4 - F_2 \rightarrow F_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 3.

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \\ F_4 - F_1 \rightarrow F_4 \\ F_5 - 3F_1 \rightarrow F_5 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_5 - F_2 \rightarrow F_5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 4.

PÁGINA 47

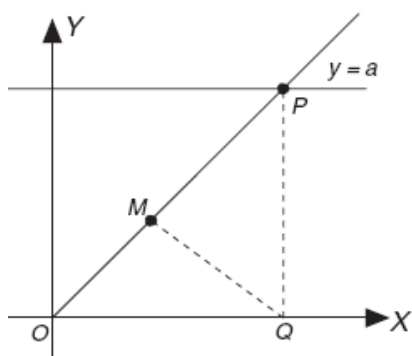
ACTIVIDADES

■ Practica las fases anteriores en la resolución de los siguientes problemas:

- Lugar geométrico.** Sobre la recta $y = a$ se considera un punto variable P . Llamamos Q a la proyección del punto P sobre el eje OX . Determina el lugar geométrico del punto M proyección de Q sobre la recta OP .
- Pirámides de bolas.** Un mago apila bolas, todas iguales, para formar dos pirámides tetraédricas. De pronto se da cuenta de que juntando las bolas de ambas pirámides, puede formar una sola pirámide tetraédrica mayor. ¿Cuál es el mínimo número de bolas de las que tendría que disponer el mago inicialmente?

SOLUCIONES

- La solución queda:



La recta OP es: $y = mx \Rightarrow$ el punto P es $P\left(\frac{a}{m}, a\right)$.

Luego el punto Q es $Q\left(\frac{a}{m}, 0\right)$ y el punto M es el punto de intersección de la recta $OP \equiv y = mx$, y la recta perpendicular a ésta pasando por Q , que quedaría $m^2y + mx = a$, por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} y = mx \\ m^2y + mx = a \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{a}{m^3 + m} \quad y = \frac{am}{m^3 + m}$$

Eliminando el parámetro m , obtenemos la ecuación del lugar geométrico: $y^3 + x^2y - ax^3 = 0$

- Al construir pirámides tetraédricas de bolas aparecen los números tetraédricos:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ...

que forman una progresión geométrica de tercer orden de término general: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

- Si las dos pirámides son iguales, el mínimo número es 20 bolas, con lo que formaría una pirámide tetraédrica de arista 4 a partir de dos tetraédricas de arista 3.

- Si las pirámides iniciales no son iguales, el número mínimo de bolas es de 680, número obtenido al sumar las bolas de dos pirámides tetraédricas de aristas 8 y 14, y bolas 120 y 560.

La nueva pirámide tetraédrica formada por 680 bolas tiene de arista 15, pues:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 680 \Rightarrow n = 15$$

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1-a^2 & a-1 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$

- 2. Calcula los determinantes de las matrices que siguen, utilizando la regla de Sarrus:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} m+1 & 1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$

- 3. Encuentra el número de inversiones que existen en las siguientes permutaciones de números naturales del orden que se indica:

a) orden 4: 1243, 3142 y 1324. b) orden 5: 13542, 53241 y 13254. c) orden 6: 213654, 341652 y 231645.

- 4. Halla el signo de los términos que siguen, pertenecientes al desarrollo de un determinante de orden 5:

a) $a_{25} \cdot a_{51} \cdot a_{44} \cdot a_{13} \cdot a_{32}$ b) $a_{51} \cdot a_{22} \cdot a_{35} \cdot a_{43} \cdot a_{14}$

- 5. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

- 6. Sea A una matriz cuyas filas son F_1, F_2, F_3 , y su determinante vale 4. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz B cuyas filas son $F_3, F_1 - 2F_2, -F_1$?

- 7. Prueba, sin desarrollar, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} bc & \frac{2}{a} & a \\ ac & \frac{2}{b} & b \\ ab & \frac{2}{c} & c \end{pmatrix}$

- 8. Prueba, sin desarrollar, que los determinantes siguientes son múltiplos de 11:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 18 \\ 2 & 2 & 13 \\ 1 & 5 & 19 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

- 9. Comprueba que el determinante A_1 vale 0 y que el determinante A_2 es divisible por 5, sin calcularlos, a partir de las propiedades de los determinantes, siendo:

$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ $A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$



SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

- a) -2
- b) 22
- c) $a^2 + 25$
- d) 23
- e) $a^2 + b^2$;
- f) 0
- g) $2 - 2a^2$

2. Aplicando la regla de Sarrus se obtiene:

- a) -2
- b) 2
- c) 79
- d) $a^3 - 3a + 2$
- e) $-m^2 - 4m + 1$
- f) $m^3 + 3m^2 + 3m + 2$

3. Queda del siguiente modo:

- a) La permutación 1243 tiene una inversión.
La permutación 3142 tiene 3 inversiones.
La permutación 1324 tiene una inversión.
- b) La permutación 13542 presenta 4 inversiones.
La permutación 53241 tiene 8 inversiones.
La permutación 13254 tiene 2 inversiones.
- c) La permutación 213654 presenta 4 inversiones.
La permutación 341652 tiene 7 inversiones.
La permutación 231645 tiene 4 inversiones.

4. Decimos que:

- a) El término $a_{25} a_{51} a_{44} a_{13} a_{32}$ es el mismo que $a_{13} a_{25} a_{32} a_{44} a_{51}$, que se corresponde con la permutación de orden 5: 35 241. Ésta tiene siete inversiones, por lo que es una permutación impar. El término anterior le corresponde un signo menos.
- b) De forma análoga al caso anterior, la permutación es 42 531, que posee siete inversiones y también le corresponde un signo menos.

5. En cada caso:

$$a) \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 \cdot 3/2 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$c) \begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

6. La solución queda:

$$\begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 - 2F_2 \\ -F_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ -2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2|A| = -8$$

7. Queda del siguiente modo:

a) Sumamos la segunda y la tercera columna y el resultado lo colocamos en la tercera columna. De la tercera columna sacamos factor común $a+b+c$. Quedaría:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales, por tanto es nulo.

b) Sumamos la segunda y la tercera columna y el resultado lo colocamos en la segunda columna. De la primera sacamos factor común a y de la tercera a $d+b+c$. Quedaría:

$$\begin{vmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c+d & b \\ a & b+c+d & c \\ a & b+c+d & d \end{vmatrix} = a(d+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & d \end{vmatrix} = 0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales, por tanto es nulo.

- c) Multiplicamos (y dividimos) la primera fila por a , la segunda por b y la tercera por c . Sacamos factor común a abc de la primera columna y 2 de la segunda.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} bc & 2/a & a \\ ac & 2/b & b \\ ab & 2/c & c \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & 2 & a^2 \\ abc & 2 & b^2 \\ abc & 2 & c^2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & b^2 \\ 1 & 1 & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales, por tanto es nulo.

8. En cada caso queda:

- a) Puede observarse que los números 121, 198 y 506 son múltiplos de 11. Operando en cada fila, multiplicamos la primera columna por 100, la segunda por 10 y sumamos ambos resultados en la tercera columna. Quedaría:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \cdot 11 \\ 1 & 9 & 11 \cdot 18 \\ 5 & 0 & 11 \cdot 46 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix}$$

- b) Procediendo de forma análoga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1221 & 9625 & 1111 & 3839 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 11 \cdot 111 & 11 \cdot 875 & 11 \cdot 101 & 11 \cdot 349 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 111 & 875 & 101 & 349 \end{vmatrix}$$

- c) Procediendo de forma análoga:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 3014 \\ 9 & 7 & 2 & 9724 \\ 2 & 3 & 5 & 2354 \\ 4 & 0 & 5 & 4059 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \cdot 274 \\ 9 & 7 & 2 & 11 \cdot 884 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \cdot 214 \\ 4 & 0 & 5 & 11 \cdot 369 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 274 \\ 9 & 7 & 2 & 884 \\ 2 & 3 & 5 & 214 \\ 4 & 0 & 5 & 369 \end{vmatrix}$$

9. En cada uno de los casos queda:

En el caso de A_1 , multiplicamos y dividimos la primera columna por -5, después sacamos factor común a $\frac{1}{5}$ y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 \cdot \frac{(-5)}{(-5)} & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} \cdot \frac{(-5)}{(-5)} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 40 & 25 & 40 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

El último determinante es nulo al tener dos columnas iguales.

En el caso de A_2 , multiplicamos la segunda columna por 2 y le sumamos la tercera colocando el resultado en la tercera columna. Podemos sacar factor común a 5.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 20 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \cdot 1 \\ 4 & 7 & 5 \cdot 4 \\ 6 & 3 & 5 \cdot 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

■ 10. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Halla los menores complementarios α_{11} , α_{23} , α_{32} y α_{21} , si existen.
 b) Halla, si existen, los adjuntos de los elementos que ocupan los lugares 11, 23, 32 y 21.
 c) Halla las matrices adjuntas de las matrices dadas.

■ 11. Calcula los siguientes determinantes: a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

- 12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0$

- 13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- 14. Determina, según los valores de m , el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & m \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & m \end{pmatrix}$

- 15. Si A es una matriz de orden 3 y tal que $\det(A) = 2$, calcula:

a) $\det(M A M^{-1})$ b) $\det(5A)$ c) $\det(2A^{-1})$ d) $\det(\text{Adj}(A))$

■ 16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: a) Calcula A^{-1} . b) Resuelve la ecuación $\det(A^{-1} - xI) = 0$.

■ 17. ¿Para qué valores del parámetro no es invertible la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$?

- 18. Resuelve las siguientes cuestiones:

- a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A .
 b) La matriz A verifica $AA^t = I$. Halla $\det(A)$.
 c) Dos matrices A y B son inversas la una de la otra. Si $\det(A) = 3$, ¿cuánto vale $\det(B)$?

SOLUCIONES

10. La solución en cada caso es:

a) En la matriz A: $\alpha_{11} = 5$; α_{23} y α_{32} no existen ; $\alpha_{21} = 2$

En la matriz B : $\alpha_{11} = -20$; $\alpha_{23} = -10$; $\alpha_{32} = -8$; $\alpha_{21} = 8$

En la matriz C : $\alpha_{11} = 2$; $\alpha_{23} = 2$; $\alpha_{32} = 6$; $\alpha_{21} = -6$

b) En la matriz A : $A_{11} = 5$; A_{23} y A_{32} no existen ; $A_{21} = -2$

En la matriz B : $B_{11} = -20$; $B_{23} = 10$; $B_{32} = 8$; $B_{21} = -8$

En la matriz C : $C_{11} = 2$; $C_{23} = -2$; $C_{32} = -6$; $C_{21} = 6$

c) Las matrices adjuntas son:

$$A^d = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad B^d = \begin{pmatrix} -20 & -7 & 25 \\ -8 & -11 & 10 \\ 17 & 8 & -11 \end{pmatrix} \quad C^d = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & -10 \\ 6 & -2 & -2 & -2 \\ -10 & -6 & -6 & 8 \\ 7 & 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

11. Las soluciones son:

a) Haciendo ceros en la primera columna se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 15 & -13 & 24 \\ 0 & 1 & -10 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & -13 & 24 \\ 1 & -10 & 7 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -295$$

b) Haciendo ceros en la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1+x & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^4$$

12. las soluciones son las siguientes:

$$a) 0 = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1-x \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ 0 & x & 1-x \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ x-1 & -2 & 1 \\ 0 & x & 1-x \end{vmatrix} = x^4 - x^3 + x - 1$$

$x^4 - x^3 + x - 1 = 0$. Las soluciones son $x = -1$ y $x = 1$.

$$b) 0 = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = x^4 - 1$$

Las soluciones de la ecuación $x^4 - 1 = 0$ son los números complejos $1, -1, i, -i$.

$$c) 0 = \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x-1 & x & x & x \\ 3x-1 & -1 & x & x \\ 3x-1 & x & -1 & x \\ 3x-1 & x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x-1 & x & x & x \\ 0 & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (3x-1)(x+1)^3$$

Las soluciones de $(3x-1)(x+1)^3 = 0$ son $x = 1/3$ y $x = -1$.

$$\begin{aligned} d) 0 &= \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & c & b \\ x+a+b+c & c & x & a \\ x+a+b+c & b & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ 0 & a-x & b-c & c-b \\ 0 & a-c & b-x & c-a \\ 0 & a-b & b-a & c-x \end{vmatrix} = \\ &= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} a-x & b-c & c-b \\ a-c & b-x & c-a \\ a-b & b-a & c-x \end{vmatrix} = (x+a+b+c) \begin{vmatrix} a-x & a+b-c-x & a+c-b-x \\ a-c & a+b-c-x & 0 \\ a-b & 0 & a+c-b-x \end{vmatrix} = \\ &= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} c-x & 0 & a+c-b-x \\ a-c & a+b-c-x & 0 \\ a-b & 0 & a+c-b-x \end{vmatrix} = \\ &= (x+a+b+c)(a+b-c-x)(a+c-b-x)(b+c-a-x) \end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación son:

$$x = -a - b - c$$

$$x = a + b - c$$

$$x = a - b + c$$

$$x = -a + b + c$$

13. Las matrices inversas son las siguientes:

a) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

c) La matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene inversa si $ad - bc$ es distinto de cero. En este caso la matriz buscada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

d) $\begin{pmatrix} 10/130 & 20/130 & 6/130 \\ -10/130 & -20/130 & 20/130 \\ 25/130 & -15/130 & 2/130 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

14. El rango según el parámetro queda del siguiente modo:

- a) Si $m = -6$ el rango es dos y si $m \neq -6$, el rango es tres.
- b) Si $m = 1$, el rango es uno.
Si $m = -2$, el rango es dos.
Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, el rango es tres.
- c) Si $m = 3$, el rango es tres.
Si $m \neq 3$, el rango es cuatro.
- d) Si $m = 10$, el rango es tres.
Si $m \neq 10$, el rango es cuatro.

15. Los determinantes pedidos son:

- $\det(MAM^{-1}) = \det M \cdot \det A \cdot \det(M^{-1}) = \det M \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det M} = \det A = 2$
- $\det(5A) = 5^n \cdot \det(A) = 5^n \cdot 2.$
- $\det(2A^{-1}) = 2^n \det(A^{-1}) = 2^n \cdot \frac{1}{\det A} = 2^n \cdot \frac{1}{2} = 2^{n-1}$
- $\det(A^d) = [\det(A)]^2 = 4$

16. En cada caso queda:

a) El determinante de la matriz A es $\det(A) = -1$. La matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) La ecuación es $\begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$.

Desarrollando el determinante obtenemos $(1+x)(1+x^2)=0$.

Las soluciones de la ecuación son $x=-1$ y los números complejos i y $-i$.

17. Al ser $\det(A) = -19a+57$, este determinante se anula para $a=3$. Para este valor de a la matriz A no es invertible.

18. En cada caso queda del siguiente modo:

a) Utilizando la propiedad $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, se tiene: $\det(A^2) = [\det(A)]^2$. Por tanto, $\det(A^2) - [\det(A)]^2 = 0 \Rightarrow \det(A) - [\det(A)]^2 = 0 \Rightarrow \det(A)(1 - [\det(A)]) = 0$. Luego ocurre lo siguiente: $\det(A) = 0$ ó $\det(A) = 1$.

b) Teniendo en cuenta las propiedades $\det(A) = \det(A^t)$ y $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, se obtiene: $\det(A \cdot A^t) = \det(I) \Rightarrow \det(A)^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$.

c) $A \cdot B = I \Rightarrow \det(B) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{3}$

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

■ 19. Calcula el valor de los determinantes siguientes:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} & \text{e)} \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \end{array}$$

■ 20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 & \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = 0 & \text{c)} \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

■ 21. El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.

■ 22. Halla el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a^2 - 1 & a \\ 1 & 2a^2 - 2 & 2a - 1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ según sea el valor del parámetro a . Halla, si existe, la matriz inversa de A en los casos en que $a = 0$ y $a = 1$.

■ 23. Responde a las siguientes cuestiones:

- Si A es una matriz cuadrada de orden n , A^t su traspuesta y A^{-1} su inversa, ¿qué relaciones tienen los determinantes $|A|$, $|A^t|$ y $|A^{-1}|$? ¿Por qué?
- Si el determinante de una matriz cuadrada de orden n vale D , ¿cuál es el valor del determinante de la matriz que se obtiene multiplicando por 5 todos los elementos de la anterior?
- Si X es una matriz cuadrada de orden 3 que verifica la igualdad $X^2 = 2X$, ¿cuánto vale el determinante de X ?

■ 24. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$, averigua para qué valores del parámetro m existe A^{-1} . Calcula A^{-1} para $m = 1$.

■ 25. Resuelve la ecuación matricial $B(2A + I) = AXA + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

■ 26. Una matriz cuadrada A tiene la propiedad de que $A^2 = 2A + I$, donde I es la matriz unidad. Demuestra que A admite inversa y obtén esta inversa en función de A .



SOLUCIONES

19. La solución en cada caso es:

$$a) \begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} ab^2c \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -b & 2b & -b \\ bc & -bc & 3bc \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} ab^2c \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -b & b & 0 \\ bc & 0 & 2bc \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} 2a^2b^4c^2$$

- (1) Hemos sacado factor común a de la tercera columna, b de la segunda y bc de la primera.
- (2) La suma de la primera y segunda columna a la segunda. La diferencia de la primera y la tercera columna a la tercera.
- (3) Desarrollando por la diagonal principal.

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} -2$$

- (1) La diferencia de las dos primeras filas a la segunda fila.
- (2) Desarrollando por la primera columna.
- (3) Utilizando la regla de Sarrus.

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ al tener dos columnas iguales.}$$

$$d) \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ 0 & -b & 0 & b \\ 0 & c-b & -c & a \\ 0 & 0 & a-c & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} -b & 0 & b \\ c-b & -c & a \\ 0 & a-c & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ a+c-b & -c & a \\ 0 & a-c & 0 \end{vmatrix} = b(a+b+c) \begin{vmatrix} a+b-c & -c \\ 0 & a-c \end{vmatrix} = b(a-c)(a+b+c)(a+b-c)$$

$$e) \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+a & 1 & 1 & 1 \\ 4+a & 1+a & 1 & 1 \\ 4+a & 1 & 1+a & 1 \\ 4+a & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3(4+a)$$

20. Las ecuaciones quedan:

a) Desarrollando el determinante obtenemos: $2x^2 + 16x - 12 = 0$. Las soluciones son las siguientes: $x = -4 \pm \sqrt{22}$.

$$b) \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & -2x-2 & 1 & -3 \\ 0 & -3x+4 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x-2 & 1 & -3 \\ -3x+4 & 6 & -9 \\ 1 & x & -4 \end{vmatrix} = -9x^2 - 6x + 73$$

Las soluciones de $9x^2 - 6x - 73 = 0$ son

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{74}}{3}$$

es decir, $x = 3,20$ y $x = -2,53$.

$$c) \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 0 & 3-x & x & x \\ 0 & 0 & 3-x & x \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} (3x+3)(3-x)^3$$

- (1) Sumando todas las columnas y el resultado a la primera.
- (2) Restando de todas las filas la primera.
- (3) Desarrollando.

21. La solución del ejercicio queda:

Sustituyendo $a=3$ obtenemos el determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 13 \\ 8 & 27 & 35 \end{vmatrix}$

El valor del determinante es cero ya que la tercera columna es suma de la primera y la segunda.

22. El valor del determinante de la matriz es $\det(A) = (a-1)^2 \cdot (a+1)^2$. Esta expresión nos permite realizar el siguiente estudio:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$, el rango de A es 3.
- Si $a = -1$, el rango de A es 2.
- Si $a = 1$, el rango de A es 1.

Respecto a la matriz inversa de A , en el caso de $a=1$ no existe, y en el caso de $a=0$, la

inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ queda del siguiente modo: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

23. Las respuestas son:

- $|A^t| = |A|$, ya que según la definición de determinante, los términos del desarrollo del determinante pueden ordenarse de igual forma atendiendo a las filas o a las columnas. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ ya que al ser $A \cdot A^{-1} = I$, tomando determinantes se obtiene la relación anterior.
- El valor es $5^n \cdot D$. De hecho es debido a la propiedad que dice: si los elementos de una fila (columna) de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.
- Podemos escribir la igualdad de la forma $X^2 = 2X$. Tomando determinantes en ambos miembros de la igualdad obtenemos: $\det(X^2) = \det(2X)$ y aplicando las propiedades de los determinantes tenemos que $[\det(X)]^2 = 4 \cdot \det(X)$ de donde $\det(X) = 0$ ó $\det(X) = 4$.

24. La solución es:

El determinante de la matriz A es $\det(A) = m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2)$. La matriz inversa existe para todos los valores de m distintos de -1 y 2 .

Para caso de $m=1$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y su inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$

25. La solución es la siguiente:

Operando en la ecuación matricial aplicando las propiedades de la matriz inversa, de este modo obtenemos: $2BA + B = AXA + B \Rightarrow 2BA = AXA \Rightarrow 2B = AX \Rightarrow 2A^{-1}B = X$

Hallamos la matriz A^{-1} y calculamos la matriz X .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{y finalmente} \quad X = 2A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 14 \\ -6 & -18 & 32 \\ 4 & 14 & -26 \end{pmatrix}$$

26. La solución dice así:

Podemos expresar la igualdad de la forma $A^2 - 2A = I \Rightarrow A(A - 2I) = I$ de donde se deduce que la matriz inversa de A es $(A - 2I)$.

Tomando determinantes en la igualdad anterior $\det[A(A - 2I)] = \det(I)$ de donde se extrae que $\det(A) \cdot \det(A - 2I) = 1$, por tanto $\det(A) \neq 0$, es decir, que existe la inversa de A que hemos hallado anteriormente.

Unidad 3 – Sistemas de ecuaciones lineales

PÁGINA 57

cuestiones iniciales

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 5y = 23 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ x + 3y + 6z + 10t = 0 \\ x + 4y + 10z + 20t = 0 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases} & \end{array}$$

2. Estudia y resuelve, cuando sea posible, los sistemas de ecuaciones siguientes, según los valores del parámetro m :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m^2 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + my + z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \end{array}$$

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

- a) La solución es $x = 4, y = 3$.
- b) La solución es $x = 2, y = -2, z = 3$.
- c) La solución es $x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$.

2. La discusión en cada caso queda del siguiente modo:

- a) • Si $m = -1$, el sistema es incompatible.
- Si $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x = 1 - t, y = t$ con $t \in \mathbb{R}$.
- Si $m \notin \{-1, 1\}$, el sistema es compatible determinado.

Su solución es $x = \frac{-m}{m+1}, y = \frac{m^2 + m + 1}{m+1}$

- b) • Si $m = -2$, el sistema es incompatible.
• Si $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = 1 - t - s, \quad y = t, \quad z = s \text{ con } t, s \in \mathbb{R}.$$

- Si $m \notin \{-2, 1\}$ el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = -\frac{m+1}{m+2}, \quad y = \frac{1}{m+2}, \quad z = \frac{(m+1)^2}{(m+2)}$$

- c) • Si $m = 1$, el sistema es incompatible.
• Si $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{1-m}, \quad z = \frac{4m-3}{m-1}$$

PÁGINA 71

ACTIVIDADES

■ Encuentra el lenguaje y la notación adecuados en la resolución de los problemas siguientes:

- 1. Pesada difícil.** Cuatro amigos, Arturo, Berta, Carlos y Diana, encuentran una antigua báscula que sólo pesa objetos de entre 50 y 100 kg. Estos amigos, individualmente, pesan menos de 50 kg y tres juntos, más de 100 kg, por lo que deciden pesarse de dos en dos de la siguiente manera: Arturo y Berta, 69 kg; Berta y Carlos, 79 kg; Carlos y Diana, 74 kg; Diana y Arturo, 64 kg. Con estos datos, ¿se puede determinar el peso de cada uno? Si no fuera posible determinar los pesos individualmente, ¿qué parejas deben pesarse para encontrar la solución?
- 2. Curiosa elección.** En una clase hacen la elección de delegados de una forma muy original. Se piden tres alumnos voluntarios, que resultan ser Ana, Luis y Clara. Se les venda los ojos a cada uno de ellos y se les coloca en la cabeza una cinta, como la que llevan algunos tenistas. Estas tres cintas se toman de una bolsa que contiene tres cintas rojas y dos amarillas. Se les retira la venda de los ojos y de esta forma cada uno puede ver las cintas de sus compañeros, pero no la suya propia. Será elegido quien acierte el color de la cinta que lleva. Primero se pregunta a Ana y responde que no puede saberlo; lo mismo sucede con Luis. Por último, Clara dice que su cinta es roja, por lo que resulta ser elegida delegada. ¿Cómo lo supo?
- 3. Suma de cubos.** ¿Cuánto suman los cubos de los n primeros números naturales?

SOLUCIONES

- La solución queda:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Arturo} + \text{Berta} = 69 \\ \text{Berta} + \text{Carlos} = 79 \\ \text{Carlos} + \text{Diana} = 74 \\ \text{Diana} + \text{Arturo} = 64 \end{array} \right\}$$

Restando la primera igualdad a la segunda obtenemos: $\text{Arturo} - \text{Carlos} = -10$

Sumando a ésta la tercera obtenemos: $\text{Arturo} - \text{Diana} = 64$

Esta igualdad es la misma que tenemos en cuarto lugar. Luego no es posible determinar el peso de cada uno ya que nos queda un sistema indeterminado con más incógnitas que ecuaciones.

El sistema tiene una única solución si reemplazamos la tercera igualdad, sustituyéndola por la expresión: $\text{Arturo} + \text{Carlos} = 74 \text{ Kg}$ con lo cual obtenemos que: Arturo pesa 32 Kg; Berta pesa 37 Kg; Carlos pesa 42 Kg y Diana pesa 32 Kg.

- En la siguiente tabla podemos ver todas las situaciones que se pueden plantear:

ANA	LUIS	CLARA	
R	R	R	(1)
R	R	A	(2)
R	A	R	(3)
A	R	R	(4)
R	A	A	(5)
A	R	A	(6)
A	A	R	(7)

En todos los casos lleva cinta roja excepto en (2), (5) y (6).

(2) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera sabido que su cinta era roja, ya que si hubiera sido amarilla Ana hubiera sabido el color de la suya.

(5) no es posible pues en esta situación ana hubiese dicho que su cinta era roja.

(6) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera dicho que su cinta era roja. Por tanto en todos los demás casos la de Clara es roja.

3. Queda así:

$$1^3 = 1 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2$$

1, 3, 6, 10, 15, ... Es una progresión aritmética de 2º orden y su término general es $\frac{n^2+n}{2}$, por tanto:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n^2 + n}{2} \right)^2$$

Vamos a probarlo por inducción:

Suponemos que es cierto para $n=1$, $n=2$, ..., $n=n$ y veamos si es cierto para $n=n+1$.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n^2 + n}{2} \right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)^2 + n+1}{2} \right]^2$$

Restando $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)^2 + n+1}{2} \right]^2 - \left(\frac{n^2 + n}{2} \right)^2$$

Habría que ver si esa igualdad es cierta. Operando el segundo miembro:

$$(n+1)^3 = \frac{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4}$$

Es cierta esta igualdad.

Por tanto queda probado que para «n» se cumple:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n^2 + n}{2} \right)^2$$

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Resuelve los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} 7x - 2y = 12 \\ x - 2 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 7 \\ x - 5y = 5 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \\ 10x - 5y = 15 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 3x + 4y + z = 7 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3x + y + 2z = 3 \\ -y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

- 2. Dado el sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$:

- a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.
b) Añade una ecuación para que el sistema tenga infinitas soluciones.

- 3. Discute y resuelve, según los valores de a , los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + ay = ax \\ 2x - ay = ay \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - y = a \\ ax + 3y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

- 4. Dado el sistema $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$, halla m para que:

- a) No tenga soluciones. c) Tenga solución única.
b) Tenga infinitas soluciones. d) Tenga una solución en la que $x = 3$.

- 5. Calcula el valor de m para que el sistema $\begin{cases} y + z = 1 \\ (m-1)x + 3y + z = 2 \\ x + (m-1)y - z = 0 \end{cases}$:

- a) Tenga una solución única. b) Tenga infinitas soluciones. c) No tenga soluciones.

- 6. ¿Para qué valores de k el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ y + 3z = k \\ x + z = 1 \end{cases}$ tiene solución única?

- 7. Estudia, según los valores de a , el sistema $\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 0 \\ ax + y - z = 1 \end{cases}$. Resuélvelo para $a = 1$.

- 8. Discute según los valores de a y resuelve, cuando sea posible, el sistema: $\begin{cases} 2y - z = a \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = a \end{cases}$

- 9. a) Discute el siguiente sistema según los valores de b :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2b \\ 1 \end{pmatrix}$$

- b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.



SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

- a) La solución es $x=2, y=1$.
- b) La solución es $x=3, y=-2, z=0$.
- c) El sistema es incompatible.
- d) Las soluciones son: $x=5-7t, y=-2+5t, z=t$ con $t \in \mathbb{R}$.
- e) El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x=t, y=2t-3$ con $t \in \mathbb{R}$.
- f) El sistema no tiene solución.

2. Queda así:

- a) Por ejemplo, la ecuación añadida para que el sistema sea incompatible es $3x+2z=5$.
- b) La ecuación añadida para que el sistema sea compatible indeterminado puede ser $3x+2z=2$.

3. Las soluciones en cada caso son:

a) Consideraremos cada uno de los casos:

- Si $a=1$, el sistema es compatible indeterminado.

Sus soluciones son: $x=1-t, y=t$ con $t \in \mathbb{R}$.

- Si $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado.

Sus soluciones son: $x = \frac{(a+1)(a^2+1)}{a^2+a+1}, y = \frac{a}{a^2+a+1}$

b) Consideraremos cada uno de los casos:

- Si $a=0$, el sistema es compatible indeterminado.

Sus soluciones son: $x=0, y=t$ con $t \in \mathbb{R}$.

- Si $a=2$, el sistema es compatible indeterminado.

Sus soluciones son: $x=2t, y=t$ con $t \in \mathbb{R}$.

- Si $a \notin \{0, 2\}$, el sistema es compatible determinado.

Sus soluciones son: $x=0, y=0$.

c) Consideraremos cada uno de los casos:

- Si $a=1$, el sistema es compatible determinado. Sus soluciones son: $x=1, y=1$.
- Si $a=-8$, el sistema es compatible determinado. Sus soluciones son: $x=10, y=28$.
- Si $a \notin \{1, -8\}$, el sistema es incompatible.

4. Queda:

- a) Si $m = -1$, el sistema es incompatible.
- b) Si $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado.
- c) Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, el sistema es compatible determinado.
- d) El valor de m es $-\frac{4}{3}$.

5. Queda:

- a) Si $m \neq 2$ y $m \neq -1$, el sistema es compatible determinado.
- b) Si $m = 2$, el sistema es compatible indeterminado.
- c) Si $m = -1$, el sistema es incompatible.

6. Para cualquier valor de k el sistema tiene solución única.

Ésta es:

$$x = 2 - k/4, \quad y = 3 + k/4, \quad z = -1 + k/4.$$

7. Queda del siguiente modo:

- Si $a = -1$, el sistema es incompatible.
- Si $a \neq -1$, el sistema es compatible determinado.
- Para $a = 1$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones son: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0$.

8. Queda:

- Si $a \neq 6$, el sistema es incompatible.
- Si $a = 6$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones son: $x = 5$, $y = 4$, $z = 2$.

9. Queda:

- a) Si $b \neq 0$ y $b \neq 1$, el sistema es compatible determinado.
Si $b = 0$, el sistema es incompatible.
Si $b = 1$, el sistema es compatible indeterminado.
- b) Si $b = 1$, resolviendo se obtiene $x = -5t$, $y = 1$, $z = t$ con $t \in \mathbb{R}$.

■ 10. Dado el sistema homogéneo
$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + kz = 0 \\ x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

- a) Indica para qué valores de k admite solución distinta de la trivial.
b) Resuélvelo para un valor k que lo haga compatible indeterminado.

■ 11. Discute y resuelve, según los valores de m , los sistemas:

a)
$$\begin{cases} mx + 2y + z = 0 \\ 4x + 2my + mz = 0 \\ 2x + (2m - 2)y + z = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 5x - my + 3z = 0 \end{cases}$$

■ 12. Elimina los parámetros que intervienen en los sistemas siguientes:

a)
$$\begin{cases} x = 2m + n \\ y = -m + n \\ z = 3m - 2n \\ t = m + n \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = p + q \\ y = q + r \\ z = p + r \\ t = 2p - 3r \\ u = p + q + r \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x = 1 + p + q \\ y = -p + 2q \\ z = 2 + 2p + 3q \\ t = -1 + 2p \\ u = 3 - q \end{cases}$$

■ 13. Un determinado concesionario de coches tiene abiertas tres sucursales. El número total de coches vendidos a final de mes entre las tres es 177, pero los vendidos en la tercera sucursal son la cuarta parte de los vendidos en la primera. Además, la diferencia entre el número de coches vendidos en la primera y la segunda es inferior en dos unidades al doble de los vendidos en la tercera. ¿Cuántos coches ha vendido en ese mes cada una de las sucursales?

■ 14. ¿Existen tres números tales que dados dos cualesquiera de ellos su suma es el otro más uno? En caso afirmativo, hálloslos.

■ 15. En un jardín hay veintidós árboles entre naranjos, limoneros y pomelos. El doble del número de limoneros más el triple del número de pomelos es igual al doble del número de naranjos.

- a) ¿Es posible saber con estos datos el número de naranjos que hay?
b) Si además se sabe que el número de naranjos es el doble del de limoneros, ¿cuántos árboles hay de cada tipo?



■ 16. Dada la ecuación $2x + 3y - z = 1$:

- a) Añade dos ecuaciones para que el sistema resultante tenga una única solución.
b) Añade dos ecuaciones para que el sistema resultante no tenga solución.
c) Añade una ecuación para que el sistema resultante tenga infinitas soluciones.

■ 17. Dado el sistema
$$\begin{cases} ax + y - z = z \\ x - ay - z = -x \\ 3x - 3y - z = -y \end{cases}$$
, estudia su compatibilidad según los valores del parámetro a y resuélvelo cuando sea posible.

SOLUCIONES

10. Queda del siguiente modo:

- a) Sólo para $k = \frac{7}{4}$, el sistema admite solución distinta de la trivial.
- b) Para el valor anterior las soluciones son: $x = \frac{5t}{4}$, $y = \frac{-11t}{4}$, $z = t$ con $t \in \mathbb{R}$.

11. Queda:

- a) Si $m \neq 2$ y $m \neq -2$, el sistema es compatible determinado y su solución es la trivial.
 Si $m = -2$, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x = 2t$, $y = t$, $z = 2t$ con $t \in \mathbb{R}$.
 Si $m = 2$, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x = t$, $y = u$, $z = -2t - 2u$ con $t, u \in \mathbb{R}$.
- b) Es un sistema homogéneo. Si $m \neq 5$, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial.
 Si $m = 5$, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x = \frac{t}{5}$, $y = \frac{4t}{5}$, $z = t$ con $t \in \mathbb{R}$.

12. En cada caso queda:

Eliminando los parámetros, se obtiene:

- a) $\begin{cases} x - 7y - 3z = 0 \\ 2x + y - 3t = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 5y - z - 2t = 0 \\ x + y + z - 2u = 0 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} 7x + y - 3z = 1 \\ 4x - 2y - 3t = 7 \\ 2x - t + 2u = 9 \end{cases}$

13. El sistema se plantea del siguiente modo:

Llamamos x , y , z al número de coches vendidos cada día en una sucursal, las condiciones del enunciado nos permiten plantear el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 177 \\ z = \frac{1}{4}x \\ x - y = 2z - 2 \end{cases}$$

Expresado el sistema y aplicando el método de Gauss en la resolución obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 177 \\ x - 4z = 0 \\ x - y - 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 177 \\ y + 5z = 177 \\ 2y + 3z = 179 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 177 \\ y + 5z = 177 \\ 7z = 175 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 52 \\ z = 25 \end{cases}$$

Por tanto, la primera sucursal vendió 100 coches, la segunda 52 y la tercera 25.

14. El sistema se plantea del siguiente modo:

Llamamos x , y , z a los números buscados. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = z + 1 \\ x + z = y + 1 \\ y + z = x + 1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Los tres números son $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

15. Queda del siguiente modo:

- a) Llamamos n al número de naranjos, l al número de limoneros y p al número de pomelos. Las condiciones del enunciado nos permiten formular el sistema:

$$\begin{cases} n + l + p = 22 \\ 2n - 2l - 3p = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene dos soluciones: $n=12$, $l=6$, $p=4$ y $n=13$, $l=8$, $p=1$. No consideramos la solución $n=11$, $l=11$, $p=0$. Existen otras soluciones del sistema cuyos valores no son números naturales. Por tanto, no podemos saber el número de naranjos que hay.

- b) Con la tercera solución planteamos y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} n + l + p = 22 \\ 2n - 2l - 3p = 0 \\ n - 2l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + l + p = 22 \\ 4l + 5p = 44 \\ 3l + p = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + l + p = 22 \\ 4l + 5p = 44 \\ 11p = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ l = 6 \\ p = 4 \end{cases}$$

Los árboles del jardín son 12 naranjos, 6 limoneros y 4 pomelos.

16. Queda del siguiente modo:

- a) Este apartado admite una respuesta abierta a múltiples soluciones. Una de ellas puede ser:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = 8 \\ -3x + y + 2z = 6 \end{cases} \text{ con solución } x=1, y=1, z=4.$$

- b) Como ocurre en el caso anterior un ejemplo podría ser:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = 8 \\ 3x + 2y + z = 15 \end{cases}$$

- c) En este caso:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = 8 \\ 3x + 2y + z = 9 \end{cases} \text{ las infinitas solución pueden venir dadas en la forma: } x = 5 - t, y = -3 + t, z = t \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

17. La solución es:

El sistema del enunciado es el sistema homogéneo

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ -2x + ay + z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ -2 & a & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 8a + 7$$

El estudio a realizar es:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 7$, el rango de la matriz A es 3, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial.
- Si $a=1$, el rango de la matriz A es 2, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x=t, y=t, z=t$ con $t \in \mathbb{R}$.
- Si $a=7$, el rango de la matriz A es 2, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x=-5t, y=t, z=-17t$ con $t \in \mathbb{R}$.

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

- 18. Encuentra todas las soluciones del sistema siguiente según los valores del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

- 19. Discute, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3m \end{cases}$$

- 20. El señor García deja a sus hijos herederos de todo su dinero con las siguientes condiciones: al mayor le deja la media aritmética de lo que les deja a los otros dos más 30 000 €; al mediano, exactamente la media aritmética de lo que les deja a los otros dos; y al más pequeño, la media aritmética de lo de los otros dos menos 30 000 €. Conociendo estas condiciones solamente, ¿pueden los hijos saber cuánto dinero ha heredado cada uno?

- 21. Discute, según los valores de b , el sistema $\begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & b & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Resuélvelo encontrando la solución para $z = -3$.

- 22. Estudia, en función de los valores del parámetro k , el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + z = y \\ x + 2y + kz = k \end{cases}$ y resuélvelo cuando sea compatible.

- 23. Elimina los parámetros a y b en el sistema $\begin{cases} x + y = 3a + 3 \\ 2x + y - z = 3a + 3b + 1 \\ x - 2y + z = -2a + 5b - 8 \end{cases}$

- 24. Discute, según los valores del parámetro m , el sistema $\begin{cases} x - y = m \\ x + m^2z = 2m + 1 \\ x - y + (m^2 - m)z = 2m \end{cases}$

Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

- 25. Determina para qué valores del parámetro a el sistema $\begin{cases} ax + y + a^2z = 3 \\ -x - 7y + 8z = 0 \\ x + a^3y + a^2z = -3 \end{cases}$ admite como solución $x = 1, y = 1, z = 1$, y resuélvelo en estos casos, comprobando que, efectivamente, $x = 1, y = 1, z = 1$ es solución del sistema. Razona la respuesta.

- 26. Dado el sistema $\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$, discútelo en función de a y resuélvelo para $a = -5$.



SOLUCIONES

18. En este caso queda del siguiente modo:

Para cualquier valor que tome el parámetro a , el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son las siguientes: $x=1-t$, $y=(1-2a)t$, $z=2t$ con $t \in \mathbb{R}$.

19. La discusión queda:

- Si $m \neq 2$, el sistema es incompatible.
- Si $m=2$, el sistema es compatible determinado.

20. Queda:

Llamando M lo que recibe el hijo mayor, m el mediano y p el pequeño e imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2M - m - p = 60000 \\ M - 2m + p = 0 \\ M + m - 2p = 60000 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado por lo que no podemos saber lo que deja a cada uno de los hijos con estas condiciones.

21. Queda:

Este sistema es homogéneo. La discusión quedaría:

- Si $b \neq -3$ y $b \neq -1$, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial.
- Si $b = -3$, el sistema es compatible indeterminado y la solución en la que $z = -3$ es la siguiente: $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, $z = -3$.
- Si $b = -1$, la $z = 0$ por lo que no hay ninguna solución que verifique el enunciado.

22. La solución es:

Este sistema es no homogéneo. La discusión quedaría:

- Si $k=7$, el sistema es incompatible.
- Si $k \neq 7$, el sistema es compatible determinado y su solución es:

$$x = \frac{-3k}{k-7}, \quad y = \frac{-2k}{k-7}, \quad z = \frac{k}{k-7}$$

23. La solución es:

Debe cumplirse que

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & x+y-3 \\ 3 & 3 & 2x+y-z-1 \\ -2 & 5 & x-2y+z+8 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y simplificando se obtiene: $y-2z=2$

24. La discusión queda:

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado.
- Si $m=1$, el sistema es incompatible.
- Si $m=0$, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x=1, y=1, z=t$ con $t \in \mathbb{R}$.

25. La solución queda:

Sustituyendo $x=1, y=1, z=1$ en el sistema, el parámetro debe cumplir:

$$\begin{cases} a+1+a^2=3 \\ 1+a^3+a^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-2=0 \\ a^3+a^2+4=0 \end{cases}$$

Las soluciones de la primera ecuación son: $a=1$ y $a=-2$, solamente $a=-2$ cumple la segunda ecuación.

Por tanto, para $a=-2$ el sistema admite como solución $x=1, y=1, z=1$. Veamos que es cierto:

Para $a=-2$ el sistema queda:
$$\begin{cases} -2x + y + 4z = 3 \\ -x - 7y + 8z = 0 \\ x - 8y + 4z = -3 \end{cases}$$

El rango de la matriz A es 2 ya que
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 8 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

y
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} \neq 0.$$

El rango de la matriz A^* es 2 ya que
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & -7 & 0 \\ 1 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

El sistema es compatible indeterminado, se reduce a

$$\begin{cases} -2x + y = 3 - 4z \\ x + 7y = 8z \end{cases}$$

y sus soluciones son:

$$x = \frac{36z - 21}{15} \quad y = \frac{12z + 3}{15} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12t - 7}{5} \\ y = \frac{4t + 1}{5} \\ z = t; \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Obsérvese que la solución que se cita en el enunciado, $x = 1, y = 1, z = 1$, se obtiene para $t = 1$.

26. Queda del siguiente modo:

Hallando el determinante de la matriz ampliada obtenemos la expresión $18a - a^3 - 35$ y resolviendo la ecuación $18a - a^3 - 35 = 0$ obtenemos la solución real $a = -5$.

La discusión del sistema es:

Si $a = -5$ el sistema es compatible determinado y en caso contrario es incompatible. Por tanto, para este valor puede resolverse obteniéndose como solución $x = -1, y = -1$.

Unidad 4 – Espacios vectoriales. Aplicaciones lineales

PÁGINA 81

cuestiones iniciales

1. Halla x, y, z de modo que sea cierta la siguiente igualdad:

$$x(1, 2, -1) + y(3, 0, 1) + z(2, 1, 2) = (-1, -5, -3)$$

2. Estudia si la suma de polinomios de primer grado verifica las propiedades: asociativa, conmutativa, elemento neutro y existencia de elemento simétrico.

3. Considera el conjunto de matrices simétricas 2×2 de la forma:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & a \\ a & y \end{pmatrix} \mid x, a, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Si sumas dos matrices de este tipo ¿qué obtienes?, y si multiplicas un número real por una matriz de este conjunto ¿qué obtienes?

Encuentra en este conjunto el elemento neutro y el elemento simétrico respecto a la suma de matrices.

SOLUCIONES

1. La solución queda:

Operando los vectores e igualando los vectores resultantes, obtenemos:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + z = -5 \\ -x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 6y + 3z = 3 \\ 4y + 4z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2y + z = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

Los valores buscados son $x = -1, y = 2, z = -3$.

2. La solución queda:

Sean los polinomios $A(x) = a_1x + b_1$, $B(x) = a_2x + b_2$ y $C(x) = a_3x + b_3$.

- Propiedad asociativa. Se verifica al cumplirse:

$$\begin{aligned} A(x) + [B(x) + C(x)] &= a_1x + b_1 + [a_2x + b_2 + a_3x + b_3] = a_1x + b_1 + (a_2 + a_3)x + (b_2 + b_3) = \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)x + (b_1 + b_2 + b_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A(x) + B(x)] + C(x) &= [a_1x + b_1 + a_2x + b_2] + a_3x + b_3 = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2) + a_3x + b_3 = \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)x + (b_1 + b_2 + b_3) \end{aligned}$$

- Propiedad conmutativa. Se verifica ya que:
 $A(x) + B(x) = a_1x + b_1 + a_2x + b_2 = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)$
 $B(x) + A(x) = a_2x + b_2 + a_1x + b_1 = (a_2 + a_1)x + (b_2 + b_1)$
- Elemento neutro. Es el polinomio $0x + 0$, ya que cumple:
 $(ax + b) + (0x + 0) = (a + 0)x + (b + 0) = ax + b$
- Elemento simétrico. Para un polinomio cualquiera $ax + b$ su simétrico es el polinomio $-ax - b$ ya que: $(ax + b) + (-ax - b) = (a - a)x + (b - b) = 0x + 0$

Son ciertas estas propiedades al ser $a, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3$ números reales.

3. Al sumar dos matrices de este tipo se obtiene otra del mismo tipo.

$$\begin{pmatrix} x & a \\ a & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & b \\ b & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' & a + b \\ a + b & y + y' \end{pmatrix}$$

Al multiplicar un número real por una matriz de este tipo se obtiene otra de mismo tipo.

$$t \cdot \begin{pmatrix} x & a \\ a & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx & ta \\ ta & ty \end{pmatrix}$$

El elemento neutro de este conjunto de matrices es la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. El elemento simétrico de

la matriz $\begin{pmatrix} x & a \\ a & y \end{pmatrix}$ respecto de la suma de matrices es la matriz $\begin{pmatrix} -x & -a \\ -a & -y \end{pmatrix}$.

PÁGINA 97

ACTIVIDADES

■ Aplica la técnica de ensayo y error en la resolución de los siguientes problemas:

- 1. Lentejas y garbanzos.** En un puesto del mercado tienen 5 sacos de garbanzos y uno de lentejas. Un cliente se lleva una cierta cantidad de garbanzos; después, otro cliente se lleva el doble de garbanzos que el cliente anterior, quedándose sólo el saco de lentejas. El vendedor sólo vende sacos completos. Sabiendo que los diferentes sacos son de 19, 18, 31, 16, 15 y 20 kg, ¿de cuántos kilogramos es el saco de lentejas?
- 2. Tres cartas.** De una baraja española de 40 cartas, extraemos 3 y las colocamos en una fila horizontal. Las cartas verifican las condiciones siguientes: a la derecha del *caballo* hay 1 o 2 *sotas*; a la izquierda de la *sota*, hay 1 o 2 *sotas*; a la izquierda de un *oro*, hay una o dos *copas*; y a la derecha de una *copa*, hay una o dos *copas*. ¿De qué tres cartas se trata?
- 3. Primas.** Dos amigos, Pedro y Luisa, se encuentran una tarde y Pedro le dice a Luisa: «Ayer estuve con mis tres primas». Luisa le pregunta: «¿qué edad tienen?», a lo que Pedro contesta: «el producto de sus edades es 2 450 y la suma de las mismas es el doble de tu edad». Luisa dijo que con estos datos no podía saber las edades. Pedro añadió: «yo soy por lo menos un año más joven que la más vieja». Por supuesto, Luisa conoce la edad de Pedro. ¿Cuáles son las edades de las primas de Pedro y cuál es la edad de Luisa?

SOLUCIONES

- Sumando los kilos de todos los sacos, obtenemos 119 kg. Como un cliente se lleva cierta cantidad y otro se lleva el doble de esa cantidad quedando sólo el caso de lentejas, entonces al quitar a 119 kg, el saco de lentejas debe quedar un número que es múltiplo de 3, esto se cumple con:

$$119 - 20 = 99.$$

Un cliente lleva 33 kg en los sacos de 18 kg y 15 kg y el otro cliente se lleva 66 kg en los sacos de 19 kg, 31 kg, 16 kg. El saco de lentejas es el que pesa 20 kg.

- El caballo y las sotas las señalamos con CSS . Para que verifiquen las condiciones han de ser:

$$C_c S_o S_c$$

Por tanto, las cartas son:

- Caballo de copas.
- Sota de oros.
- Sota de copas.

3. Descomponiendo 2 450 en factores, obtenemos: $2\,450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

Las posibles edades de las tres primas son:

Prima 1	Prima 2	Prima 3	Suma	Luisa
2	25	49	76	38
5	5	98	108	54
5	10	49	64	32
7	7	50	64	32
2	35	35	72	36
1	49	50	100	50
7	14	25	46	23
7	10	35	52	26
5	14	35	54	27

Una vez hecha la tabla con todas las posibilidades, observamos que hay un resultado suma repetido, por tanto ahí está la razón de que Luisa le dijera a Pedro que con esos datos no podía saber las edades. La edad de Luisa es de 32 años. Luisa sabe la edad de Pedro. Si Pedro hubiera tenido 48 años o menos, no quedaría claro, por tanto Pedro ha de tener 49 años y las primas 7, 7 y 50 años.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Demuestra que el conjunto de matrices 2×2 es un espacio vectorial real respecto a las operaciones suma de matrices y producto de un número real por una matriz, dadas por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ c+c_1 & d+d_1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot a & t \cdot b \\ t \cdot c & t \cdot d \end{pmatrix}$$

- 2. Sea $(V, +, \bullet_{\mathbb{R}})$ un espacio vectorial real. Demuestra que son ciertas las siguientes propiedades:

- a) $(t-s) \cdot \vec{v} = t \cdot \vec{v} - s \cdot \vec{v}$ $\forall t, s \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \vec{v} \in V$
 b) $t \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = t \cdot \vec{v} - t \cdot \vec{w}$ $\forall t \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$
 c) Si $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$ $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$
 d) $t \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow t = 0 \text{ o } \vec{v} = \vec{0}$

- 3. Estudia cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

- a) $A = \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$
 b) $B = \{(x, y, -x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
 c) $C = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
 d) $D = \{(x, y, z) \mid x+y=3; \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$

- 4. Estudia si el conjunto de matrices que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices 2×2 .

- 5. En el espacio vectorial real de los polinomios $\{\mathbb{P}_2(x), +, \bullet_{\mathbb{R}}\}$ de grado menor o igual que 2, estudia si el subconjunto $\{P'(x), P''(x)\}$, siendo $P'(x)$ y $P''(x)$ los polinomios derivados de $P(x)$ y $P'(x)$, respectivamente, es un subespacio vectorial.

- 6. En el espacio vectorial real $(\mathbb{R}^3, +, \bullet_{\mathbb{R}})$ consideramos los vectores $\vec{v} = (1, 2, 0)$ y $\vec{w} = (1, 1, -1)$. Encuentra un vector $\vec{u}$ en cada uno de los siguientes casos:

- a) De forma que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sean linealmente dependientes.
 b) De forma que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sean linealmente independientes.

- 7. Halla el valor o valores de a de modo que el vector $(1, -6, a)$ sea linealmente independiente de los vectores $(2, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$. ¿Cuánto ha de valer a para que el vector dado sea linealmente dependiente de los vectores $(2, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$?

- 8. Halla el valor de x para que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ sean linealmente dependientes:

$$(x, 2, 0), (x, 3x, 5) \text{ y } (1, x, 5)$$

- 9. Estudia si el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3 \{(1, 2, 3), (0, 2, 4), (0, 2, 0)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. En caso afirmativo halla las coordenadas del vector $(1, 1, 1)$ respecto de ella.



SOLUCIONES

1. Las propiedades asociativa y conmutativa se verifican ya que la suma de números reales que se establecen en los elementos de las matrices cumple las propiedades asociativa y conmutativa.

El elemento neutro para la suma es la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El elemento simétrico de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ para la suma es $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Veamos que se cumplen las propiedades para el producto.

2. a) $(t-s) \cdot \vec{v} = [t + (-s)] \cdot \vec{v} = t \cdot \vec{v} + (-s) \cdot \vec{v} = t \cdot \vec{v} + (-s \cdot \vec{v}) = t \cdot \vec{v} - s \cdot \vec{v} \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \vec{v} \in V$.

b) Sean $t \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}, \vec{w} \in V$, se cumple:

$$t \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = t \cdot [(\vec{v} + (-\vec{w}))] = t \cdot \vec{v} + t \cdot (-\vec{w}) = t \cdot \vec{v} + (-t \cdot \vec{w}) = t\vec{v} - t\vec{w}.$$

c) Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ se cumple:

$$\vec{u} + \vec{w} + \vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \vec{u} + \vec{w} - \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} - \vec{w} \Rightarrow \vec{u} + (\vec{w} - \vec{w}) = \vec{v} + (\vec{w} - \vec{w}) \Rightarrow \vec{u} + \vec{0} = \vec{v} + \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}.$$

d) Veamos la demostración de la condición necesaria. Sea $t \cdot \vec{v} = \vec{0}$ y $t \neq 0$, entonces existe

$t^{-1} = \frac{1}{t}$ y se cumple:

$$\begin{aligned} t \cdot \vec{v} = \vec{0} &\Rightarrow \frac{1}{t} \cdot (t \cdot \vec{v}) = \frac{1}{t} \cdot \vec{0} \Rightarrow \left(\frac{1}{t} \cdot t\right) \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Sea $t \cdot \vec{v} = \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$ se cumple:

$$\begin{aligned} t\vec{v} = \vec{0} &\Rightarrow t\vec{v} = t\vec{0} \Rightarrow t\vec{v} - t\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t(\vec{v} - \vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow t = 0. \end{aligned}$$

Veamos la demostración de la condición suficiente.

Si $t = 0$, puede verse en el libro de texto la demostración de $t \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Si $\vec{v} = \vec{0}$, también puede verse que $t \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

3. La solución en cada caso es:

a) A es un subespacio vectorial al cumplirse:

$$t(x_1, x_1, 0) + s(x_2, x_2, 0) = (tx_1 + sx_2, tx_1 + sx_2, 0) \in A.$$

b) B también es un subespacio vectorial ya que:

$$t(x_1, y_1, -x_1 - y_1) + s(x_2, y_2, -x_2 - y_2) = (tx_1 + sx_2, ty_1 + sy_2, -tx_1 - sx_2 - ty_1 - sy_2) \in B$$

c) C es un subespacio vectorial al ser:

$$t(x_1, 2x_1, 3x_1) + s(x_1, 2x_1, 3x_1) = (tx_1 + sx_1, 2(tx_1 + sx_1), 3(tx_1 + sx_1)) \in C.$$

d) D no es subespacio vectorial al cumplirse que:

El vector $(1, 2, 5)$ pertenece a D , lo mismo que $(2, 1, 7)$;

pero la suma de ambos $(1, 2, 5) + (2, 1, 7) = (3, 3, 12)$ no pertenece al cumplirse $x + y = 3 + 3 = 6 \neq 3$.

4. Las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ son de la forma $\begin{pmatrix} c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ con $c, d \in \mathbb{R}$.

Sea el conjunto $M = \left\{ \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}; c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Forma un subespacio vectorial al cumplirse:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} c_1 + d_1 & 0 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 + d_2 & 0 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + d_1 + d_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in M \\ & t \cdot \begin{pmatrix} c_1 + d_1 & 0 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tc_1 + td_1 & 0 \\ tc_1 & td_1 \end{pmatrix} \in M \end{aligned}$$

5. El conjunto del enunciado es un subespacio vectorial ya que las reglas de derivación permiten afirmar que:

$$[p(x) + q(x)]' = p'(x) + q'(x)$$

$$[t \cdot p(x)]' = t \cdot p'(x)$$

$$[p(x) + q(x)]'' = p''(x) + q''(x)$$

$$[t \cdot p(x)]'' = t \cdot p''(x)$$

6. a) el vector u puede ser cualquier combinación lineal de v y w , por ejemplo, $v + w$, es decir:

$$u = v + w = (1, 2, 0) + (1, 1, -1) = (2, 3, -1).$$

- b) en este caso habrá que tomar un vector u que no sea combinación lineal de v y w , es decir, que el determinante formado por los tres sea distinto de cero.

Por ejemplo $u = (2, 3, 1)$ ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

7. Tiene que cumplirse para que sean linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & a \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4a + 20 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -5.$$

Para que sean linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & a \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4a + 20 = 0 \Leftrightarrow a = -5.$$

8. Se debe cumplir que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & 3x & 5 \\ 1 & x & 5 \end{vmatrix} \text{ sea nulo.}$$

Sin embargo, $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & 3x & 5 \\ 1 & x & 5 \end{vmatrix} = 10x^2 - 10x + 10$ no se anula para ningún valor real de x .

Por tanto, no existe ningún valor de x que haga que los vectores sean linealmente dependientes.

9. Si forman una base al ser linealmente independientes ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Sean a , b y c las coordenadas del vector $(1, 1, 1)$ respecto de la base dada. Se cumplirá:

$$(1, 1, 1) = a(1, 2, 3) + b(0, 2, 4) + c(0, 2, 0)$$

Operando y resolviendo el sistema resultante:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ 2a + 2b + 2c & = 1 \\ 3a + 4b & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1/2 \\ c = 0 \end{cases}$$

Las coordenadas son $(1, 1/2, 0)$

- 10. En el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 2 $\{\mathbb{P}_2(x), +, \cdot\}$, estudia si los siguientes polinomios forman o no una base: $A(x) = x^2 + 1$; $B(x) = x^2 + x$; $C(x) = x + 1$. En caso afirmativo halla las coordenadas del polinomio $M(x) = x^2 - x + 2$ respecto a dicha base.

- 11. Halla una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \mid x - 2z = 0; \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$T = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$E = \{(x, y, z) \mid x + y = 0; \ y + z = 0; \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

- 12. Sea la aplicación:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2)$$

Demuestra que es una aplicación lineal, halla sus ecuaciones y su matriz asociada.

- 13. Halla las ecuaciones de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(-1, 1, 0) = (-1, 0) \quad f(0, 0, 1) = (1, -1) \quad f(1, 3, -1) = (0, 1)$$

- 14. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal de matriz asociada $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Halla $f(3, 5, -7)$ y $f^{-1}(1, 1)$.

- 15. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(e_1) = (2, 5, 0)$, $f(e_2) = (1, 1, 1)$ y $(3, 2, 1) \in \text{Ker } f$, siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Halla $f(e_3)$, la matriz asociada a esta aplicación lineal, su núcleo y su imagen.

- 16. Halla el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(0, 1) = (1, 1, -2)$ y $f(-1, 1) = (2, -2, -4)$.

- 17. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3)$. Halla el núcleo, la imagen y una base y la dimensión de estos.

- 18. Dadas las aplicaciones lineales:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto (2x_1, x_1 - x_2)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1 + x_2, -x_1)$$

Halla la aplicación compuesta $g \circ f$. ¿Esta aplicación es lineal? En caso afirmativo estudia qué relación existe entre su matriz asociada y las matrices asociadas a las aplicaciones lineales g y f .

- 19. Estudia si es lineal la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \longmapsto \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

En caso afirmativo halla su núcleo.

SOLUCIONES

10. Consideramos a los polinomios x^2 , x y 1 como la base canónica del espacio vectorial dado.

Los polinomios del enunciado tienen por coordenadas respecto a la base canónica:

$$A(x) = x^2 + 1 = (1, 0, 1); B(x) = x^2 + x = (1, 1, 0) \text{ y } C(x) = x + 1 = (0, 1, 1).$$

Los vectores anteriores forman una base al cumplirse $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Sean a , b y c las coordenadas de $M(x)$ respecto a la base $\{A(x), B(x), C(x)\}$.

Se cumple: $(1, -1, 2) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1)$.

Operando y resolviendo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b &= 1 \\ b + c &= -1 \\ a + c &= 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b &= 1 \\ b + c &= -1 \\ b - c &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b &= 1 \\ b + c &= -1 \\ 2c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Observa que se cumple:

$$x^2 - x + 2 = 2(x^2 + 1) - (x^2 + x) + 0 \cdot (x + 1).$$

11. Los vectores de S pueden ponerse en la forma:

$$(2z, y, z) = y(0, 1, 0) + z(2, 0, 1)$$

Los vectores $(0, 1, 0)$ y $(2, 0, 1)$ forman una base de S y su dimensión es 2.

Al ser $(x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$ para los vectores de T podemos considerar el vector $(1, 0, -1)$ como una base de T su dimensión será 1.

En el caso del subespacio E podemos escribir:

$$(x, y, z) = (-y, y, -y) = y(-1, 1, -1)$$

El vector $(-1, 1, -1)$ constituye una base de E y su dimensión es 1.

12. Veamos que la aplicación f es lineal.

Consideremos los vectores $\vec{v} = (x_1, x_2)$ y $\vec{w} = (z_1, z_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Se cumple:

$$\begin{aligned} &= (x_1 + z_1 + 2(x_2 + z_2), x_1 + z_1 - 2(x_2 + z_2)) = \\ &= (x_1 + 2x_2 + z_1 + 2z_2, x_1 - 2x_2 + z_1 - 2z_2) = \\ &= (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2) + (z_1 + 2z_2, z_1 - 2z_2) \end{aligned}$$

$$f(x_1, x_2) + f(z_1, z_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2) + (z_1 + 2z_2, z_1 - 2z_2).$$

Además se cumple:

$$\begin{aligned} f[t(x_1, x_2)] &= f(tx_1, tx_2) = (tx_1 + 2tx_2, tx_1 - 2tx_2) \\ t \cdot f(x_1, x_2) &= t(x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2) = (tx_1 + 2tx_2, tx_1 - 2tx_2). \end{aligned}$$

Las ecuaciones de esta aplicación son:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Su matriz asociada es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

13. Las ecuaciones de la aplicación lineal son de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta las condiciones del enunciado:

$$f(-1, 1, 0) = (-1, 0) \Rightarrow \begin{cases} -a_{11} + a_{12} = -1 \\ -a_{21} + a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$f(0, 0, 1) = (1, -1) \Rightarrow \begin{cases} a_{13} = 1 \\ a_{23} = -1 \end{cases}$$

$$f(1, 3, 1) = (0, 1) \Rightarrow \begin{cases} a_{11} + 3a_{12} - a_{13} = 0 \\ a_{21} + 3a_{22} - a_{23} = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$a_{11} = 1; \quad a_{12} = 0; \quad a_{13} = 1; \quad a_{21} = 0; \quad a_{22} = 0 \quad \text{y} \quad a_{23} = -1.$$

Las ecuaciones buscadas son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = -x_3 \end{cases}$$

La expresión de la aplicación es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -x_3)$$

14. Las ecuaciones de la aplicación lineal son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Hallamos $f(3, 5, -7)$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $f(3, 5, -7) = (29, -6)$.

Calculamos $f^{-1}(1, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$x_1 = t; \quad x_2 = 3 - 4t; \quad x_3 = 4 - 6t \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}$$

Por tanto,

$$f^{-1}(1, 1) = \{(t, 3 - 4t, 4 - 6t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

15. Expresamos el vector $e_3 = (1, 0, 0)$ en combinación lineal de $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (3, 2, 1)$ al formar estos una base y obtenemos:
- $$e_3 = (0, 0, 1) = -3(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + (3, 2, 1)$$

Calculamos $f(e_3)$ teniendo en cuenta que f es una aplicación lineal:

$$\begin{aligned} f(e_3) &= f[-3(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + (3, 2, 1)] = \\ &= -3f(1, 0, 0) - 2f(0, 1, 0) + f(3, 2, 1) = \\ &= -3(2, 5, 0) - 2(1, 1, 1) + (0, 0, 0) = (-8, -17, -2). \end{aligned}$$

La matriz asociada de la aplicación f es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 5 & 1 & -17 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

El nucleo de la aplicación lineal es:

$$\text{Ker } f = \{(x_1, x_2, x_3) \mid f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)\}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 17x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8x_3 \\ 5x_1 + x_2 = 17x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

Por tanto $\text{Ker } f = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \{3t, 2t, t\} \mid t \in \mathbb{R}$

Una base del nucleo es el vector $(3, 2, 1)$ y la dimensión de $\text{Ker } f$ es 1.

La imagen de la aplicación f es:

$$\text{Im } f = \{(y_1, y_2, y_3) \mid \exists (x_1, x_2, x_3); f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)\}$$

A partir de las ecuaciones de la aplicación

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \\ y_2 = 5x_1 + x_2 - 17x_3 \\ y_3 = x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Y eliminando x_1, x_2, x_3 obtenemos la ecuación $5y_1 - 2y_2 - 3y_3 = 0$

Por tanto :

$$\text{Im } f = \{(y_1, 5/2 y_1 - 3/2 y_3, y_3)\} = (2t, 5t - 3s, 2s) \mid t, s \in \mathbb{R}$$

Una base del subespacio $\text{Im } f \{(2, 5, 0)\} = (2t, 5t - 3s, 2s) \mid t, s \in \mathbb{R}$ y su dimensión es 2.

16. las ecuaciones de la aplicación, en forma matricial son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Las condiciones del enunciado nos conducen a:

$$\left. \begin{aligned} f(0, 1) = (1, 1, -2) &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(-1, 1) = (2, -2, -4) &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -1, b = 1 \\ c &= 3, d = 1 \\ e &= 2, f = -2 \end{aligned}$$

Por tanto las ecuaciones de la aplicación son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 \\ y_2 = 3x_1 + x_2 \\ y_3 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

El nucleo de esta aplicación contiene a los vectores $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ que cumplan $f(x_1, x_2) = (0, 0, 0)$, es decir, los que cumplen:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

El nucleo de la aplicación es $\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$.

La imagen de esta aplicación contiene a los vectores $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen:

Existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$.

Los vectores buscados cumplen:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 \\ y_2 = 3x_1 + x_2 \\ y_3 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Eliminando x_1 y x_2 obtenemos: $2y_1 + y_3 = 0$.

Por tanto $\text{Im } f = \{(y_1, y_2, -2y_1)\} = \{(t, s, -2t) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

Una base del subespacio $\text{Im } f$ está formada por los vectores $\{(1, 0, -2), (0, 1, 0)\}$ y su dimensión es 2.

17. El nucleo de esta aplicacion esta formado por los vectores $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$\begin{cases} 3x_1 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Por tanto $\text{Ker } f = \{(0, -x_3, x_3)\} = \{(0, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Una base del nucleo esta formada por el vector $(0, -1, 1)$ y su dimension es 1.

La imagen de f está formada por los vectores $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 \\ y_2 = x_1 - x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Eliminando x_1, x_2, x_3 obtenemos: $y_1 - 2y_2 - y_3 = 0$.

Por tanto $\text{Im } f = \{(2y_2 + y_3, y_2, y_3)\} = \{(2t + s, t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$.

Una base del subespacio imagen está formada por los vectores $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ y su dimension es 2.

18. La aplicación compuesta $g \circ f$ tiene por expresión:

$$(g \circ f)(x_1, x_2) = g[f(x_1, x_2)] = g(2x_1, x_1 - x_2) = (3x_1 - x_2, -2x_1)$$

Puede comprobarse sin dificultad que la aplicación anterior es lineal. Las matrices asociadas a las aplicaciones f y g son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada a la aplicación compuesta $g \circ f$ es $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Es fácil comprobar que:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

19. La expresión de la aplicación es $f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$. La aplicación es lineal al cumplir:

$$f((x_1, x_2) + (z_1, z_2)) = f(x_1 + z_1, x_2 + z_2) = 2x_1 + 2z_1 - x_2 - z_2$$

$$f(x_1, x_2) + f(z_1, z_2) = 2x_1 - x_2 + 2z_1 - z_2 = 2x_1 + 2z_1 - x_2 - z_2$$

$$f[t(x_1, x_2)] = f[(tx_1, tx_2)] = 2tx_1 - tx_2$$

$$tf(x_1, x_2) = t(2x_1 - x_2) = 2tx_1 - tx_2$$

El núcleo lo forman los vectores $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ que cumplen:

$$f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 0$$

Por tanto $\text{Ker } f = \{(x_1, 2x_1)\} = \{(t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. El núcleo es un subespacio vectorial de dimensión 1.

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

- 20. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$; $f(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$; $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$, siendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Halla:
- La matriz de esta aplicación lineal.
 - El núcleo y su dimensión.
 - La imagen y una base de la misma.
 - La imagen del vector $\vec{v} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$.
- 21. Prueba que el subconjunto T de $\mathbb{R}^3$ dado por $T = \{(x, y, z) \mid 2x - y - z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Halla una base y su dimensión.
- 22. Consideremos la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(1, 2) = (-2, 1, 0)$; $f(1, 0) = (6, -1, 2)$. Halla $f^{-1}(2, 7, -7)$.
- 23. Prueba que si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, y $\vec{w}$ son linealmente independientes también lo son los vectores $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
- 24. Razona para qué valor o valores de a los vectores $(1, 1, 0)$, $(a, 1, 1)$ y $(1, a, 0)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.
- 25. En $\mathbb{R}^3$ tomamos el subconjunto de vectores $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. ¿Es este subconjunto un subespacio de $\mathbb{R}^3$? En caso afirmativo halla una base y su dimensión.
- 26. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que 3. Sean los polinomios:
- $$P_1(x) = 1 - x \quad ; \quad P_2(x) = x^2 + x \quad ; \quad P_3(x) = 1 - x^2 \quad ; \quad P_4(x) = x + x^3$$
- Prueba que estos polinomios constituyen una base de V . Determina las coordenadas del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en dicha base.
- 27. Sea W el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a 2. Sea f la aplicación:
- $$f: W \longrightarrow W$$
- $$P \longmapsto P'$$
- siendo P' el polinomio derivado del polinomio P . Demuestra que f es lineal y halla su núcleo.
- 28. Una aplicación g de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ viene dada por $g(1, 0, 0) = (2, 1, 1)$, $g(0, 1, 0) = (3, 0, -1)$, y su núcleo está engendrado por el vector $(1, 2, -1)$. ¿Qué vectores de $\mathbb{R}^3$ coinciden con su imagen en esta aplicación?
- 29. Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ definidos de la siguiente forma:
- $$A = \{(x, y, z) \mid x \cdot z = 3; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$
- $$B = \{(x, y, z) \mid x = y^2; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$
- Estudia si son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

SOLUCIONES

20. La solución en cada caso es:

a) La matriz de la aplicación lineal es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) El núcleo de f esta formado por los vectores $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$

El núcleo es $\text{Ker } f = \{(2x_3, -x_3, x_3)\} = \{(2t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

El vector $(2, -1, 1)$ constituye una base del nucleo y su dimensión es 1.

c) La imagen de f esta formada por los vectores $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 - x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

Eliminando x_1, x_2, x_3 , obtenemos: $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$.

La imagen es $\text{Im } f = \{(2y_2 - y_3, y_2, y_3)\} = \{(2t - s, t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

Los vectores $\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ forman una base de la imagen de f y su dimensión es 2.

d) La imagen del vector $\vec{v} = (1, -2, 4)$ es el vector:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

21. Veamos que T es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Consideramos dos vectores cualesquiera de T y un número real t cualquiera, es decir,

- $$\left. \begin{aligned} (x, y, z) \in T &\Leftrightarrow 2x - y - z = 0 \\ (x', y', z') \in T &\Leftrightarrow 2x' - y' - z' = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x - y - z) + (2x' - y' - z') = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x + x') - (y + y') - (z + z') = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + x', y + y', z + z') \in T$$
- $$\text{Al ser } t(2x - y - z) = 0 \Leftrightarrow 2tx - 2ty - 2tz = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (tx, ty, tz) \in T$$

El subespacio T lo podemos escribir en la forma:

$$T = \{(x, y, 2x - y)\} = \{(t, s, 2t - s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

Un vector cualquiera de T puede expresarse como sigue:

$$(t, s, 2t - s) = t(1, 0, 2) + s(0, 1, -1)$$

Los vectores $(1, 0, 2)$ y $(0, 1, -1)$ forman una base de T y su dimensión es 2.

22. Determinamos la ecuación matricial de la aplicación f que es de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} f(1, 2) = (-2, 1, 0) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ f(1, 0) = (6, -1, 2) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 6, b = -4 \\ c &= -1, d = 1 \\ e &= 2, f = -1 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de la aplicación f en forma matricial son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculamos $f^{-1}(2, 7, -7)$ y para ello resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 = -7 \end{cases}$$

El último sistema carece de solución, por tanto no existe ningún vector en $\mathfrak{R}^2$ cuya imagen mediante la aplicación f sea $(2, 7, -7)$.

23. Consideramos la combinación lineal nula:

$$a\vec{u} + b(\vec{u} + \vec{v}) + c(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = 0$$

Operando obtenemos:

$$(a + b + c)\vec{u} + (b + c)\vec{v} + c\vec{w} = 0$$

Al ser los vectores u , v y w linealmente independientes:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Como los escalares a , b y c son nulos, los vectores, $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ son linealmente independientes.

24. Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 1 - a.$$

Para $a \neq 1$ los vectores del enunciado forman una base de $\mathbb{R}^3$.

25. Es fácil ver que el subconjunto dado es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ (véase la actividad 27). El subespacio puede expresarse en la forma:

$$\{(x_2 - x_3, x_2, x_3)\} = \{(t - s, t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

Cualquier vector puede escribirse como combinación lineal de los vectores $(1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$:

$$(t - s, t, s) = t(1, 1, 0) + s(-1, 0, 1)$$

Una base del subespacio la forman los vectores $(1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$, la dimensión es 2.

26. Veamos que los polinomios $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ y $P_4(x)$ son linealmente independientes.

Formamos la combinación lineal nula:

$$a(1 - x) + b(x^2 + x) + c(1 - x^2) + d(x + x^3) = 0$$

Operamos:

$$dx^3 + (b - c)x^2 + (b + d - a)x + (a + c) = 0$$

Por el principio de identidad de polinomios:

$$\begin{cases} d = 0 \\ b - c = 0 \\ -a + b + d = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Luego estos polinomios son linealmente independientes.

Veamos que forman sistema generador, es decir que cualquier polinomio de V de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ puede escribirse en combinación lineal de los polinomios dados:

$$\begin{cases} s = a \\ z - t = b \\ -y + z + s = c \\ y + t = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = a; \\ t = \frac{d - b + c - a}{2}; \\ y = \frac{b + d - c + a}{2} \\ z = \frac{b + d + c - a}{2} \end{cases}$$

Luego efectivamente los polinomios dados son base. El polinomio $P(x)$ respecto a esta base es:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 1(1 - x) + 1(x^2 + x) + 0(1 - x^2) + 1(x + x^3)$$

Es decir las coordenadas $(1, 1, 0, 1)$ respecto a la base $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

27. La aplicación lineal f esta definida por $f(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$. veamos que es lineal.

$$\begin{aligned}
 f[ax^2 + bx + c] + f[a'x^2 + b'x + c'] &= \\
 &= f[(a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')] = \\
 &= 2(a + a')x + (b + b') = (2ax + b) + (2a'x + b'). \\
 f(ax^2 + bx + c) + f(a'x^2 + b'x + c') &= (2ax + b) + (2a'x + b'). \\
 t \cdot f(ax^2 + bx + c) &= t \cdot (2ax + b) = 2atx + bt = \\
 &= f[t \cdot (ax^2 + bx + c)].
 \end{aligned}$$

El núcleo de f estará formado por los polinomios $(ax^2 + bx + c)$ cuya derivada sea nula, es decir:

$$f(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow 2ax + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Los polinomios del nucleo son los polinomios de grado cero.

28. Calculamos la imagen por g del vector $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. este vector puede expresarse:

$$(0, 0, 1) = (1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) - (1, 2, -1).$$

La imagen del vector $(0, 0, 1)$ por la aplicación lineal g es:

$$g(0, 0, 1) = g(1, 0, 0) + 2g(0, 1, 0) - g(1, 2, -1) = (2, 1, 1) + 2(3, 0, -1) - (0, 0, 0) = (8, 1, -1)$$

La ecuación de la aplicación lineal g en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Los vectores (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ que coinciden con su imagen son los vectores que cumplen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Operando y resolviendo el sistema resultante, obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ x_2 = x_1 + x_3 \\ x_3 = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Por tanto el único vector que coincide con su imagen en esta aplicación es el vector nulo $\vec{0} = (0, 0, 0)$

Unidad 5 – Geometría afín en el espacio

PÁGINA 107

cuestiones iniciales

1. Dada la recta del plano de ecuación $2x - 6y + 3 = 0$, escríbela en forma continua, paramétrica, vectorial y explícita.
2. Calcula el valor de a en la recta de ecuación $ax + 3y - 9 = 0$, para que:
 - a) Pase por el punto $(3, 1)$.
 - b) Tenga de pendiente -1 .
 - c) Uno de sus vectores directores sea $\vec{v} = (6, -4)$.
3. Estudia la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:
 - a) $\begin{cases} 7x - 2y = 12 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$
 - b) $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x - 6y = -9 \end{cases}$
 - c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$
4. Estudia la posición relativa, según los valores de a , de los pares de rectas:
 - a) $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2y = 1 \end{cases}$
 - b) $\begin{cases} x + ay = ax \\ 3x + ay = ay \end{cases}$

SOLUCIONES

1. La recta $2x - 6y + 3 = 0$ pasa por el punto $(0, 1/2)$ y un vector direccional es $\vec{v} = (3, 1)$.
Por tanto, las ecuaciones pedidas son:
 - Ecuación continua $\frac{x}{3} = \frac{y - 1/2}{1}$
 - Ecuación paramétrica $\begin{cases} x = 3t \\ y = t + 1/2, t \in \mathbb{R} \end{cases}$
 - Ecuación vectorial $(x, y) = (0, 1/2) + t(3, 1)$, con $t \in \mathbb{R}$
 - Ecuación explícita $y = 1/3 x + 1/2$
2. a) $a=2$ b) $a=3$ c) $a=2$
3. a) Las rectas se cortan en el punto $(2, 1)$.
b) Las rectas son paralelas.
c) Las rectas son coincidentes.

4. a) Si $a=1$, las rectas son coincidentes.
Si $a \neq 1$, las rectas se cortan en el punto

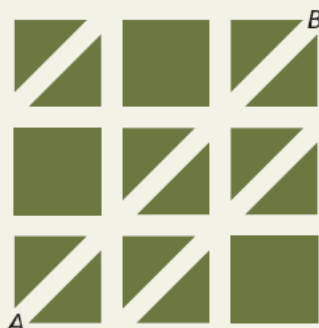
$$\left(\frac{(a+1)(a^2+1)}{a^2+a+1}, -\frac{a}{a^2+a+1} \right)$$

- b) Si $a=0$, las rectas son coincidentes.
Si $a \neq 0$, las rectas se cortan en el $(0, 0)$.

PÁGINA 121

ACTIVIDADES

■ Utiliza la estrategia de simplificar y/o particularizar en la resolución de los siguientes problemas:



1. **Sumas.** Demuestra: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1001} = 0,498501$

2. **Plano de ciudad.** La figura representa el plano de una ciudad. ¿De cuántas formas se puede ir desde A hasta B de manera que nunca retrocedamos?

3. **Trama triangular.** Resuelve el problema análogo al que figura en la página anterior, considerando que en este caso los triángulos equiláteros que debes contar son los que tienen el vértice hacia abajo.

4. **Primos.** Demuestra que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre un número múltiplo de 24.

5. **Tablero de ajedrez.** ¿Cuántos rectángulos de lados desiguales hay en un tablero de ajedrez?

SOLUCIONES

El término general de la sucesión formada por los sumandos es: $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Descomponiendo este en fracciones simples obtenemos: $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} + \frac{-1/2}{2n+1}$

Aplicando esta igualdad a cada uno de los sumandos, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{1 \cdot 3} & = & \frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{3} \\ \frac{1}{3 \cdot 5} & = & \frac{1/2}{3} + \frac{-1/2}{5} \\ \frac{1}{5 \cdot 7} & = & \frac{1/2}{5} + \frac{-1/2}{7} \\ \dots & & \dots \\ \frac{1}{997 \cdot 999} & = & \frac{1/2}{997} + \frac{-1/2}{999} \\ \frac{1}{999 \cdot 1001} & = & \frac{1/2}{999} + \frac{-1/2}{1001} \end{array}$$

Sumando todas estas igualdades, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1001} &= \frac{1/2}{1} + \\ + \frac{-1/2}{1001} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2002} = \frac{1000}{2002} = \frac{500}{1001} = \overline{0,499500} \end{aligned}$$

Fácilmente se comprueba la igualdad sin más que poner el numero decimal periódico puro dado en forma de fracción:

$$\overline{0,499500} = \frac{499500}{999999} = \frac{500 \cdot 27 \cdot 37}{1001 \cdot 27 \cdot 37} = \frac{500}{1001}$$

Por tanto, la igualdad que plantea el problema es verdadera.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Dados en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A(2, 3, 5)$ y $B(1, 0, 8)$, halla:
 - a) Las componentes de los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$.
 - b) Dos puntos C y D tales que $\overrightarrow{CD}$ sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$.
 - c) El extremo F de un vector fijo $\overrightarrow{EF}$ tal que sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$, siendo $E(-3, 6, -9)$.
 - d) El origen G de un vector fijo $\overrightarrow{GH}$ tal que sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$, siendo $H(3, 2, 9)$.
- 2. Dados los vectores libres $\vec{u} = (5, -2, 3)$ y $\vec{v} = (-4, 2, 1)$:
 - a) Dibuja un representante de cada uno de ellos y de su suma.
 - b) ¿Cuál es el extremo de $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$ y $A(0, 2, 0)$?
 - c) ¿Cuáles son las componentes de los vectores $2\vec{u}$ y $3\vec{u} - 5\vec{v}$?
- 3. Halla dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $(5, 3, 5) = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ y $(3, 2, 3) = \vec{u} + 2\vec{v}$.
- 4. Comprueba que son una base los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (1, 0, 2)$; $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ y $\vec{w} = (0, 2, -3)$. Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{x} = (1, 1, 1)$ e $\vec{y} = (1, 2, 3)$ respecto de la base anterior.
- 5. Indica para qué valores de t los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$; $\vec{v} = (2, 2, t)$ y $\vec{w} = (t, 0, 0)$ no forman una base de $\mathbb{R}^3$.
- 6. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y tiene como vector direccional el vector $\vec{v} = (6, 5, 4)$. Obtén seis puntos que pertenezcan a dicha recta.
- 7. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $P(1, 1, 0)$ y $Q(1, 0, 1)$.
- 8. Estudia si los puntos $A(3, -4, 2)$, $B(1, 2, 3)$ y $C(-1, 4, 6)$ están alineados.
- 9. Expresa cada una de las siguientes rectas de todas las formas que conozcas:

a) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$

b) $\begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$
- 10. Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta de ecuación $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{2} = -z$.
- 11. Halla la ecuación de los planos, en todas las formas que conozcas, determinados por las siguientes condiciones:
 - a) Plano que pasa por el punto $P(2, -3, 5)$ y tiene como vectores direccionales a $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (3, -2, 1)$.
 - b) Plano que pasa por los puntos $P(3, -1, 0)$ y $Q(1, -1, 3)$ y contiene el vector $\vec{v} = (1, 2, 3)$.
 - c) Plano que contiene los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 0, 2)$ y $C(2, -1, 0)$.
- 12. Escribe las ecuaciones paramétricas del plano: $3x - y + 2z = 10$.
- 13. Escribe la ecuación implícita o general del plano: $x = 3 - t$, $y = 2 + s$, $z = t + s$.



SOLUCIONES

1. a) Los componentes de los vectores pedidos son:

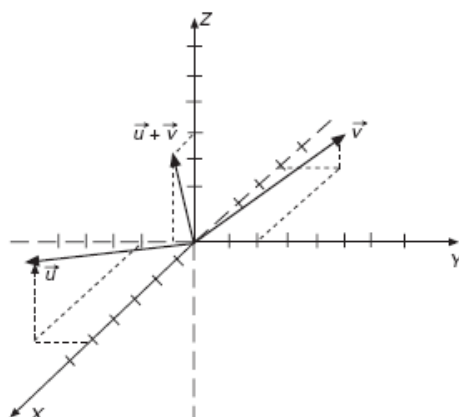
$$\vec{AB} = (-1, -3, 3) \text{ y } \vec{BA} = (1, 3, -3)$$

b) Existen infinitas parejas de puntos C y D que cumplan la condición pedida. Por ejemplo, $C(0,0,0)$ y $D(-1,-3,3)$.

c) Sea $F(a,b,c)$, debe cumplirse: $(a+3, b-6, c+9) = (-1, -3, 3)$. Luego $a = -4, b = 3$ y $c = -6$.

d) Sea $G(a', b', c')$, debe cumplirse: $(3-a', 2-b', 9-c') = (-1, -3, 3)$. Por tanto, $a' = 4, b' = 5, c' = 6$.

2. a) El vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ el $\vec{u} + \vec{v} = (1, 0, 4)$. Un representante de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v}$ puede verse en el dibujo.



b) Las coordenadas de $\vec{AB} = \vec{u} - \vec{v}$ son: $\vec{AB} = (9, -4, 2)$

Llamando $B = (a, b, c)$, se tiene:

$$(a-0, b-2, c-0) = (9, -4, 2).$$

Por tanto, $a = 9, b = -2, c = 2$.

c) Las coordenadas de los vectores buscados son:

$$2\vec{u} = 2(5, -2, 3) = (10, -4, 6)$$

$$3\vec{u} - 5\vec{v} = 3(5, -2, 3) - 5(-4, 2, 1) =$$

$$= (15, -6, 9) - (20, 10, 5) = (35, -16, 4).$$

3. Resolvemos el sistema vectorial
$$\begin{cases} 2\vec{u} + 3\vec{v} = (5, 3, 5) \\ \vec{u} + 2\vec{v} = (3, 2, 3) \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por -2 y sumando a la primera se obtiene $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

Con este vector sustituido en la segunda ecuación se obtiene $\vec{u} = (1, 0, 1)$.

Por tanto, los vectores buscados son $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

4. Los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ forman una base, ya que el rango de la matriz formada por sus filas es tres, al ser:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

Las coordenadas del vector $\vec{x}=(1,1,1)$ respecto de la base anterior son los escalares a, b y c , que cumplen:

$$(1, 1, 1) = a(1, 0, 2) + b(-1, 1, 2) + c(0, 2, -3)$$

Operando y resolviendo el sistema resultante se obtiene: $a = 12/11, b = 1/11, c = 5/11$.

Análogamente, el vector $\vec{y}=(1,2,3)$ tiene las siguientes coordenadas respecto de la base anterior:

$$a = 19/11, b = 8/11 \text{ y } c = 7/11$$

5. El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & t \\ t & 0 & 0 \end{vmatrix}$ vale $t^2 - 2t$.

Si la expresión anterior es nula, los tres vectores no forman base de $\mathbb{R}^3$.

Por tanto, $t^2 - 2t = 0$, es decir, para $t = 0$ y $t = 2$.

6. Las distintas expresiones de la recta buscadas son:

- Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbb{R}$

- Ecuación continua: $\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}$

- Ecuación como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} 5x - 6y = -7 \\ 2x - 3z = -7 \end{cases}$$

En la ecuación paramétrica pueden obtenerse los puntos dando valores a t . Así,

- $t = 0$ $P_0 = (1, 2, 3)$
- $t = 1$ $P_1 = (7, 7, 7)$
- $t = 2$ $P_2 = (13, 12, 11)$
- $t = -1$ $P_4 = (-5, -3, -1)$
- $t = -2$ $P_5 = (-11, -8, -5)$
- $t = 3$ $P_6 = (19, 17, 15)$

7. La recta viene determinada por el punto $P(1,1,0)$ y el vector $\vec{v}=PQ=(0,-1,1)$.

Las ecuaciones de la citada recta son:

• Paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

• Intersección de planos

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

8. La recta determinada por los puntos A y B tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-3}{-1}$$

Al sustituir las coordenadas del punto C en la recta anterior, se tiene:

$$\frac{-1-1}{2} \neq \frac{4-2}{-6} \neq \frac{6-3}{-1}$$

Por tanto los puntos no están alineados.

9. a) Ecuación paramétrica $\begin{cases} x=2+t \\ y=2-t \\ z=4+3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Ecuación como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 3x-z=2 \end{cases}$$

- b) Ecuación paramétrica $\begin{cases} x=-1+5t \\ y=-2+2t \\ z=t \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$

- c) Ecuación continua: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$

Ecuación como intersección de dos planos: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=1 \end{cases}$

10. Dos rectas paralelas tienen vectores directores iguales o proporcionales. La recta pedida tiene por ecuación $\frac{x}{-2} = \frac{y}{2} = -z$

11. La solución es:

a) La ecuación es: $0 = \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = x + y - z + 6$

b) El plano viene determinado por el punto $P(3, -1, 0)$ y los vectores $\vec{u} = \vec{PQ} = (-2, 0, 3)$ y $\vec{v} = (1, 2, 3)$. Su ecuación es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6x - 9y + 4z - 27$$

c) El plano viene determinado por el punto $A(1, 2, 3)$ y los vectores $\vec{u} = \vec{AB} = (-2, -2, -1)$ y $\vec{v} = \vec{AC} = (1, -3, -3)$. Su ecuación es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 3x - 7y + 8z - 13$$

12. Pueden ser: $\begin{cases} x = \\ y = -10 + 3t + 2s, \text{ con } t \text{ y } s \in \mathbb{R} \\ z = s \end{cases}$

13. La ecuación es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y + z - 1$$

- 14. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, -4, 0)$ y contiene la recta:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$$

- 15. En cada uno de los siguientes apartados determina la ecuación del plano correspondiente:

a) Plano que pasa por los puntos $A(2, 1, 2)$ y $B(0, 1, -1)$, y es paralelo al eje OY .

b) Plano que contiene a las rectas r y s :

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = -1-t \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x+2y = 5 \\ z+1 = 0 \end{cases}$$

c) Plano que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralelo al plano $x - y + z = 4$.

- 16. Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{7}$$

- 17. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 0, -2)$ y es paralela a los planos: $x - y - 3z = 1$; $x - 3y + z = 5$.

- 18. Estudia la posición relativa de los planos en cada uno de los siguientes apartados:

a)
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x = 1 \end{cases}$$

b) $\pi_1 \equiv x - 2y + z = 3$; $\pi_2 \equiv 2x + y = 4$; $\pi_3 \equiv 5y - 2z = -2$

c)
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -8 \\ 2x - y + z = 6 \\ 4x - 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

- 19. Determina, en cada caso, la posición relativa de la recta y el plano:

a) $\pi \equiv 3x - 2y + z = 3$ y $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+3$

b) $\pi \equiv \begin{cases} x = 3+2t-4s \\ y = -2-t+3s \\ z = 1-t \end{cases}$ y $r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(2, 1, -4)$

- 20. Estudia si las rectas $r: \begin{cases} 2x+z=9 \\ y=1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x+y=0 \\ -x+2y+2z=5 \end{cases}$ se cortan, son paralelas o se cruzan.

Halla el plano que contiene a s y es paralelo a r .

- 21. Estudia, según los valores de b , la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(-3, 1, b) \quad y \quad s \equiv \frac{x+1}{3} = -y+1 = z$$

- 22. Sea m un número real; discute según los valores de m , la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-my+z=2-m \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x+2z=2-m$.

SOLUCIONES

14. El plano tiene por ecuación
$$\begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 11x + 2y - 3z - 14 = 0.$$

15. a) El plano tiene por ecuación
$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 2z - 2 = 0$$

b) Las rectas dadas se cortan en el punto $(1, 2, -1)$. el plano pedido tiene por ecuación

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y + 3z - 2 = 0$$

c) Todos los planos paralelos al dado tienen por ecuación $x - y + z + D = 0$, obligando a que pase por el punto $(1, 0, 1)$ hallamos que $D = -2$ y el plano buscado tiene por ecuación $x - y + z - 2 = 0$

16. Estas rectas son paralelas pues tiene vectores directores iguales o proporcionales. Para hallar la ecuación del plano que las contiene tomamos uno de los vectores y un punto de cada una de ellas, con lo que tenemos otro vector y un punto. El plano tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ -1 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 4y + 3z + 2 = 0.$$

17. La recta paralela a estos planos estará en la intersección de dos planos paralelos a estos de la forma $\begin{cases} x - y - 3z + D = 0 \\ x - 3y + z + K = 0 \end{cases}$ hallamos las constantes D y K obligando a que pasen por el punto

$(0, 0, -2)$ y obtenemos la recta de ecuaciones: $\begin{cases} x - y - 3z - 6 = 0 \\ x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$

18. a) Los planos se cortan dando una recta de ecuaciones $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x = 1 \end{cases}$

b) Los planos se cortan dando una recta de ecuaciones $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$

c) Los planos se cortan en el punto $(1, -1, 3)$

19. a) El plano y la recta se cortan en el punto $(\frac{5}{2}, 1, \frac{-5}{2})$

b) el plano y la recta se cortan en el punto $(\frac{5}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{-8}{9})$

20. Las rectas se cruzan. El plano pedido tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow 4x+7y+2z-5=0$$

21. Estudiamos la posición relativa de estas rectas estudiando el determinante formado por el vector director de una de las rectas, el vector director de la otra y el vector de un punto de una de las rectas a un punto de la otra, de este modo:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & b \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = b+1$$

Si $b = -1$ las rectas son coplanarias, en este caso se cortan.

Si $b \neq -1$ las rectas no son coplanarias, es decir se cruzan en el espacio.

22. Discutimos el sistema formado por la ecuación del plano y las ecuaciones de la recta y obtenemos:

Si $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado por lo que la recta y el plano se cortan en un punto.

Si $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado por lo que la recta está contenida en el plano.

SOLUCIONES

23. Sean los valores de a que hagan el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ distinto de cero.

El determinante anterior vale $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$, es distinto de cero para cualquier valor diferente de uno.

24. La ecuación de la recta s es: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{5}$

La intersección de s con el plano π es el punto $-\frac{5}{8}, -\frac{39}{16}, -\frac{1}{16}$

25. La intersección de s con el plano π es el punto $-\frac{5}{8}, -\frac{39}{16}, -\frac{1}{16}$

El vector director de la recta pedida será proporcional al vector director de la recta determinada por los dos planos, $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

La ecuación de la recta pedida es:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$$

26. La recta viene determinada por el punto $(4, 5, 6)$ y el vector $\vec{v} = (1, 3, 1)$, y su ecuación es:

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-6}{1}$$

27. La solución es:

a) La ecuación del plano que pasa por los puntos medios $(3/2, 4, 0)$, $(5/2, 5, 3/2)$, $(4, 7/2, 3/2)$ y $(3, 5/2, 0)$ es $6x + 6y - 8z - 33 = 0$.

b) La arista CB tiene por ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 0 \end{array} \right\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

La otra arista AD tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}.$$

El plano del apartado a) es paralelo a las rectas anteriores, ya que ninguna de las dos rectas corta al plano.

28. a) La recta r corta al plano π si $m \neq -\frac{23}{7}$

b) La recta y el plano son paralelos si $m = -\frac{23}{7}$ y $n \neq \frac{9}{7}$.

c) La recta está contenida en el plano si $m = -\frac{23}{7}$ y $n = -\frac{23}{7}$.

29. El haz de planos de arista r tiene por ecuación:

$$(5x - 3y + 2z - 5) + \lambda(2x - y - z - 1) = 0$$

Si el haz incide con el punto $(0, 0, 1)$, se cumple:

$$2 - 5 + \lambda(-1 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -3/2$$

Para este valor $\lambda = -3/2$, el plano buscado es:

$$4x - 3y + 7z - 7 = 0$$

30. Las rectas se cruzan en el espacio al ser cuatro el rango de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

31. La solución queda:

Si $m = -4$, las rectas se cortan en un punto $x = 0$, $y = 3/2$, $z = -1/2$.

Si $m \neq -4$ las rectas se cruzan en el espacio.

32. La solución es:

a) Si $m \neq -2$, se cortan en un punto.

Si $m = -2$, se cortan dos a dos.

b) Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, se cortan en un punto.

Si $m = 0$, dos planos son paralelos y el otro corta a los anteriores.

Si $m = 1$, los planos se cortan en una recta.

c) Si $m \neq 7$, se cortan en un punto.

Si $m = 7$, se cortan en una recta.

d) Si $m \neq 1$, se cortan en un punto.

Si $m = 1$, se cortan dos a dos.

33. El punto A, punto de corte del plano y la recta del enunciado, tiene por coordenadas: $A(2, 1, -3)$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es:

$$\left. \begin{array}{l} x=2 \\ y=1+t \\ z=-3+6t \end{array} \right\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

34. Queda:

Entendemos por rectas coplanarias aquellas que están en un plano, es decir, aquellas rectas pueden generar un único plano.

De las cuatro posiciones relativas de dos rectas en el espacio, las que no son coplanarias son las rectas que se cruzan.

Dos rectas que se cruzan son:

$$r_1: \begin{cases} 2x + y = -5 \\ 4x - z = -10 \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} 2y - z = -7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

35. Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ y $P_4(x_4, y_4, z_4)$, cuatro puntos cualesquiera del espacio. Los puntos medios de los lados del cuadrilátero formado por P_1, P_2, P_3 , y P_4 tienen por coordenadas.

$$M_1 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

$$M_2 = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2} \right)$$

$$M_3 = \left(\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2}, \frac{z_3 + z_4}{2} \right)$$

$$M_4 = \left(\frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{y_4 + y_1}{2}, \frac{z_4 + z_1}{2} \right)$$

Los vértices M_1, M_2, M_3 y M_4 forman un paralelogramo ya que los vectores $\overrightarrow{M_1 M_2}$ y $\overrightarrow{M_4 M_3}$ son iguales; de igual forma que $\overrightarrow{M_4 M_1}$ y $\overrightarrow{M_2 M_3}$.

Los vectores anteriores tienen por coordenadas:

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_4 M_3} = \left(\frac{x_3 - x_1}{2}, \frac{y_3 - y_1}{2}, \frac{z_3 - z_1}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{M_4 M_1} = \overrightarrow{M_2 M_3} = \left(\frac{x_4 - x_2}{2}, \frac{y_4 - y_2}{2}, \frac{z_4 - z_2}{2} \right)$$

Unidad 6 – Geometría euclídea. Producto escalar

PÁGINA 131

cuestiones iniciales

1. Determina las ecuaciones de las rectas del plano perpendicular y paralela a la recta de ecuación $4x - 3y + 6 = 0$ y que pasan por el punto $(2, 1)$.
2. Halla la distancia del punto $P(2, -3)$ a la recta de ecuación $3x - 4y - 3 = 0$.
3. Halla la distancia entre las rectas paralelas $r: 2x + 3y - 5 = 0$ y $s: 2x + 3y + 8 = 0$.
4. Halla el punto simétrico de $P(3, 2)$ respecto de la recta $2x + y - 3 = 0$.
5. Halla el área del cuadrado, dos de cuyos lados están en las rectas $4x - y + 5 = 0$ y $8x - 2y + 12 = 0$.

SOLUCIONES

1. La recta $4x - 3y + 6 = 0$ tiene de pendiente $m = \frac{4}{3}$.

- Paralela: $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow 4x - 3y - 5 = 0$
- Perpendicular: $y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow 3x + 4y - 10 = 0$

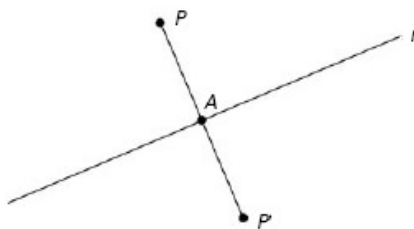
2. La distancia viene dada por la expresión:

$$d(P, r) = \frac{|3(2) + (-4)(-3) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

3. Calculamos la distancia del punto $(1, 1)$ de la recta r , a la recta s .

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \approx 3,61$$

4. La solución es:



Calculamos el punto A como intersección de la recta dada y la perpendicular a esta que pasa por P.

Las coordenadas del punto A son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \text{ . Luego } A(1, 1)$$

El punto $P'(x', y')$ simétrico de P tiene por coordenadas: $x' = -1, y' = 0$.

5. Las rectas son paralelas y la longitud del lado del cuadrado coincide con la distancia entre ambas rectas.

Esta distancia la calculamos como la distancia del punto $(-1, 1)$ de la recta $4x - y + 5 = 0$ a la otra recta $8x - 2y + 12 = 0$. La distancia es:

$$d(P, s) = \frac{|8(-1) - 2(1) + 12|}{\sqrt{8^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{68}}$$

El área del cuadrado es 0,06 unidades cuadradas.

PÁGINA 145

ACTIVIDADES

■ Busca analogías en el archivo de tu experiencia que te sean útiles en la resolución de los siguientes problemas:

1. **El manantial oculto.** En una antigua ciudad amurallada, de forma rectangular, existía en un punto intramuros un manantial que se encontraba a 2 100 m de la esquina superior izquierda, a 600 m de la esquina superior derecha y a 1 800 m de la esquina inferior derecha. El manantial actualmente ha desaparecido. ¿A qué distancia se encontraría de la esquina inferior izquierda?

2. **Número oculto.** La siguiente expresión esconde un número conocido. ¿Sabes cuál es?

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

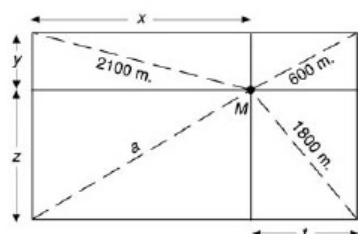
3. **Monedas.** ¿Es posible colocar 18 monedas en 9 filas de manera que cada fila contenga 4 monedas?

4. **Tantos por ciento.** Parte de los 8 000 habitantes de un pueblo se va de vacaciones en verano. De los que quedan, al 63,636363...% les gusta la música y al 22,297297297...% les gusta usar pantalones vaqueros. ¿Cuántos habitantes se fueron de vacaciones en verano?

SOLUCIONES

1. Queda:

Denotando con x , y , z , t los lados de los distintos triángulos rectángulos que se formen y con a la distancia que queremos hallar, al aplicar el teorema de Pitágoras, obtenemos:



$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2.100^2 \\ -y^2 + t^2 &= 600^2 \\ z^2 + t^2 &= 1.800^2 \\ x^2 + z^2 &= a^2 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 2.100^2 \\ -y^2 - t^2 = -600^2 \\ \hline x^2 - t^2 = 2.100^2 - 600^2 \\ z^2 + t^2 = 1.800^2 \\ \hline x^2 + z^2 = 2.100^2 - 600^2 + 1.800^2 \end{array}$$

Entre esta última igualdad obtenida y la última igualdad del sistema, obtenemos:

$$a^2 = 2.100^2 - 600^2 + 1.800^2 \Rightarrow a = 2.700 \text{ m}$$

2. Llamando x a la expresión dada, obtenemos:

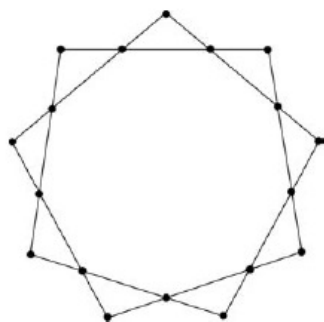
$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$\Rightarrow x - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Luego $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi = \text{numero de oro.}$

3. Queda:



En la figura puedes ver 18 monedas colocadas en 9 filas y con 4 monedas en cada fila.

4.

$$63,6363 \dots = \frac{6300}{99} = \frac{700}{11}$$

$$22,297297 \dots = \frac{22275}{999} = \frac{2475}{111} = \frac{825}{37}$$

Al 63,66% de los que queden les gusta la música, es decir al $\frac{700}{11}\%$ les gusta la música.

Al 22,297% de los que queden les gusta usar pantalones vaqueros, es decir al $\frac{825}{37}\%$ les gusta usar pantalones vaqueros.

$$\text{Les gusta la música: } \frac{700}{11} \cdot x = \frac{7}{11} \cdot x$$

Por lo tanto, x ha de ser múltiplo de 11 y de 148.

Puede ser $x=1.628$; $x=3.256$; $x=4.884$; $x=6.512$.

Se fueron de vacaciones: 6.372 si $x=1.628$; 4.744 si $x=3.256$; así sucesivamente.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -5, 3)$; $\vec{v} = (4, -3, 2)$ y $\vec{w} = (0, 2, -7)$:
 - a) Calcula los productos escalares $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ y $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
 - b) Determina el módulo de cada uno de los vectores.
 - c) Halla los ángulos formados por los vectores anteriores, tomados dos a dos.
- 2. Se consideran los vectores $\vec{u} = (2, 2, 2)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Halla todos los vectores, con módulo unidad, que forman un ángulo de 30° con $\vec{u}$ y de 45° con $\vec{v}$.
- 3. Dados los vectores unitarios $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, que satisfacen la condición $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, calcula el valor de la expresión $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.
- 4. Calcula un vector $\vec{u}$ que satisfaga, en cada caso, las siguientes condiciones:
 - a) Que sea proporcional al vector $\vec{v} = (2, -1, 1)$ y además cumpla que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.
 - b) Que sea perpendicular a los vectores $\vec{v} = (2, -1, 1)$ y $\vec{w} = (18, -22, -5)$ y además $|\vec{u}| = 14$.
 - c) Que sea perpendicular al eje OZ y cumpla $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -4$, siendo $\vec{v} = (3, -1, 5)$ y $\vec{w} = (1, 2, -3)$.
 - d) Que cumpla $\vec{u} \cdot \vec{a} = -5$, $\vec{u} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{u} \cdot \vec{c} = 20$, siendo los vectores $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, -3, 2)$ y $\vec{c} = (3, 2, -4)$.
- 5. Encuentra un vector que sea perpendicular a $\vec{u} = (3, -2, 5)$ y que dependa linealmente de $\vec{v} = (1, -1, 3)$ y $\vec{w} = (-2, 2, 1)$.
- 6. Calcula el ángulo formado por las rectas de ecuaciones:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-1} \quad s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$$
- 7. Calcula el ángulo formado por el plano $\pi: x - y + z = 0$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$.
- 8. Calcula el ángulo que forman los planos $\pi_1: x + y - 2z = 3$ y $\pi_2: -x + y + 2z = 2$.
- 9. Halla la distancia del punto $(4, 5, 6)$ al plano $\pi: x - 2y + 3z = 5$.
- 10. Halla los siguientes elementos geométricos:
 - a) Ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 3, -1)$, es perpendicular al plano $\pi: x + z = 2$ y paralelo al eje OX .
 - b) Ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano $\pi: x - y - z + 3 = 0$ y al plano OXZ .
 - c) Ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano $\pi: x - 2y + 3 = 0$.
 - d) Ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 0, 0)$ y es perpendicular a la recta

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$$



SOLUCIONES

1. Queda:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 + 15 + 6 = 29$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 - 10 - 21 = -31$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 - 6 - 14 = -20$.

b) Los módulos de los vectores son:

$$|\vec{u}| = \sqrt{4 + 25 + 9} = \sqrt{38}; \quad |\vec{v}| = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}.$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{0 + 4 + 49} = \sqrt{53}$$

c) Los ángulos de los vectores, tomados dos a dos, son:

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{29}{\sqrt{38} \sqrt{29}} = \frac{29}{33,2} = 0,87$$

$$\text{luego } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 29^\circ 17' 7''$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{-31}{\sqrt{38} \sqrt{53}} = \frac{-31}{44,88} = -0,69$$

$$\text{luego } (\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = 133^\circ 41' 27,2''$$

$$\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = \frac{-20}{\sqrt{29} \sqrt{53}} = \frac{-20}{39,2} = -0,51$$

$$\text{luego } (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = 120^\circ 40' 24,4''$$

2. Sea $\vec{w} = (x, y, z)$ el vector buscado. Debe cumplir:

$$\bullet \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\bullet \quad \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \cos 30^\circ = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| |\vec{w}|} = 0,866$$

$$\text{luego } \frac{2x + 2y + 2z}{\sqrt{12} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,866$$

$$\bullet \quad \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = \cos 45^\circ = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} = 0,707$$

$$\text{luego } \frac{x + z}{\sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,707$$

La solución del sistema
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \\ x + z = 1 \end{cases}$$
 son los vectores:

$$\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{4} \right) \text{ y } \left(\frac{\sqrt{2}-2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{4} \right)$$

3. Se cumple que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{w} = 1$ y $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$.

Sustituyendo en la expresión $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u} &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (-\vec{u} - \vec{v}) + \\ &+ (-\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} - \\ &- \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} = -\vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} = \\ &= -1 - 1 - \vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\end{aligned}$$

4. Queda:

a) El vector $\vec{u}$ es de la forma $\vec{u} = (2k, -k, k)$ y como cumple $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ se tiene $4k + k + k = 3; 6k = 3; k = 1/2$.

b) El vector $\vec{u}$ será proporcional a $\vec{v} \times \vec{w}$ al ser perpendicular a ambos. Luego $\vec{u} = k(\vec{v} \times \vec{w}) = (27k, 28k, -26k)$. además cumple $|\vec{u}| = 14$, lo cual conduce a $729k^2 + 784k^2 + 676k^2 = 196$. por tanto, $k = 14 / \sqrt{2.189} \approx 0,3$
por tanto, el vector $\vec{u}$ buscado es $\vec{u} = (8; 8, 4; -7, 8)$

c) El vector $\vec{u} = (a, b, c)$ debe cumplir:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 3a - b + 5c = 9 \\ a + 2b - 3c = -4 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = 2, b = -3, c = 0$.

Por tanto, el vector $\vec{u}$ buscado es $\vec{u} = (2, -3, 0)$

d) El vector $\vec{u} = (a, b, c)$ debe cumplir:

$$\begin{cases} 2a - b + 3c = -5 \\ a - 3b + 2c = -11 \\ 3a + 2b - 4c = 20 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = 2, b = 3$ y $c = -2$

Por tanto, el vector $\vec{u}$ buscado es $\vec{u} = (2, 3, -2)$.

5. Todos los vectores de la forma (a, b, c) que cumplen las condiciones de problema están sujetos a las siguientes condiciones:

$$(a, b, c) \cdot (3, -2, 5) = 0$$

$$(a, b, c) = (1, -1, 3) + n(-2, 2, 1)$$

Operando, se encuentra que todos los vectores (a, b, c) que cumplen las condiciones anteriores son la de forma $(-7t, 7t, 7t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

Para encontrar uno de ellos basta fijar un valor del parámetro t .

6. Los vectores direccionales son $\vec{u}=(2,-2,-1)$ y $\vec{v}=(-1,3,-2)$. el ángulo que forman es:

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-6}{\sqrt{9} \sqrt{14}} = -0,535;$$

$$\text{luego } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 122^\circ 18' 41,5''$$

7. El vector normal del plano $\vec{u}=(1,-1,1)$ y el direccional de la recta $\vec{v}=(2,-1,1)$ el ángulo que forman el plano y la recta es:

$$\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{6}{\sqrt{3} \sqrt{14}} = 0,926;$$

$$\text{luego } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 67^\circ 47' 32,44''$$

8. Los vectores normales de los planos son $\vec{u}=(1,1,-2)$ y $\vec{v}=(-1,1,2)$. El ángulo que forman es:

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-4}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = -0,667$$

$$\text{luego } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 131^\circ 47' 37,1''$$

9. La distancia es:

$$d = \frac{|4 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = 1,871$$

10. Queda:

- a) El plano viene determinado por el punto $(1,3,-1)$ y los vectores $(1,0,1)$ y $(1,0,0)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y-3=0$$

- b) El plano viene determinado por el punto $(0,0,0)$ y los vectores $(1,-1,-1)$ y $(0,1,0)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+z=0$$

c) La recta viene determinada por el punto $(0,0,0)$ y el vector $(1,-2,0)$. Su ecuación es:

$$\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{array} \right\} t \in \mathbb{R}$$

d) El plano tiene como vector normal $\vec{n}=(0,1,1)$. Su ecuación es de la forma:

$$y + z + d = 0$$

Al pasar por el punto $(-1,0,0)$ se cumple: $0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

La ecuación del plano buscada es: $y + z = 0$.

- 11. Encuentra, en la recta que pasa por los puntos $A(-1, 0, 1)$ y $B(1, 2, 3)$, un punto tal que su distancia al punto $C(2, -1, 1)$ sea de tres unidades.
- 12. Halla la ecuación del plano π que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(3, -2, 2)$, y es perpendicular al plano $\pi_1: 2x - y - z = 0$, y las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π . Determina los puntos de r cuya distancia a π sea $\sqrt{3}$.
- 13. Halla el punto simétrico del punto $A(1, -3, 7)$ respecto de la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{2}$.
- 14. Calcula la ecuación del plano en el que se encuentra el triángulo de vértices A, B y C , siendo:
 A : El simétrico del punto $P(1, 2, 3)$ respecto al plano de ecuación $x = z$.
 B : La proyección ortogonal del punto $Q(2, 1, 3)$ sobre el plano $z = 0$.
 C : El origen de coordenadas.
- 15. Dados los planos
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

 a) Analiza su posición relativa.
 b) Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto a la recta de intersección de los dos primeros planos.
 c) Halla la proyección ortogonal del origen sobre el plano $x + 2y - z = 1$.
- 16. Halla las proyecciones siguientes:
 a) Del punto $P(4, -2, 1)$ sobre el plano $3x - 2y - 2z = -2$.
 b) Del punto $P(4, -2, 1)$ sobre la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-7}{-1}$.
 c) De la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ sobre el plano $x + 2y + z = 1$.
- 17. Encuentra los puntos situados a distancia 5 del origen y pertenecientes a la recta que pasa por los puntos $(1, 2, 5)$ y $(6, 5, 6)$.
- 18. Halla la distancia que hay desde el origen de coordenadas al plano que contiene las rectas:
 $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4}$ $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{5}$
- 19. Calcula la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre el plano $x + y + z = 1$.
- 20. Sea P_1 el punto $(1, 0, -1)$, P_2 el punto simétrico de P_1 respecto del plano $x - 2y = 0$ y P_3 el punto simétrico de P_1 respecto del plano $x + 2y + z = 1$. Halla la ecuación del plano que pasa por P_1, P_2 y P_3 .
- 21. Halla el punto de la recta $\frac{x-5}{3} = y + 2 = \frac{z}{-1}$ que está más próximo al punto $(1, 0, 1)$.
- 22. El plano OXZ es mediatriz de un segmento, uno de cuyos extremos es el punto $P(1, 6, -4)$. Halla el otro extremo.
- 23. Halla las coordenadas del punto de la recta $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A(-4, 2, 2)$.

SOLUCIONES

11. Un punto genérico de la recta que pasa por A y B tiene por expresión: $(-1+2t, 2t, 1+2t)$

La distancia de este punto al punto C es 3, por tanto: $\sqrt{(2t-3)^2 + (2t+1)^2 + (2t)^2} = 3$

Operando, se obtiene $t = \frac{1}{2}$ y $t = \frac{1}{6}$. Estos valores de t dan los puntos: $(0, 1, 2)$ y $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

12. El plano pedido viene determinado por el punto $(1, 1, 1)$ y los vectores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1, -1)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = x + y + z - 3 = 0$$

La recta r viene determinada por el punto $(1, 1, 1)$ y el vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$, su ecuación en forma continua es:

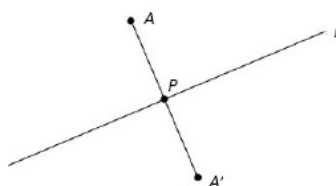
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

Un punto cualquiera de r es de forma $(1+t, 1+t, 1+t)$. Su distancia al plano π al ser $\sqrt{3}$ se cumple:

$$\frac{|(1+t) + (1+t) + (1+t) - 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$$

Operando, se obtiene $t = 1$ y $t = -1$ y los puntos buscados son $(2, 2, 2)$ y $(0, 0, 0)$.

13. El punto P pertenece a la recta r y es tal que el vector AP y el director de la recta son perpendiculares.



Para la determinación del punto P. procedemos así:

- Tomamos un punto $P(1+t, -3+t, 4+2t)$ genérico de la recta r.
- Formamos el vector $\vec{AP}(t, t, 2t-3)$.
- Este vector y $\vec{u} = (1, 1, 2)$ son perpendiculares, por tanto

$$\vec{AP} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow t + t + 4t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

El valor $t = 1$ conduce al punto $P(2, -2, 6)$.

Determinamos A' considerando que P es el punto medio del segmento AA' . Obtenemos $A'(3, -1, 5)$.

14. El punto A simétrico del punto $P(1,2,3)$ respecto del plano de ecuación $x=z$ tiene por coordenadas $A(3,2,1)$.

El punto B proy. ortogonal de $Q(2,1,3)$ sobre el plano $z=0$ tiene por coordenadas $B(2,1,0)$.

La ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3,2,1)$, $B(2,1,0)$ y $C(0,0,0)$ es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z = 0$$

15. Queda:

a) El rango de la matriz de los coeficientes es dos y el de la matriz ampliada es tres, por tanto, los planos se cortan dos a dos.

b) La recta $r: \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ expresada en forma continua es $\frac{x+1/3}{1} = \frac{y-2/3}{1} = \frac{z}{3}$

Procediendo como en la actividad numero 13. Se obtiene el punto de coordenadas

$(\frac{-8}{11}, \frac{14}{11}, \frac{-2}{11})$ como el simétrico del origen respecto a la recta en cuestión.

c) La proyección ortogonal del origen sobre el plano $x+2y-z=1$, es el punto de intersección entre el plano $x+2y-z=1$ y la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano anterior.

La ecuación citada de la recta es: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$

La proyección ortogonal es la solución del sistema $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ que es: $(1/6, 1/3, -1/6)$.

16. Queda:

a) Es la solución del sistema $\begin{cases} 3x-2y-2z=-2 \\ 2x+3y=2 \\ y-z=-3 \end{cases}$ que es: $(\frac{20}{17}, -\frac{2}{17}, \frac{49}{17})$

b) Sea $Q(3t+1, 5t+1, -t+7)$ un punto genérico de la recta. El punto Q proyección de P debe cumplir: $QP \cdot (3, 5, -1) = 0$. Por tanto, $35t = 0 \Rightarrow t = 0$, el punto buscado es $(1, 1, 7)$.

c) Hallamos el plano que contiene a la recta y es perpendicular al plano dado: $3x-4y+5z=1$. La recta pedida es la intersección de este plano y del dado:

$$\begin{cases} 3x-4y+5z=1 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$$

17. La recta que pasa por los puntos $(1,2,5)$ y $(6,5,6)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}.$$

El punto $P(5t+1, 3t+2, t+5)$ pertenece a la recta anterior. Los puntos a distancia 5 del origen cumplen $d(P,0)=5$.

Desarrollando $\sqrt{(5t+1)^2 + (3t+2)^2 + (t+5)^2} = 5$ obtenemos $t = -\frac{5}{7}$ y $t = -\frac{1}{5}$.

Los puntos pedidos son $\left(-\frac{18}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{30}{7}\right)$ y $\left(0, \frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right)$.

18. Las rectas se cruzan por tanto no hay ningún plano que las contenga.

19. El punto buscado es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

Donde la solución es el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

20. Las coordenadas de los puntos P_2 y P_3 son:

$$P_2\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -1\right) \text{ y } P_3\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

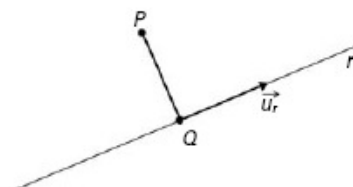
El plano que pasa por P_1 , P_2 y P_3 tiene por ecuación:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2/5 & 4/5 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & -1/3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 2x + y - 4z - 6 = 0$$

21. Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r: \frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$.

El punto buscado será el punto Q; proyección ortogonal del punto P sobre la recta r.

Sea $Q(5+3t, -2+t, -t)$ un punto cualquiera de la recta r.



Los vectores $PQ = (3t+4, t-2, -t-1)$ y $\vec{u}_r = (3, 1, -1)$ son perpendiculares. Se cumple:

$$\vec{PQ} \cdot \vec{u}_r = 0 \Leftrightarrow 9t + 12 + t - 2 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

El punto buscado es $Q(2, -3, 1)$.

22. El punto M proyección del punto $P(1,6,-4)$ sobre el plano OXZ, es decir sobre $y=0$, es el punto solución del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 6 + t \\ z = -4 \end{array} \right\} t \in \mathbb{R}$$

Las coordenadas del punto M son $(1,0,-4)$.

El punto $M(1,0,-4)$ es el punto medio del segmento de extremos $P(1,6,-4)$ y $P'(x',y',z')$.

Las coordenadas de P' son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x' + 1}{2} = 1 \\ \frac{y' + 6}{2} = 0 \\ \frac{z' - 4}{2} = -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = 1 \\ y' = -6 \\ z' = -4 \end{array} \right. \Rightarrow P'(1, -6, -4)$$

23. El punto buscado es la intersección de la recta dada con el plano mediatriz del segmento OA. Este plano tiene por ecuación $2x - y - z + 6 = 0$ y al cortar con la recta dada obtenemos el punto $(3, 7, 5)$.

ACTIVIDADES FINALES

■ 24. Dados los puntos $(1, 2, 3)$ y $(1, 2, 1)$, ¿cuál es el conjunto de puntos que está a igual distancia de ambos?

■ 25. Sea la recta $r: \begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x + y - 4z = 3 \end{cases}$. Halla los puntos de esta recta tales que su distancia al origen de coordenadas es $\sqrt{14}$.

■ 26. Si los puntos $P(2, 1, 2)$ y $Q(6, 1, 4)$ son los vértices opuestos de un cuadrado:

- Calcula el área del cuadrado.
- Obtén la ecuación del plano que pasa por el centro del cuadrado y es perpendicular a la diagonal que pasa por los vértices P y Q .

■ 27. Los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(-1, 0, 0)$ son dos vértices consecutivos de un rectángulo, y los otros dos vértices pertenecen a la recta r que pasa por el punto $C(4, 3, -5)$:

- Halla la ecuación de la recta r y el plano π que contiene al rectángulo.
- Halla las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo.

■ 28. Dada la recta r de ecuación: $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$

- Halla la ecuación del plano que contiene a esa recta y el origen de coordenadas.
- Halla la ecuación del plano que contiene a esa recta y es paralelo al plano $y - 6z + 1 = 0$.
- Halla la ecuación del plano que contiene a esa recta y es perpendicular al plano OYZ .

■ 29. Halla la ecuación de la recta que se apoya en las rectas r y s dadas y pasa por el origen de coordenadas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad s: \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-2}$$

■ 30. Halla la ecuación de la recta que se apoya en las rectas:

$$r: \frac{x-1}{3} = y + 2 = z - 1 \quad s: \begin{cases} z = 4 \\ 2x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

y es paralela a la recta de ecuación:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases}$$



■ 31. Halla la ecuación de la recta contenida en el plano $2x - 2y + 5z = 3$ y perpendicular a la recta $\frac{x+1}{2} = -y + 2 = \frac{z}{3}$ en el punto $(-1, 2, 0)$.



SOLUCIONES

24. El plano que pasa por el punto medio $(1, 2, 2)$, del segmento cuyos extremos son los puntos dados y tiene como vector normal $(0, 0, 2)$.

Su ecuación es $(x-1) \cdot 0 + (y-2) \cdot 0 + (z-2) \cdot 2 = 0$, luego $z=2$.

25. Sea $P(3+2t, 2t, t)$ un punto genérico de la recta r .

Desarrollando la condición $d(P, O) = \sqrt{14}$, obtenemos:

$$\sqrt{(3+2t)^2 + 4t^2 + t^2} = \sqrt{14} \Rightarrow 9t^2 + 12t - 5 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad t = -\frac{5}{3}$$

$$\text{Para } t = \frac{1}{3} \Rightarrow P\left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ y}$$

$$\text{para } t = -\frac{5}{3} \Rightarrow P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

26. Queda:

a) La diagonal d del cuadrado mide $d = \sqrt{4^2 + 0^2 + 4} = \sqrt{20}$

Con este valor de la diagonal, el lado mide $l = \sqrt{10}$ y, por tanto, el área del cuadrado es 10.

- b) El plano pedido pasa por el punto $(4, 1, 3)$ y tiene como vector normal $(4, 0, 2)$. Su ecuación es:

$$4(x-4) + 0 \cdot (y-1) + 2(z-3) = 0 \Rightarrow 2x + z = 11$$

27. Queda:

- a) La recta r viene determinada por el punto $C(4, 3, -5)$ y por el vector $\vec{v} = \vec{QP} = (2, 1, 3)$, y su ecuación es:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$$

El plano es $14x - 25y - z + 14 = 0$.

- b) Los otros vértices del rectángulo son los puntos:

$$\left(\frac{44}{7}, \frac{29}{7}, -\frac{11}{7}\right) \text{ y } \left(\frac{30}{7}, \frac{22}{7}, -\frac{32}{7}\right)$$

28. La ecuación del haz de planos cuya arista es la recta r es:

$$(3x - y + 2z - 6) + t(x + 2y - z - 2) = 0.$$

El plano del haz que pasa por $O(0,0,0)$ cumple:

$$(3 \cdot 0 - 0 + 2 \cdot 0 - 6) + t(0 + 2 \cdot 0 - 0 - 2) = 0 \Leftrightarrow -6 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = -3.$$

Para $t = -3$ el plano buscado es $7y - 5z = 0$.

29. La recta pedida vendrá dada como intersección de los siguientes planos:

- Plano π_1 que contiene a r y al punto $(0, 0, 0)$
- Plano π_2 que contiene a s y al punto $(0, 0, 0)$

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + z = 0$$

$$\pi_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 13x - 10y + 11z = 0$$

La recta tendrá de ecuación:
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 13x - 10y + 11z = 0 \end{cases}$$

30. La recta pedida vendrá dada como intersección del plano π_1 que contiene a r y al vector $\vec{v}(-3, 1, 2)$ y del plano π_2 que contiene a s y al vector $\vec{v}(-3, 1, 2)$

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 9y + 6z - 25 = 0$$

$$\pi_2 = \begin{vmatrix} x & y-7 & z-4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 2y + 7z - 14 = 0$$

La recta tendrá de ecuación:
$$\begin{cases} x - 9y + 6z - 25 = 0 \\ 4x - 2y + 7z - 14 = 0 \end{cases}$$

31. La ecuación del plano perpendicular a la recta $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ que pasa por el punto $(-1, 2, 0)$ es:

$$2(x + 1) + (-1)(y - 2) + 3 \cdot (z - 0) = 0$$

Operando, obtenemos:

$$2x - y + 3z = -4$$

La recta buscada es la que viene dada como intersección de los planos:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 5z = 3 \\ 2x - y + 3z = -4 \end{cases}$$

- 32. Dados el punto $P(3, 5, -1)$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z+1}{4}$, halla un punto Q de la recta dada de modo que la recta PQ sea paralela al plano de ecuación $3x - 2y + z + 5 = 0$.

- 33. Sea el punto $A(1, 0, 0)$ y el plano $\pi: 2x + y - z = 1$. Halla:

- a) La ecuación del plano π' que pasa por A y no corta al plano dado.
b) La distancia entre los planos π' y π .

- 34. Para cada valor de a , los puntos $P(1, 2, 3)$ y $P'(0, 1, a)$ son simétricos respecto a un plano. Halla la ecuación de dicho plano. En particular, encuentra el plano para $a = 2$.

- 35. Sea la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4}$ y el plano $\pi: 2x + 4y + 4z = 5$. Halla:

- a) La distancia entre la recta y el plano.
b) La ecuación del plano perpendicular al dado y que contenga a la recta r .

- 36. Halla la ecuación de la recta paralela al eje OY y que se apoya en las rectas r y s :

$$r: \begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \quad s: x = -y = -z$$

- 37. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y es perpendicular a los planos $x - y + z = 3$ y OXZ .

- 38. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 2, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

- 39. Halla la ecuación de la recta paralela al plano $2x - 2y + 5z = 3$ y perpendicular a la recta $\begin{cases} x + 5y + z = 9 \\ 3y + z = 6 \end{cases}$ en el punto $(1, 1, 3)$.

- 40. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 0, 0)$ y $\vec{w} = (2, 2, p)$, halla el valor de p para el cual los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{w}$ son ortogonales.

- 41. Halla el valor de a para el cual la recta $r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x - 3y + az + 6 = 0$ son paralelos y, en este caso, halla la distancia entre ellos.

- 42. Halla el plano paralelo al plano $2x - y - z + 6 = 0$ y que diste de él $3\sqrt{6}$ unidades.

- 43. ¿Para qué valor de a la distancia entre la recta $r: \begin{cases} x = a + 4t \\ y = 2 \\ z = 5 + 3t \end{cases}$ y el plano $6x - 8z + 10 = 0$ es 3 unidades?

SOLUCIONES

32. Hallamos un plano paralelo al dado pasando por el punto P. cortando el plano con la recta dada obtenemos el punto Q pedido.

El plano tiene por ecuación $3x - 2y + z + 2 = 0$.

Resolvemos el sistema formado por el plano y la recta y obtenemos el punto Q de coordenadas $(-1, -3, -5)$.

33. Queda:

a) El plano que no corta al dado es un paralelo. Este plano pasando por A tiene de ecuación $2x + y - z - 2 = 0$

b) La distancia entre planos paralelos la hacemos tomando un punto de uno de los planos y hallando la distancia al otro y obtenemos que esta distancia es $\frac{1}{\sqrt{6}}$ unidades.

34. El plano buscado es el plano mediatriz del segmento de extremos PP' y tiene por ecuación:

$$x + y(3-a)z + \frac{a^2 - 13}{2} = 0$$

Para $a=2$ el plano tiene por ecuación $2x + 2y + 2z - 9 = 0$

35. Queda:

a) La recta y el plano son paralelos. Para hallar la distancia entre ambos tomamos un punto de la recta y hallamos la distancia de este punto al plano y obtenemos $35/6$ unidades.

b) El plano buscado tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z+3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 18x - 9z - 45 = 0$$

36. Hallamos el plano π_1 que contiene a la recta r y al vector de $OY(0,0,1)$ y hallamos el plano π_2 que contiene a la recta s y al mismo vector y obtenemos que su intersección nos da la recta buscada:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{cases} x + 6z + 5 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

37. El plano pedido tiene por ecuación $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - z + 1 = 0$

38. Hallamos el plano perpendicular a la recta dada y que pase por el punto dado y obtenemos su ecuación $y - z = 0$.

Cortamos la recta dada con el plano y obtenemos el punto $A = (3, 1, 1)$

La recta perpendicular a la dada por el punto P es la recta que pasa por P y A:

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$$

39. El vector de la recta que buscamos es perpendicular al de la recta dada y al vector normal del plano.

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, -1, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, -2, 5) = 0 \end{cases}$$

De este sistema obtenemos un vector de la recta de la forma $(-1, 4, 2)$.

La ecuación de la recta es $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$

40. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{w}) = 0 \Rightarrow p = -3$

41. La recta y el plano son paralelos si el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares de donde obtenemos que $a = -1$.

Para hallar la distancia entre esa recta y ese plano paralelo a ella tomemos un punto de la recta y hallamos la distancia de ese punto y obtenemos $\frac{8}{\sqrt{11}}$ unidades.

42. Todos los planos paralelos al dado son de la forma $2x - y - z + D = 0$.

Tomamos un punto del plano dado, por ejemplo $(0, 0, 6)$, y obligamos a que la distancia de este punto al plano que buscamos sea la dada. Obtenemos:

$$\left| \frac{-6 + D}{\sqrt{6}} \right| = 3\sqrt{6} \text{ de donde } D = 24 \text{ o } D = -12.$$

Los planos buscados tienen por ecuaciones: $2x - y - z + 24 = 0$ o $2x - y - z - 12 = 0$

43. La recta y el plano dado son paralelos. Tomando un punto de la recta, por ejemplo $(a, 2, 5)$ y haciendo la distancia al plano e imponiendo que esta distancia es 3 obtenemos:

$$\left| \frac{6a - 30}{10} \right| = 3 \text{ de donde sacamos los valores de } a: a = 0 \text{ o } a = 10$$

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

- 44. Calcula el ángulo que forman los planos $x + 2y - z = 0$ y $x - 2y + 5z - 3 = 0$.

- 45. Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π , siendo:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \quad \pi: x - y - z = 0$$

- 46. Calcula las coordenadas del punto de la recta r tal que forme un triángulo rectángulo en A con los puntos $A(1, 5, 6)$, $B(7, 6, 6)$, siendo r la recta de ecuaciones $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y - 3z = 2 \end{cases}$.

- 47. Halla el punto simétrico del origen respecto del plano $x + y + z = 1$.

- 48. Halla el punto simétrico del punto $A(2, 0, 1)$ respecto de la recta $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

- 49. Dados el punto $A(1, 0, -1)$ y el plano $\pi: 2x - y + 3z = 4$, halla:

- La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a π .
- El punto simétrico de A respecto a π .
- De los planos que pasan por A y son perpendiculares a π , el plano que pasa por $B(2, 1, 2)$.
- La ecuación del plano que pasa por A y es paralelo a π .

- 50. Halla un punto de la recta $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ que equidiste de los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(0, 4, 2)$.

- 51. Halla el valor de a para que el plano que pasa por el punto (a, a, a) y es perpendicular a los planos $x + y - z = 0$ y $2x + y - z = 2$ diste $\frac{2}{\sqrt{2}}$ unidades del punto $(0, 0, 0)$.

- 52. Dado el plano $\pi: x - y + z = 0$:

- Halla el simétrico del punto $P(1, 0, 1)$ respecto de π .
- Halla la recta simétrica de $r: x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{3}$ respecto de π .

- 53. Determina m , si es posible, para que el plano de ecuación $2mx - 3(m-1)y - (m+3)z + 2m + 4 = 0$ sea ortogonal a la recta de ecuación $2x = y = -2z$.

- 54. Halla las coordenadas del punto simétrico del $(2, 4, 2)$ respecto del punto $(1, 2, 3)$.

- 55. Se consideran los planos de ecuaciones

$$\pi_1: -ax - y + az = 0 \quad \pi_2: (a+3)x + \frac{y}{a} - z = 1 \quad ; \quad a \neq 0$$

- Estudia su posición relativa en función de a .
- Si para $a = -2$ los planos contienen las caras de un cubo, calcula el volumen del cubo.



SOLUCIONES

44. El ángulo que forman los planos es el mismo que el formado por sus vectores normales. Su valor:

$$\cos(\widehat{\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}}) = \frac{\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}}{|\vec{n}_{\pi_1}| |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{1 + (-4) + (-5)}{\sqrt{6} \sqrt{30}} = 0,6$$

Luego el ángulo buscado es de $53^\circ 23' 44,6''$.

45. El ángulo buscado puede calcularse con el vector direccional de la recta $\vec{v} = (2, -1, 3)$ y el normal al plano $\vec{n} = (1, -1, -1)$, a través de la expresión:

$$\sin(\widehat{(r, \pi)}) = \sin(\widehat{(\vec{v}, \vec{n})}) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| |\vec{n}|} = \frac{2 + 1 - 3}{\sqrt{14} \sqrt{3}} = 0$$

Luego el ángulo es 0° y, por tanto, la recta y el plano son paralelos.

46. Consideramos un punto genérico $P\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}t, \frac{4}{3} - \frac{7}{3}t, t\right)$ de la recta r.

Para que los puntos A, B y P formen un triángulo rectángulo en A debe cumplirse que $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = 0$, es decir:

$$\left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}, -\frac{7}{3}t - \frac{11}{3}, t - 6\right) \cdot (6, 1, 0) = 0, \text{ luego } t = 1$$

El punto buscado es $(2, -1, 1)$.

47. El punto proyección de $O(0, 0, 0)$ sobre el plano $x + y + z = 1$ es el punto P solución del sistema formado por el plano y la recta perpendicular a él que pasa por el origen. Es decir, el punto P es solución de

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Por tanto, $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

El punto $O'(x', y', z')$ cumple, con respecto a los puntos O y P la relación:

$$\frac{0 + x'}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{0 + y'}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{0 + z'}{2} = \frac{1}{3}$$

Las coordenadas de O' son $x' = \frac{2}{3}, y' = \frac{2}{3}, z' = \frac{2}{3}$

48. Sea $P(2t, -t+3, t+2)$ un punto genérico de la recta para fijar este punto como punto medio del segmento AA' imponemos la condición $PA \cdot (2, -1, 1) = 0$. Es decir,

$$(2t-2) \cdot 2 + (-t+3) \cdot (-1) + (t+2) \cdot 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

El punto P es $P(2, 2, 3)$.

Las coordenadas de $A'(x', y', z')$ simétrico de A debe cumplir:

$$\frac{x' + 2}{2} = 2, \quad \frac{y' + 0}{2} = 2, \quad \frac{z' + 1}{2} = 3$$

Por tanto, $x' = 2, y' = 4, z' = 5$.

49. Queda:

a) La ecuación de la recta es: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$

- b) El punto P del plano π es el punto medio del segmento AA' es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2y = 1 \\ 3x - 2z = 5 \end{cases}$$

Las coordenadas de P son: $\left(\frac{24}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{1}{14}\right)$

El punto simétrico de A, A' tiene por coordenadas: $\left(\frac{17}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{8}{7}\right)$

- c) El plano buscado $Ax + By + Cz = D$ debe cumplir:

$$\begin{cases} A - C = D \\ 2A + B + 2C = D \\ 2A - B + 3C = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $2x - y + 3z = -1$.

50. Sea $P(t, t+2, 2t+3)$ un punto cualquiera de la recta dada. Se cumple:

$$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow \sqrt{(t-1)^2 + (t+2)^2 + (2t+2)^2} = \sqrt{t^2 + (t-2)^2 + (2t+1)^2}$$

Operando, obtenemos $t = -\frac{2}{5}$.

El punto buscado es $P\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}\right)$. Otra forma de resolver este problema es hallar el punto en el que se corta la recta dada con el plano mediatriz del segmento AB. Es decir:

$$\left. \begin{aligned} x - 4y - z + 9 &= 0 \\ \frac{x}{1} &= \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}\right)$$

51. El plano que pasa por (a, a, a) y es perpendicular a los planos dados tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-a & z-a \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y + z - 2a = 0$$

La condición de la distancia se expresa en la forma:

$$\frac{|0 + 0 - 2a|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |2a| = 2 \Leftrightarrow a = 1 \text{ o } a = -1$$

Los planos son:

$$y + z - 2 = 0 \quad \text{o} \quad y + z + 2 = 0$$

52. Queda:

a) El punto proyección de P sobre el plano π es $M\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Este punto es el punto medio del segmento de extremos $P(1,0,1)$ y $P'(x', y', z')$. Por tanto,

$$\begin{cases} \frac{x' + 1}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{y' + 0}{2} = \frac{2}{3} \\ \frac{z' + 1}{2} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1/3 \\ y' = 4/3 \\ z' = -1/3 \end{cases}$$

b) El simétrico del punto $P_1(1,0,1)$ perteneciente a la recta r es $P'_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

El simétrico del punto $Q_1(2,3,4)$ perteneciente a la recta r es $Q'_1(0,5,2)$.

La ecuación de la recta que pasa por P'_1 y Q'_1 es:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-5}{11} = \frac{z-2}{7}$$

53. El vector normal del plano es $\vec{n}(2m, -3m+3, -m-3)$ y un vector direccional de la recta es $(1, 2, -1)$.

Si el plano es ortogonal a la recta los vectores anteriores deben ser proporcionales. Debe existir un único número real que cumpla:

$$(2m, -3m+3, -m-3) = k \cdot (1, 2, -1).$$

Operando:

$$\begin{cases} 2m = k \\ -3m + 3 = 2k \\ -m - 3 = -k \end{cases}$$

El sistema carece de solución y por tanto no es posible determinar el m del enunciado.

54. Las coordenadas (x', y', z') del punto simétrico cumplen:

$$\begin{cases} \frac{x' + 2}{2} = 1 \\ \frac{y' + 4}{2} = 2 \\ \frac{z' + 2}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 4 \end{cases}$$

55. Quedan:

a) Si $a \neq -2$ los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta.

Si $a = -2$ los planos π_1 y π_2 son paralelos.

b) Para $a = -2$ los planos son:

$$\pi_1: 2x - y - 2z = 0$$

$$\pi_2: 2x - y - 2z = 2$$

El valor de la arista del cubo será la distancia entre π_1 y π_2 .

Esta distancia vale:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(0, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 0 - 0 - 2 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}$$

El volumen del cubo es $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ unidades cubicas.

Unidad 7 – Producto vectorial y mixto. Aplicaciones. Superficie esférica

PÁGINA 157

cuestiones iniciales

1. Calcula la ecuación de la recta paralela a $\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$ y que pase por el origen de coordenadas.

2. Calcula un vector ortogonal a los vectores: $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (1, 2, 0)$.

3. Halla la altura del paralelepípedo cuyas bases se encuentran sobre los planos

$$\pi_1: x + 2y - 2z = 5 \quad \pi_2: 2x + 4y - 4z = 7$$

4. Determina a , b y c para que la recta: $\frac{x-1}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z+1}{c}$ sea perpendicular a las rectas

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-1} \text{ y } s: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = z$$

SOLUCIONES

1. La recta es $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

2. Puede ser el vector:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

3. La altura es la distancia entre los planos, es decir:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 5 + 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4. Se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 3, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 2, 1) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ -a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -5b \\ c = -7b \end{cases} \end{aligned}$$

Haciendo $b=t \in \mathbb{R}$, obtenemos: $a=-5t$; $b=t$; $c=-7t$ con $t \in \mathbb{R}$

PÁGINA 173

ACTIVIDADES

■ Resuelve los siguientes problemas utilizando la estrategia de marcha atrás:

- 1. Leche y té.** Un par de amigos se junta a merendar y uno de ellos pide un vaso de leche y el otro, un vaso de té. Deciden hacer mezclas del siguiente modo: toman una cucharada de leche y la echan en el té; después toman una cucharada del té donde pusieron una cucharada de leche y la echan en la leche. ¿Habrá más leche en el té o más té en la leche?
- 2. Juego para dos.** Dos amigas dicen, alternativamente, un número natural del 1 al 10. La primera dice un número y la segunda dice otro, sumándole a este el que dijo la anterior, y así sucesivamente. Gana la partida la primera jugadora que consiga llegar a 100. Encuentra la estrategia ganadora para la primera jugadora y para la segunda.
- 3. La sucesión de Fibonacci y las abejas.** Las abejas macho (zánganos) nacen de huevos no fecundados, es decir, sólo tienen madre. Las abejas hembra (obreras) nacen de huevos fecundados, es decir, tienen madre y padre. ¿Cuántos antecesores tiene un zángano en la décima generación anterior a él? ¿Cuántos antecesores, en total, tiene un zángano en la vigésima generación anterior a él?, y de estos, ¿cuántos son machos y cuántas son hembras? ¿En qué generación anterior a este zángano tiene 17 711 antecesores?



SOLUCIONES

1. Como comenzamos con dos vasos llenos el uno de té y el otro de leche, al final la leche que hay en el té es la misma cantidad que el té que hay en la leche; como se puede ver en el siguiente dibujo.



2. Comenzando el juego desde el final, observamos que la 1ª jugadora (G) ganara siempre y cuando deje a la 2ª jugadora (P) con 89 en la penúltima jugada. Para ello, simulamos una partida.

$$\begin{aligned}
 &1.^{\text{a}} \text{ jugada } \begin{cases} G \text{ dice } 2 \\ P \text{ lo que sea de } 1 \text{ a } 10 \end{cases} \\
 &2.^{\text{a}} \text{ jugada } \begin{cases} G, \text{ el número necesario para sumar } 12 \text{ o } 23 \\ P, \text{ el número que sea de } 1 \text{ a } 10 \end{cases} \\
 &3.^{\text{a}} \text{ jugada } \begin{cases} G, \text{ el número necesario para sumar } 23 \text{ o } 34 \\ P, \text{ el número que sea de } 1 \text{ a } 10 \end{cases} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Así sucesivamente G siempre tiene que decir el número necesario para sumar un múltiplo de 11 más 1: 12; 23; 34; 45; 56; 67; 78; 89.

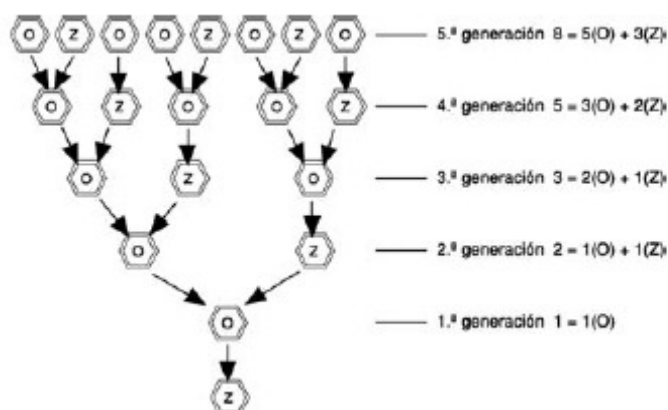
Penúltima jugada $\left\{ \begin{array}{l} \text{G, dice el número necesario para sumar 89} \\ \text{P, el número que sea de 1 a 10} \end{array} \right.$

Última jugada {G dice un número de forma que obtiene 100}

Por lo tanto, la estrategia ganadora para el primer jugador es en la 1ª jugada decir cualquier número del 1 al 10 y en la siguiente jugada, a la vista de la suma que haya obtenido el 2º jugador, el 1º jugador debe decir un número de modo que deje la suma en un múltiplo de 11 más 1, y así sucesivamente en las siguientes jugadas, hasta que en la penúltima deje al 2º jugador como resultado de la suma 89, de esta forma gana la partida.

La estrategia ganadora para el 2º jugador es la misma: ir diciendo números del 1 al 10 que dejen como resultado de la suma al 1º jugador un número que sea múltiplo de 11 más 1, así en todas las jugadas; en la penúltima debe dejar al 1º jugador como resultado de la suma 89 y de esta forma ganara la partida.

3. En el siguiente diagrama vemos la genealogía de las abejas. Designamos con Z a los zánganos y con O a las obreras.



Obtenemos la sucesión:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... que es la sucesión de Fibonacci.

- En la decima generación anterior a él un zángano tiene 89 antecesores, de los cuales 34 son machos y 55 son hembras.

Generación	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª
Antecesores	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Antecesores machos		1	1	2	3	5	8	13	21	34
Antecesores hembras	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Continuando las sucesiones, obtenemos:

- En la vigésima generación anterior a él tiene 10 946 antecesores, de los cuales 4 181 son machos y 6 765 son hembras.
- En la vigésima primera generación anterior a él tiene 17 711 antecesores.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Para los vectores $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (-3, 1, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2, 1)$, calcula $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ y $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.
- 2. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1, 3)$, $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ y $\vec{w} = (2, -2, 5)$, calcula $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.
- 3. Dados los vectores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (-2, 3, -2)$ y $\vec{w} = (5, 0, 2)$:
 - a) Calcula los productos vectoriales $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{w}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$.
 - b) Calcula el producto mixto de los tres vectores anteriores.
- 4. Sean los vectores $\vec{u} = (2, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ y $\vec{w} = (3, -1, 1)$. Realiza las siguientes operaciones:
 - a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$
 - b) $(\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u}$
 - c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$
 - d) $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$
 - e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$
 - f) $(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u}$
- 5. Los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2, 4)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.
 - a) Prueba que los conjuntos de vectores $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w} \times \vec{u}\}$ y $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w} \times \vec{u}\}$ forman bases.
 - b) Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{w}$ y $\vec{w} \times \vec{u}$.
- 6. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen $|\vec{u}| = 10$, $|\vec{v}| = 2$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$. Calcula $|\vec{u} \times \vec{v}|$.
- 7. Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta los ejes coordenados en los puntos A , B y C . Calcula:
 - a) La ecuación del plano π .
 - b) El área del triángulo ABC .
- 8. Dada la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = z \end{cases}$ y el punto $P(1, 2, -1)$:
 - a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r .
 - b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano hallado y los ejes coordenados.
- 9. Un triángulo tiene dos vértices en los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$, y el tercer vértice está situado en la recta $\begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases}$. Halla las coordenadas de este vértice sabiendo que el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$.
- 10. Tres vértices de un paralelogramo en el espacio son los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 1)$ y $C(2, -1, 2)$.
 - a) Halla el punto D que complete el paralelogramo. ¿Hay uno o varios?
 - b) Calcula el área del paralelogramo hallado anteriormente.
- 11. El plano $-2x + 5y - z + 10 = 0$ corta los ejes OX , OY y OZ en tres puntos A , B y C , respectivamente. Estos puntos determinan, junto al origen de coordenadas O , un tetraedro. Obtén el volumen de dicho tetraedro.
- 12. Calcula la distancia del punto $(-2, 4, 3)$ a la recta $\begin{cases} x = 2z + 1/2 \\ y = 4 - 2z/3 \end{cases}$.
- 13. Dado el plano de ecuación $2x + 2y + z = 3$ y el punto $A(1, 0, 2)$, sea B el pie de la perpendicular de A a dicho plano y $C(2, 1, -2)$ un punto del plano. Halla el área del triángulo ABC .



SOLUCIONES

1. Al ser $\vec{u} \times \vec{v} = (-2, 5, 11)$, se tiene que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (-17, 13, -9)$.

Como $\vec{v} \times \vec{w} = (3, 2, -7)$, por tanto $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (-19, 11, -5)$.

2. Se tiene que:

$$\vec{u} (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

3. Queda:

$$a) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -10i - 2j + 7k$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 14j + 5k$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6i - 6j - 15k$$

$$b) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -36$$

4. Queda:

$$a) (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = 4(3, -1, 1) = (12, -4, 4)$$

$$b) (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = 3(2, 0, 1) = (6, 0, 3)$$

$$c) (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$d) (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$e) (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (1, 14, 11)$$

$$f) (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} = (5, -18, -10)$$

5. Queda:

a) El conjunto de vectores $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w}\}$ está formado por $\{(-1, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 4)\}$. Forman base al ser

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

El conjunto de vectores $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w}\}$ está formado por $\{(-1, -1, 1), (2, 1, -1), (1, 2, 4)\}$. Forman base al ser

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

b) El producto mixto de los vectores pedidos es:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot [(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{w} \times \vec{u})] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

6. Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, el ángulo α que forman u y v es:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{12}{10 \cdot 2};$$

Luego $\alpha = 53^\circ 7' 48,37''$

Por tanto, $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha = 10 \cdot 2 \cdot \sin (53^\circ 7' 48,37'') = 16$

7. Queda:

a) El plano π pasa por el punto $M(1, 4, 4)$ y su vector normal es $\vec{PQ} = (-4, 6, -2)$, su ecuación es $-4x(x-1) + 6(y-4) + (-2)(z-4) = 0$, es decir, $2x - 3y + z + 6 = 0$.

b) Las coordenadas de los puntos A , B y C son:

$$A(-3, 0, 0), B(0, 2, 0) \text{ y } C(0, 0, -6).$$

El área del triángulo ABC es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \\ &= \frac{1}{2} |(3, 2, 0) \times (3, 0, -6)| = \frac{1}{2} \sqrt{504} = 11,225. \end{aligned}$$

8. La recta r expresada en la forma continua es:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

a) La ecuación del plano es $(x-1, y-2, z+1) \cdot (1, 1, 2) = 0$

Operando se obtiene $x + y + 2z - 1 = 0$.

b) Los vértices del triángulo son:

$$A(1, 0, 0), \quad B(0, 1, 0) \quad \text{y} \quad C(0, 0, 1/2).$$

El área de dicho triángulo es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \\ &= \frac{1}{2} |(-1, 1, 0) \times (-1, 0, 1/2)| = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} = 0,612 \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

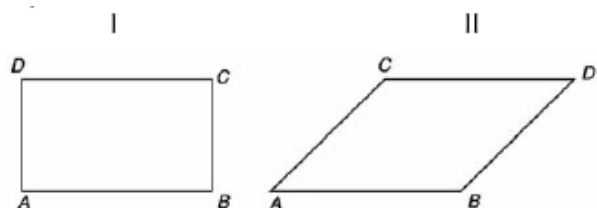
9. El tercer vértice tiene de coordenadas $(2t, t, 1)$. El área del triángulo de vértices $A=(0,0,0)$, $B=(1,1,1)$ y $C=(2t, t, 1)$ es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(1, 1, 1) \times (2t, t, 1)| = \\ &= \frac{1}{2} |(1-t, 2t-1, -t)| = \frac{1}{2} \sqrt{(1-t)^2 + (2t-1)^2 + (-t)^2} \end{aligned}$$

Como el área vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$, se obtiene $t=0$ y $t=1$. Estos valores nos posibilitan dos soluciones: $(0, 0, 1)$ y $(2, 1, 1)$.

10. Queda:

a) Pueden ocurrir dos casos como se observa en el dibujo.



- I. En este caso, $\vec{AB} = \vec{DC}$ y el punto D tiene por coordenadas $(4, -2, 2)$.
- II. En este caso, $\vec{AB} = \vec{CD'}$ y el punto D' tiene por coordenadas $(0, 0, 2)$.

b) El área del paralelogramo es:

$$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AC}| = |(-2, 1, 0) \times (1, -1, 1)| = |(1, 2, 1)| = \sqrt{6} = 2,45 \text{ unidades cuadradas.}$$

- El área del paralelogramo es igual en cualquiera de los dos casos.

11. Los puntos A , B y C son:

$$A(5, 0, 0), B(0, -2, 0) \text{ y } C(0, 0, 10)$$

El área del tetraedro es la suma de las áreas de los triángulos siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABC) &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(-5, -2, 0) \times \\ &\times (-5, 0, 10)| = \frac{1}{2} |(-20, 50, -10)| = \frac{1}{2} \sqrt{3000} = 27,39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABO) &= \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}| = \frac{1}{2} |(5, 0, 0) \times \\ &\times (0, -2, 0)| = \frac{1}{2} |(0, 0, -10)| = \frac{1}{2} 10 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área}(ACO) &= \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OC}| = \frac{1}{2} |(5, 0, 0) \times \\ &\times (0, 0, 10)| = \frac{1}{2} |(0, -50, 0)| = \frac{1}{2} 50 = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área}(BCO) &= \frac{1}{2} |\vec{OB} \times \vec{OC}| = \frac{1}{2} |(0, -2, 0) \times \\ &\times (0, 0, 10)| = \frac{1}{2} |(-20, 0, 0)| = \frac{1}{2} 20 = 10 \end{aligned}$$

Por tanto, el área del tetraedro es:

$$27,39 + 5 + 25 + 10 = 67,39 \text{ unidades cuadradas}$$

12. La recta en forma continua puede expresarse:

$$\frac{x - 1/2}{2} = \frac{y - 4}{-2/3} = \frac{z}{1}$$

La distancia buscada es:

$$d = \frac{|(5/2, 0, -3) \times (2, -2/3, 1)|}{|(2, -2/3, 1)|} = \frac{\sqrt{2845}}{14} = 3,81$$

13. Las coordenadas del punto B son las soluciones del sistema
$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ x - y = 1 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

Por tanto, los vértices del triángulo son los puntos

$$A(1, 0, 2), B\left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right) \text{ y } C(2, 1, -2)$$

El área del triángulo es:

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABC) &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{9} \right) \times (1, 1, -4) \right| = 0,71 \end{aligned}$$

- 14. Sean $A(1, -5, a)$, $B(2, a, -1)$ y $C(a, -5, 2)$ los tres vértices del triángulo ABC . Determina el valor de a para que ese triángulo sea rectángulo en C y después calcula su área.

- 15. Halla la distancia entre las rectas:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

- 16. Calcula los puntos de la recta $r: \begin{cases} x - z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ que equidistan de los planos:

$$\pi_1: 2x + y - 2z = 0 \quad \pi_2: x - 2y + 2z - 1 = 0$$

- 17. Halla la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas:

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

- 18. Dada la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ y los puntos $A(2, -1, 1)$ y $B(3, 0, -2)$ encuentra los puntos P de r para los cuales el triángulo ABP es rectángulo con hipotenusa AB . Halla en estos casos el área del triángulo.

- 19. Halla el valor de a para que la recta:

$$r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases}$$

y el plano $\pi: x - 3y + az = -6$ sean paralelos. Para este valor de a halla la distancia entre ellos.

- 20. Los puntos $P(1, 1, 0)$ y $Q(0, 2, 1)$ son dos vértices contiguos de un rectángulo. Un tercer vértice pertenece a la recta $r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

a) Determina los restantes vértices del rectángulo.

b) ¿Qué posición relativa debería tener la recta r y la que contiene el segmento PQ para que la solución fuese única?

- 21. Halla la ecuación de la superficie esférica de centro el punto $C(1, 3, -1)$ y radio 3.

- 22. Halla el centro y el radio de la esfera de ecuación $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 12z + 20 = 0$.

- 23. Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $P(5, 1, 3)$, $Q(1, 2, 0)$, $R(-2, -2, 1)$ y $S(1, 1, -1)$.

- 24. Determina la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$ en el punto $(2, 4, 4)$.

- 25. Determina el área de una superficie esférica que es tangente a los planos π_1 y π_2 de ecuaciones $\pi_1: 3x - y + 5z = 5$, $\pi_2: 3x - y + 5z = 12$.

- 26. Halla la intersección de la esfera de centro $(3, 1, 0)$ y radio 2 con la recta de ecuaciones paramétricas $x = 2 + t$, $y = t$, $z = 1 - t$.

- 27. Halla la ecuación de la esfera de centro $C(-1, 4, 2)$ y tangente al plano de ecuación $4x - 4y + 4z - 12 = 0$.

SOLUCIONES

14. Debe cumplirse que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son perpendiculares. Es decir, el producto escalar de ambos debe ser nulo.

$$\overrightarrow{CA} = (1 - a, 0, a - 2),$$

$$\overrightarrow{CB} = (2 - a, a + 5, -3)$$

De $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ se obtiene $a^2 - 6a + 8$

Las soluciones de la ecuación son: $a = 2$ y $a = 4$

El área del triángulo ABC es:

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2} |10 - 3a - a^2, a^2 - a + 1, 5 - 4a - a^2|$$

Si $a = 2 \Rightarrow$ área = 3,81 unidades cuadradas.

Si $a = 4 \Rightarrow$ área = 17,48 unidades cuadradas.

15. Ambas rectas se cruzan.

Hallamos la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a la recta s. Su ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 2 = 0$$

La distancia entre las rectas es:

$$d = \frac{|0 - 0 - 3 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$$

18. Sea $P(-1+2t, 2-2t, 1-t)$ un punto cualquiera de la recta r . Para que el triángulo ABP sea rectángulo en P debe cumplirse:

$$\begin{aligned}\vec{AP} \cdot \vec{BP} &= 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2t-3, -2t+3, -t) \cdot \\ &\quad \cdot (2t-4, -2t+2, -t+3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ o } t = 2.\end{aligned}$$

Para $t = 1$ el punto es $P(1, 0, 0)$.

Para $t = 2$ el punto es $P(3, -2, -1)$.

En el primer caso el área del triángulo es:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} |\vec{AP} \times \vec{AB}| &= \frac{1}{2} |(-1, 1, -1) \times (1, 1, -3)| = \\ &= \frac{1}{2} |(-2, -4, -2)| = \sqrt{6} \approx 2,45\end{aligned}$$

En el segundo caso el área del triángulo es:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} |\vec{AP} \times \vec{AB}| &= \frac{1}{2} |(1, -1, -2) \times (1, 1, -3)| = \\ &= \frac{1}{2} |(5, 1, 2)| = \frac{\sqrt{30}}{2} \approx 2,74\end{aligned}$$

19. La ecuación de la recta r puede ser expresada en la forma:

$$\frac{x}{5} = \frac{y + 1/5}{2} = \frac{z + 7/5}{-1}$$

Para que la recta r y el plano π sean paralelos, debe cumplirse:

$$(1, -3, a) \cdot (5, 2, -1) = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

La distancia buscada es:

$$d = \frac{|0 - 3 \cdot (-1/5) - (-7/5) + 6|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{11}} = 2,41$$

20. a) sea $R(t, 0, 1)$ un punto genérico de la recta r . Para que R sea vértice de un rectángulo se debe cumplir:

$$\begin{aligned}\vec{PR} \cdot \vec{PQ} &= 0 \Leftrightarrow (t-1, -1, 1) \cdot (-1, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \\ \text{o} \\ \vec{QR} \cdot \vec{PQ} &= 0 \Leftrightarrow (t, -2, 0) \cdot (-1, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow t = -2\end{aligned}$$

21. La ecuación es: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$

22. El centro es el punto $(1, -2, 3)$ y el radio es $r = 2$.

23. La esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$ cumple las condiciones:

$$\begin{cases} 5m + n + 3p + q = -35 \\ m + 2n + q = -5 \\ -2m - 2n + p + q = -9 \\ m + n - p + q = -3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$m = -\frac{7}{2} \quad n = \frac{5}{2} \quad p = -\frac{9}{2} \quad q = -\frac{13}{2}$$

La ecuación de la esfera es:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{9}{2}z - \frac{13}{2} = 0$$

24. El centro de la esfera es el punto $(1, 2, 2)$.

El plano buscado tiene por ecuación:

$$\begin{aligned} 1 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 4) + 2 \cdot (z - 4) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 18 &= 0. \end{aligned}$$

25. El diámetro de la superficie de la superficie esférica es la distancia entre los planos. Esta es:

$$\begin{aligned} d(\pi_1, \pi_2) &= \\ &= \frac{|3 \cdot 0 - 0 + 5 \cdot 1 - 12|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{35}} = \frac{7}{\sqrt{35}} = 1,18 \end{aligned}$$

El área buscada es:

$$4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{1,18}{2} \right)^2 = 4,398 \text{ unidades cuadradas.}$$

26. La solución del sistema:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4 \\ \frac{x - 2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-1} \end{cases}$$

Nos da como resultado los puntos:

$$(4,155; 2,155; -1,155) \text{ y } (1,845; -0,155; 1,155).$$

27. El radio es la distancia del centro C al plano dado y vale:

$$r = \frac{|4(-1) - 4(4) + 4(2) - 12|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{|-24|}{\sqrt{48}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

La ecuación de la esfera es:

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 2)^2 = 12$$

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

■ 28. Halla la distancia entre el punto $A(1, 2, 3)$ y cada uno de los ejes coordenados.

■ 29. Halla la distancia entre las rectas de ecuaciones:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+2z=1 \end{cases}$$

■ 30. a) Encuentra las coordenadas del punto B , proyección ortogonal del punto $A(1, 0, 2)$ sobre el plano $\pi: 2x+y+z=10$.

b) El punto $C(2, 1, 5)$ es un punto del plano π . ¿Cuánto vale el área del triángulo ABC ?

■ 31. Halla la recta perpendicular común a las rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ y $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$.

■ 32. Halla la distancia entre la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 1, 1)$ y el eje OY .

■ 33. a) Dado el punto $A(-6, 2, 0)$, halla su simétrico A' con respecto a la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1-t \\ y = -2+t \\ z = -3t \end{cases}$$

b) Halla un punto P de la recta r tal que el área del triángulo $AA'P$ valga $3\sqrt{66} u^2$.

■ 34. Dada la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ encuentra la ecuación del plano que la contiene y es perpendicular al plano OXY .

■ 35. Nos dan los vectores $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, 2, -1)$ y $\vec{c} = (2, 0, 0)$. Halla:

a) Valor absoluto del producto mixto de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y da su significado geométrico.

b) Ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

c) Razona si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman base, y en caso afirmativo halla las coordenadas del vector $\vec{v} = (1, -2, 0)$ en dicha base.

■ 36. Halla el lugar geométrico de los puntos P que determinan con $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$ un tetraedro de volumen $1/6$.

■ 37. Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(8, 0, 0)$, $B(0, 8, 0)$, $C(0, 0, 8)$ y $E(8, 8, 8)$. Obtén también las coordenadas de los otros vértices.

■ 38. Calcula la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta $r: \begin{cases} x-z=0 \\ y+4=0 \end{cases}$.

■ 39. a) Comprueba que los vectores $\vec{a} = (1, 1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ y $\vec{c} = (1, 3, 5)$ son linealmente dependientes.

b) Encuentra la ecuación del plano que contiene a los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y corta al eje OX a distancia 3 del origen.

■ 40. Siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores cualesquiera del espacio, prueba que:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} \times \vec{v}$$



SOLUCIONES

28. La distancia del punto $A(1, 2, 3)$ al eje OX viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} d(A, OX) &= \frac{|(1, 2, 3) \times (1, 0, 0)|}{|(1, 0, 0)|} = \\ &= \frac{|(0, 3, -2)|}{|(1, 0, 0)|} = \sqrt{13} = 3,606 \end{aligned}$$

La distancia a OY es:

$$\begin{aligned} d(A, OY) &= \frac{|(1, 2, 3) \times (0, 1, 0)|}{|(0, 1, 0)|} = \\ &= \frac{|(-3, 0, 1)|}{|(0, 1, 0)|} = \sqrt{10} = 3,162 \end{aligned}$$

La distancia a OZ es:

$$\begin{aligned} d(A, OZ) &= \frac{|(1, 2, 3) \times (0, 0, 1)|}{|(0, 0, 1)|} = \\ &= \frac{|(2, -1, 0)|}{|(0, 0, 1)|} = \sqrt{5} = 2,236 \end{aligned}$$

29. Estas rectas se cruzan. Por tanto

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{P}_r \vec{P}_s, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{4 + 64 + 121}} = 1,09$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 8j - 11k$$

30. Quedan:

a) Junto B es la intersección del plano π con la recta que pasa por $A(1,0,2)$ y es perpendicular a π .

El punto B es la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 10 \\ x - 2y = 1 \\ y - z = -2 \end{cases}$$

Las coordenadas del punto B son $B(3,1,3)$.

b) El área del triángulo de vértices $A(1,0,2)$, $B(3,0,3)$ y $C(2,1,5)$ es:

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABC) &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \\ &= \frac{1}{2} |(2, 1, 1) \times (1, 1, 3)| = \frac{1}{2} \sqrt{30} = 2,739 \end{aligned}$$

31. Sean $P(t,t,t)$ y $Q(s+1,3s,s)$ dos puntos genéricos de las rectas r y s . Los puntos anteriores quedan fijados bajo las condiciones:

$$\left. \begin{aligned} \vec{PQ} \times (1, 1, 1) &= 0 \Rightarrow 3t - 5s = 1 \\ \vec{PQ} \times (1, 3, 1) &= 0 \Rightarrow 5t - 11s = 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}, s = \frac{1}{4}$$

Los puntos fijados son $P(3/4, 3/4, 3/4)$ y $Q(5/4, 3/4, 1/4)$.

La perpendicular común tiene por ecuación:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3}{4} + t \\ y &= \frac{3}{4} \\ z &= \frac{3}{4} - t \end{aligned} \right\} t \in \mathbb{R}$$

Otra forma de resolver este problema es hallar la intersección del plano que contiene a r y al vector $\vec{v}$ perpendicular a r y s , y el plano que contiene a s y al vector $\vec{v}$. Esta intersección nos da la recta perpendicular común.

$$\vec{v} = (-2, 0, 2)$$

$$\pi_1 \supset r \text{ y a } \vec{v} : x - 2y + z = 0$$

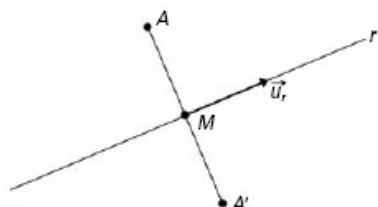
$$\pi_2 \supset s \text{ y a } \vec{v} : 3x - 2y + 3z - 3 = 0$$

$$\text{Luego la recta buscada es } \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

32. Estas rectas r (que pasa por A y B) y s (eje OY) se cruzan, por tanto la distancia viene dada por:

$$d(r,s) = \frac{\left| \left\{ \vec{V}_r, \vec{V}_s, \vec{V}_{PQ} \right\} \right|}{\left| \vec{V}_r \times \vec{V}_s \right|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|}{\left| (-1, 0, -1) \right|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ unidades.}$$

33. Se da:



a) Sea $M(1-t, -2+t, -3t)$ un punto cualquiera de la recta r . Para determinar el punto M, punto medio del segmento de extremos A y A' se cumple:

$$\begin{aligned} \vec{AM} \perp \vec{u}_r &\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{u}_r = 0 \Leftrightarrow (-t+7, t-4, -3t) \cdot \\ &\cdot (-1, 1, -3) = 0 \Leftrightarrow t-7+t-4+9t=0 \Leftrightarrow t=1. \end{aligned}$$

El punto M es $(0, -1, -3)$ y el simétrico de A es $A'(6, -4, -6)$.

b) Sea $P(1-t, -2+t, -3t)$ un punto de la recta r . El área del triángulo $AA'P$ es:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{66} &= \frac{1}{2} |\vec{AA'} \times \vec{AP}| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{66} &= \frac{1}{2} |(24t-24, -42t+42, 6t-6)| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6\sqrt{66} &= \sqrt{2376t^2 - 4752t + 2376} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2376t^2 - 4752t &= 0 \Leftrightarrow t=0 \quad \text{o} \quad t=2 \end{aligned}$$

Los puntos solución son $(1, -2, 0)$ o $(-1, 0, -6)$.

34. El haz de planos cuya arista es la recta dada puede expresarse en la forma:

$$(x+2y+1) + \lambda(3x-2z-3) = 0$$

Operando:

$$(1+3\lambda)x + 2y - 2\lambda z + (1-3\lambda) = 0$$

Si este plano es perpendicular a OXY se cumplirá:

$$(1+3\lambda, 2, -2\lambda) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

El plano buscado es $x+2y+1=0$

35. Queda:

a) el producto misto vale 4 y representa el volumen del paralelepípedo de vectores concurrentes en un vértice los dados.

b) $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| |\vec{c}|} = 0$ luego los vectores forman un Angulo de 90° .

c) los vectores son linealmente independientes pues el determinante formado por ellos vale 4 distinto de cero. Por tanto forman base.

d) escribimos el vector $\vec{v}$ dado en combinación lineal de los de la base y obtenemos:

$$(1, -2, 0) = x(1, 0, -1) + y(0, 2, -1) + z(2, 0, 0)$$

Y resolviendo el sistema tenemos que $x=1; y=1; z=0$. por tanto las coordenadas son $(1, -1, 0)$

36. Sean los puntos $P(x, y, z)$. Deben verificar que $\frac{1}{6} |\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP}\}| = \frac{1}{6}$ de donde

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ x-1 & y & z \end{vmatrix} = 1 \text{ y obtenemos que el lugar geométrico son los planos de ecuación } x+y+z=0.$$

37. El volumen vendra dado por:

$$V = |\{\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AE}\}| = \begin{vmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 1024 \text{ m}^3$$

38. la recta puede expresarse en la forma: $\begin{cases} x=t \\ y=-4 \\ z=t \end{cases}$

la distancia buscada es:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|(1, 3, 3) \times (1, 0, 1)|}{|(1, 0, 1)|} = \\ &= \frac{|(3, 2, -3)|}{|(1, 0, 1)|} = \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}} = \sqrt{11} = 3,317 \end{aligned}$$

39. Queda:

a) El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ vale cero.

Por tanto los vectores dados son linealmente dependientes.

b) El plano está determinado por el punto $(3, 0, 0)$ y los vectores $(-1, 2, 0)$ y $(1, 3, 5)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} 10x + 5y - 5z - 30 &= 0 \\ 2x + y - z - 6 &= 0 \end{aligned}$$

40. Teniendo en cuenta las propiedades del producto vectorial, se obtiene:

$$\begin{aligned} (\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{v} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} \\ &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{u} \times \vec{v} \end{aligned}$$

Unidad 8 – Números reales. Funciones reales

PÁGINA 183

cuestiones iniciales

- Representa en la recta real los siguientes conjuntos:

a) $[-1, 4]$	c) $E(-1, 4)$	e) $(-\infty, 5]$
b) $(-1, 4)$	d) $E^*(3, 3)$	f) $E^+(3, 3)$
- Estudia si los siguientes conjuntos están o no acotados. En caso afirmativo, determina, si existen, los extremos relativos, máximos y mínimos.
 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 3\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 4\}$ $C = (-2, 1) \cup (0, 2]$
- Dibuja una gráfica de una función que responda a las siguientes características:
 - $\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = [-5, +\infty)$.
 - Estrictamente decreciente en $(-\infty, -3)$; estrictamente creciente en $(-3, 0)$.
 - Simétrica respecto del eje de ordenadas.
 - Máximo relativo en $(0, 2)$ y mínimo relativo en $(-3, -5)$.

SOLUCIONES

- Quedaría:

$$[-1, 4] \quad \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{-----} \bullet \text{---} \\ -1 \qquad \qquad \qquad 4 \end{array}$$

$$(-1, 4) \quad \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{-----} \circ \text{---} \\ -1 \qquad \qquad \qquad 4 \end{array}$$

$$E(-1, 4) = (-5, 3) \quad \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{-----} \circ \text{---} \\ -5 \qquad \qquad \qquad 3 \end{array}$$

$$E^*(3, 3) = (0, 6) - \{3\} \quad \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \\ 0 \qquad \qquad 3 \qquad \qquad 6 \end{array}$$

$$(-\infty, 5] \quad \begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \bullet \text{---} \\ 5 \end{array}$$

$$E^+(3, 3) = (3, 6) \quad \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{-----} \circ \text{---} \\ 3 \qquad \qquad \qquad 6 \end{array}$$

2. La solución es:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$$

A esta acotado superiormente por 5 e inferiormente por -1 , luego, A esta acotado.
No tiene máximos ni mínimos.

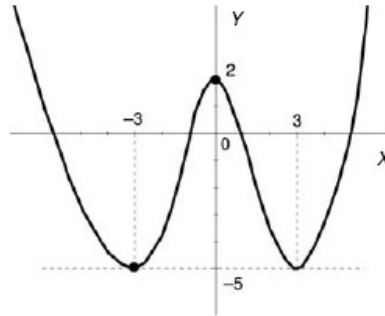
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 4\}$$

B esta acotado superiormente por 4 e inferiormente por 3, luego, B esta acotado.
Tiene mínimo, el 3.

$$C = (-2, 1) \cup (0, 2]$$

C esta acotado superiormente por 2 e inferiormente por -2 , luego C esta acotado.
Tiene máximo, el 2.

3. La representación queda:



PÁGINA 199

ACTIVIDADES

■ Reflexiona sobre las siguientes conjeturas:

- 1. Primos gemelos.** Hay infinitos pares de números primos gemelos, es decir, de primos cuya diferencia es igual a 2. Ejemplo: 7 y 5 son primos gemelos, ya que $7 - 5 = 2$. Encuentra cuatro pares de números primos gemelos.
- 2. Números primos generados.** El polinomio $n^2 - n + 41$, cuya indeterminada n es entera, genera números primos cuando n va desde -40 hasta 40 . Este polinomio, ¿genera primos para cualquier entero n ?
- 3. Número mágico.** Toma un número de tres cifras. Forma el número que se obtiene al escribir a la derecha del anterior el número repetido. Este número de 6 cifras lo dividimos por 7 y al cociente obtenido, por 11, y al último cociente, por 13. ¿Qué se observa?
- 4. Conjetura de Collatz o $(3n + 1)$.** Compruébala para los valores de n : 7, 12, 17 y 30.

SOLUCIONES

1. Esta es una conjetura que está sin demostrar.
Hasta el número 100 podemos encontrar varios primos gemelos: 5 y 7; 11 y 13; 17 y 19; 29 y 31; 41 y 43; 71 y 73.

2. En efecto, el polinomio $n^2 - n + 41$ genera números primos para valores de n comprendidos entre -40 y 40 .

Por ejemplo:

$$n=25 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 641 \text{ que es un número primo.}$$

Para cualquier valor de n no genera números primos, pues, por ejemplo, para $n=41 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ que es un número compuesto, no es un número primo.

3. Tomamos un número de tres cifras cualesquiera, 739, y le aplicamos lo que dice el problema:

$$\frac{739739}{7 \cdot 11 \cdot 13} = 739$$

Observamos que obtenemos el número de partida. Veamos que esto se cumple con cualquier número y para ello partimos de un número cualquiera xyz :

$$\begin{aligned} xyzxyz &= \\ &= 100\,000x + 10\,000y + 1\,000z + 100x + 10y + z = \\ &= 1\,001 \cdot (100x + 10y + z) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot xyz \end{aligned}$$

Por tanto, al dividir $xyzxyz$ por 7, por 11 y por 13, obtenemos el número de partida xyz .

4. Indicamos con $f^2(x) = f(f(x))$ y así sucesivamente por cuestiones de escritura.

Para $n=7$

$$f(7) = 22 ; f^2(7) = 11 ; f^3(7) = 34 ; f^4(7) = 17 ; f^5(7) = 52 ; f^6(7) = 26 ; f^7(7) = 13 ; f^8(7) = 40 ; \\ f^9(7) = 20 ; f^{10}(7) = 10 ; f^{11}(7) = 5 ; f^{12}(7) = 16 ; f^{13}(7) = 8 ; f^{14}(7) = 4 ; f^{15}(7) = 2 ; f^{16}(7) = 1 \dots$$

Para $n=12$

$$f(12) = 6 ; f^2(12) = 3 ; f^3(12) = 10 ; f^4(12) = 5 ; f^5(12) = 16 ; f^6(12) = 8 ; f^7(12) = 4 ; \\ f^8(12) = 2 ; f^9(12) = 1 \dots$$

Para $n=17$

$$f(17) = 52 ; f^2(17) = 26 ; f^3(17) = 13 ; f^4(17) = 40 ; f^5(17) = 20 ; f^6(17) = 10 ; f^7(17) = 5 ; \\ f^8(17) = 16 ; f^9(17) = 8 ; f^{10}(17) = 4 ; f^{11}(17) = 2 ; f^{12}(17) = 1 \dots$$

Para $n=30$

$$f(30) = 15 ; f^2(30) = 46 ; f^3(30) = 23 ; f^4(30) = 70 ; f^5(30) = 35 ; f^6(30) = 106 ; f^7(30) = 53 ; \\ f^8(30) = 160 ; f^9(30) = 80 ; f^{10}(30) = 40 ; f^{11}(30) = 20 ; f^{12}(30) = 10 ; f^{13}(30) = 5 ; f^{14}(30) = 16 ; \\ f^{15}(30) = 8 ; f^{16}(30) = 4 ; f^{17}(30) = 2 ; f^{18}(30) = 1 \dots$$

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Halla el menor conjunto al que pertenecen los siguientes números:

$-4/3$	$1,0\bar{4}$	-4^2	$\sqrt{15}$	$\sqrt[3]{27}$	$-16/\sqrt{4}$	$9^{1/2}$
0	$\pi/2$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{64}$	$2/5$	e^0	$\sqrt[3]{-8}$

- 2. Representa sobre la recta los siguientes conjuntos:

- | | |
|---|---|
| a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \text{ y } x > 5\}$ | e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ o } x \geq 3\}$ |
| b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 4 \text{ y } x < 6\}$ | f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 3 \text{ o } x \geq 2\}$ |
| c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x > -5 \text{ y } x \leq 2\}$ | g) $G = (-\infty, -1) \cup [2, 5)$ |
| d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2,5 \text{ y } x < 5,2\}$ | h) $H = (-6, -4) \cap [-4, 8)$ |

- 3. Define por comprensión, dentro del conjunto de los números reales, los siguientes subconjuntos:

- | | | | | |
|--------------|-------------------|----------------|----------------|---------------|
| a) $[-3, 5]$ | c) $(2, +\infty)$ | e) $E(3, 1)$ | g) $E^*(3, 1)$ | i) $E(1, 3)$ |
| b) $(-3, 5]$ | d) $(-\infty, 2]$ | f) $E^*(3, 1)$ | h) $E^-(3, 1)$ | j) $E(-2, 1)$ |

- 4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| a) $[1, 5] \cup E(7, x) = [1, 10]$ | c) $E(3, 2) \cap E(2, 1) = (1, x)$ |
| b) $(-2, 3] \cap E(x, 2) = (-1, 3)$ | d) $[2, x) \cap [4, 8] = [2, 8]$ |

- 5. Estudia si los siguientes conjuntos están o no acotados. Determina, si existen, los extremos superior e inferior, además del máximo y mínimo.

- | | |
|------------------|---|
| a) $A = (-5, 7)$ | f) $F = (-6, 1) \cup [0, 3)$ |
| b) $B = [-5, 7]$ | g) $G = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ |
| c) $C = [-5, 7)$ | h) $H = [-6, 1] \cap (0, 3)$ |
| d) $D = (-5, 7]$ | i) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \text{ o } x < 1\}$ |
| e) $E = (-3, 1)$ | j) $J = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{3^n}; n \in \mathbb{N}\right\}$ |

- 6. Escribe los siguientes conjuntos en forma de intervalos y represéntalos gráficamente:

- | | |
|--|--|
| a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$ | c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 - x < 2\}$ |
| b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 < 1\}$ | d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 x + 1 \leq 5\}$ |

- 7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- | | | |
|------------------|----------------------------|-------------------------|
| a) $ x - 2 = 1$ | b) $ x - 3 + x - 1 = 2$ | c) $x^2 - 2 x - 3 = 0$ |
|------------------|----------------------------|-------------------------|

- 8. Encuentra, si existen, el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos:

- | | |
|---|---|
| a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$ | b) $B = \left\{\frac{n+2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ |
|---|---|



SOLUCIONES

1. La solución es:

Son números naturales $\sqrt[3]{27}$ $9^{1/2}$ $\sqrt{64}$ e^0 0

Son números enteros -4^2 $-16/\sqrt{4}$ $\sqrt[3]{-8}$

Son números racionales $-4/3$ $1,0\overline{4}$ $2/5$

Son números reales $\sqrt{15}$ $\pi/2$ $3\sqrt{2}$

2. Queda:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\} = (5, +\infty)$



b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 \leq x < 6\} = \{4, 5\}$



c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid -5 < x \leq 2\} = \{0, 1, 2\}$



d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2,5 < x < 5,2\} = (2,5; 5,2)$



e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ o } x \geq 3\} = (-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$



f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 3 \text{ o } x \geq 2\} = \mathbb{Z}$

g) $G = (-\infty, -1) \cup [2, 5)$



h) $H = (-6, -4) \cap [-4, 8) = \emptyset$

3. Quedaría:

$$a) [-3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}$$

$$b) (-3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 5\}$$

$$(2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

$$(-\infty, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$$

$$E(3, 1) = (2, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$$

$$E^*(3, 1) = (2, 4) - \{3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4; x \neq 3\}$$

$$E^+(3, 1) = (3, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$$

$$E^-(3, 1) = (2, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$$

$$E(1, 3) = (-2, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$$

$$E^*(-3; 0, 2) = (-3, 2; -2, 8) - \{-3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3, 2 < x < 2, 8; x \neq -3\}$$

4. La solución es:

$$a) [1, 5] \cup (7 - x, 7 + x) = [1, 10] \Rightarrow x = 3$$

$$b) (-2, 3] \cap (x - 2, x + 2) = (-1, 3) \Rightarrow x = 1$$

$$c) E(3, 2) \cap E(2, 1) = (1, x) \Rightarrow (1, 5) \cap (1, 3) = (1, x) \Rightarrow x = 3$$

5. Los conjuntos A, B, C y D están acotados inferiormente por cualquier número menor o igual que (-5) y superiormente por cualquier número mayor o igual que 7; luego estos conjuntos están todos acotados.

a) A no tiene máximos ni mínimos

b) B tiene mínimo en -5 y máximo en 7.

c) C tiene mínimo en -5 y no tiene máximo.

d) D tiene máximo en 7 y no tiene mínimo.

e) $E(-3, 1) = (-4, -2)$ esta acotado y no tiene máximo ni mínimo.

f) $F = (-6, 1) \cup [0, 3) = (-6, 3)$ esta acotado y no tiene máximo ni mínimo.

g) $G = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ no esta cotado superiormente, por tanto, G no esta acotado.

h) $H = [-6, 1] \cap (0, 3) = (0, 1]$ esta acotado y tiene máximo en 1.

i) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \text{ o } x < 1\} = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ no esta acotado.

j) $J = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{3^n}; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots \right\}$

J esta acotado y tiene máximo en 1.

6. Quedaría:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\} = [-3, 3]$ 

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 1\} = (1, 3)$ 

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |3 - x| < 2\}; -2 < 3 - x < 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -5 < -x < -1 \Rightarrow 5 > x > 1 \Rightarrow 1 < x < 5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow C = (1, 5)$ 

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2|x + 1| \leq 5\}$
 $-5 \leq 2x + 2 \leq 5 \Rightarrow -7 \leq 2x \leq 3 \Rightarrow -3,5 \leq x \leq 1,5$
 $D = [-3,5; 1,5]$ 

7. Queda:

a) $|x - 2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ 0 \\ x - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ o } x = 1$

b) La expresión $|x - 3| + |x - 1|$ toma los siguientes valores:

$$|x - 3| + |x - 1| = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación $|x - 3| + |x + 1| = 2$ son todos los números reales del intervalo $[1, 3]$

c) Si $x > 0$ resolvemos $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} < \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$

Si $x < 0$ resolvemos $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} < \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$

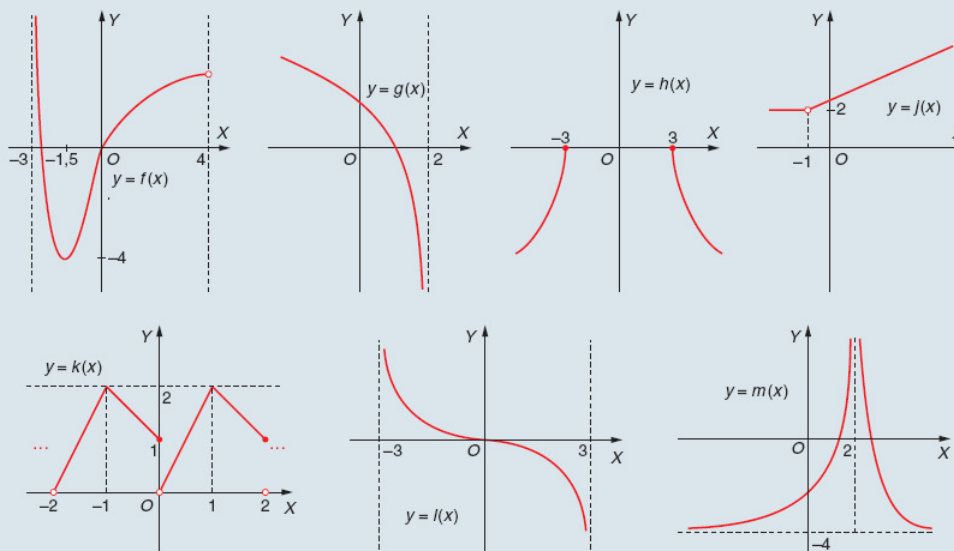
Las soluciones de la ecuación $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ son 3 y -3.

8. Queda:

a) el ínfimo de A es 1 y el supremo es 3.

b) el ínfimo de B es 1 y el supremo es 2.

- 9. Analiza, en cada una de las siguientes funciones, el dominio, el recorrido, la simetría, la periodicidad, la acotación, la monotonía y los extremos absolutos y relativos.



- 10. Estudia el dominio, la simetría y la periodicidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$ c) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 2x}$ e) $f(x) = |\sin x|$ g) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$
 b) $f(x) = \cos 2x$ d) $f(x) = x e^{x^2}$ f) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$ h) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 7x + 12}$

- 11. Dibuja las gráficas correspondientes a las funciones que verifican las siguientes condiciones:

- a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, -2\}$; $\text{Im } f = \mathbb{R}$; estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$; estrictamente decreciente en $(0, +2) \cup (2, +\infty)$, y f es par.
 b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = [-3, 3]$; mínimo relativo en $(-3, -3)$ y máximo relativo en el punto $(1, 2)$.
 c) $\text{Dom } f = (0, +\infty)$; f acotada superiormente por 2; máximo relativo en $(2, 1)$ y mínimo relativo en el punto $(4, -1)$.
 d) Función periódica con período 1, dominio de definición $[-3, 3]$ y simétrica respecto del origen de coordenadas.

- 12. Dadas las funciones $f(x) = 1$; $g(x) = x^2 + 1$; $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, halla las siguientes funciones:

a) $g \circ f \circ h$ b) $f \circ g \circ h$ c) $h \circ g \circ f$

- 13. Dada la función $f(x) = \ln \left[\frac{1-x}{1+x} \right]$, demuestra que $\forall a, b \in (-1, 1)$ cumple que:

$$f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

- 14. Sabiendo que $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, halla $f(x)$.

- 15. Sean las funciones $f(x) = \frac{3x-1}{4}$ y $g(x) = 2-5x$. Comprueba que $[f \circ g]^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

SOLUCIONES

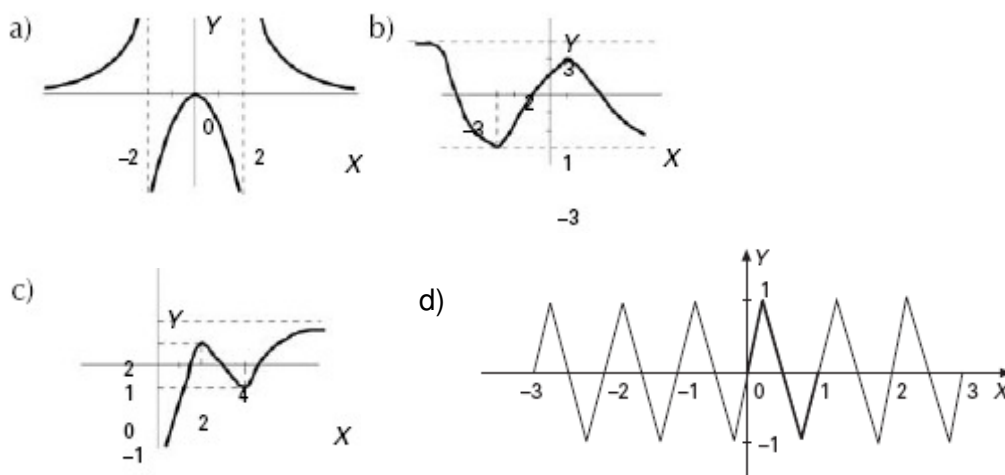
9. Los datos son:

Función	Dominio	Recorrido	Simetría	Periodi	Acota.	Creciente	Decrec	Extre. Absol	Extre. Relativos
$y=f(x)$	$(-3,4)$	$[-4, \infty)$	No	No	No	$(-1,5;4)$	$(-3,-1,5)$	Min -4	Min $(-1,5,-4)$
$y=g(x)$	$(-\infty, 2)$	$\mathbb{R}$	No	No	No	No	$(-\infty, 2)$	No	No
$y=h(x)$	$(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$	$(-\infty, 0]$	Par	No	No	$(-\infty, -3)$	$(3, \infty)$	Máx. 0	No
$y=j(x)$	$\mathbb{R} - \{-1\}$	$[2, \infty)$	No	No	No	$(-1, \infty)$	No	Min -2	No
$y=k(x)$	$\mathbb{R}$	$(0,2]$	No	Sí $T=2$	Sí	$(0,1)$	$(1,2)$	Min 0 Máx 2	Máxim. $(1,2)$
$y=l(x)$	$(-3,3)$	$\mathbb{R}$	Impar	No	No	No	$(-3,3)$	No	No
$y=m(x)$	$\mathbb{R} - \{2\}$	$(-4, \infty)$	No	No	No	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$	No	No

10. Queda:

Funciones	Dominio	Simetría	Periodicidad
a)	$\mathbb{R}$	Par	No
b)	$\mathbb{R}$	Par	Si $T = \pi$
c)	$(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$	No	No
d)	$\mathbb{R}$	Impar	No
e)	$\mathbb{R}$	Par	Si $T = \pi$
f)	$\mathbb{R}$	Par	No
g)	$(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$	Par	No
h)	$\mathbb{R} - \{3,4\}$	No	No

11. Quedan:



12. La solución es:

$$\begin{aligned} \text{a) } (g \circ f \circ h)(x) &= (g \circ f)[h(x)] = (g \circ f)\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) = \\ &= g\left[f\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)\right] = g(1) = \boxed{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (f \circ g \circ h)(x) &= (f \circ g)[h(x)] = (f \circ g)\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) = \\ &= f\left[g\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)\right] = f\left[\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^2 + 1\right] = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (h \circ g \circ f)(x) &= (h \circ g)[f(x)] = (h \circ g)[1] = \\ &= h[g(1)] = h[2] = \frac{1}{2^2 + 1} = \boxed{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

13. La solución es:

$$f(a) = \ln\left(\frac{1-a}{1+a}\right) \quad f(b) = \ln\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$$

$$f(a) + f(b) = \ln\left(\frac{1-a}{1+a}\right) + \ln\left(\frac{1-b}{1+b}\right) = \ln\left[\left(\frac{1-a}{1+a}\right) \cdot \left(\frac{1-b}{1+b}\right)\right] = \ln\left(\frac{1+ab-a-b}{1+a+b+ab}\right) \quad (1)$$

$$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = \ln\left[\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}\right] = \ln\left(\frac{1+ab-a-b}{1+a+b+ab}\right) \quad (2)$$

Como (1) = (2), queda probada la igualdad pedida.

14. La solución es:

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$$

$$\text{Hacemos } x+1 = t \Rightarrow x = t-1$$

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 5t + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 5t + 6, \text{ luego:}$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

15. La solución es:

$$\bullet (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[2 - 5x] =$$

$$= \frac{3(2 - 5x) - 1}{4} = \frac{5 - 15x}{4}$$

$$y = \frac{5 - 15x}{4} \Rightarrow x = \frac{5 - 4y}{15} \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{5 - 4x}{15}$$

$$\bullet f(x) = \frac{3x - 1}{4} \Rightarrow y = \frac{3x - 1}{4} \Rightarrow x = \frac{1 + 4y}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 + 4x}{3}$$

$$\bullet g(x) = 2 - 5x \Rightarrow y = 2 - 5x \Rightarrow x = \frac{2 - y}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2 - x}{5}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}[f^{-1}(x)] = g^{-1}\left[\frac{1 + 4x}{3}\right] =$$

$$= \frac{2 - \frac{1 + 4x}{3}}{5} = \frac{5 - 4x}{15} \Rightarrow (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{5 - 4x}{15}$$

Luego queda probado que: $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

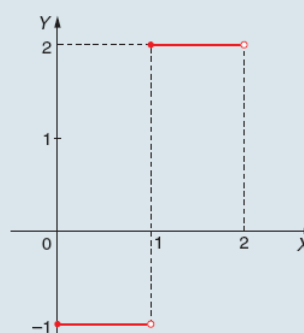
- 16. Define y dibuja las funciones: a) $f(x) = ||x| - 1| + |x^2 + 2|x||$ b) $g(x) = \frac{|x^2 - 1|}{|x| + 1}$

- 17. Estudia el dominio de las funciones:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right) \quad g(x) = \frac{\ln(2-x)}{x+2}$$

- 18. La figura adjunta representa la gráfica de una función $y = f(x)$ en el intervalo $[0, 2)$. Dibuja la gráfica de dicha función en el intervalo $[-2, 2)$ y determina su expresión analítica en cada uno de los siguientes casos:

- a) f es periódica de período 2.
b) f es par.
c) f es impar.



- 19. Prueba que la función $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^-$.

- 20. Un establecimiento de hostelería abre sus puertas a las 9 de la noche, sin ningún cliente, y las cierra cuando todos se han marchado. Se supone que la función que representa el número de clientes, C , en función del número de horas que lleva abierto el establecimiento, h , es: $C = 80h - 10h^2$.

- a) Determina el número máximo de clientes que van una determinada noche al establecimiento.
b) Si deseamos ir cuando haya menos de 150 personas y más de 70, ¿entre qué horas debemos hacerlo?
c) Si deseamos ir cuando haya menos de 150 personas y más de 70 y, además, queremos que durante nuestra estancia disminuya el número de clientes, ¿entre qué horas debemos ir?
d) ¿A qué hora cierra el establecimiento?

- 21. Prueba que la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ está acotada por 0 y 1.

- 22. ¿Para qué valores de a la función $f(x) = x^3 + ax$ es estrictamente creciente en todo su dominio de definición?

- 23. Dibuja, si es posible, la gráfica de una función f que verifique $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ y que alcance en $x = 1$ y $x = 3$ sendos máximos relativos y en $x = 2$ un mínimo relativo.

- 24. La función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ tiene un máximo relativo en el punto de abscisa e . Demuestra que se verifica: $x^e < e^x$ en un entorno reducido de e .

SOLUCIONES

16. La solución es:

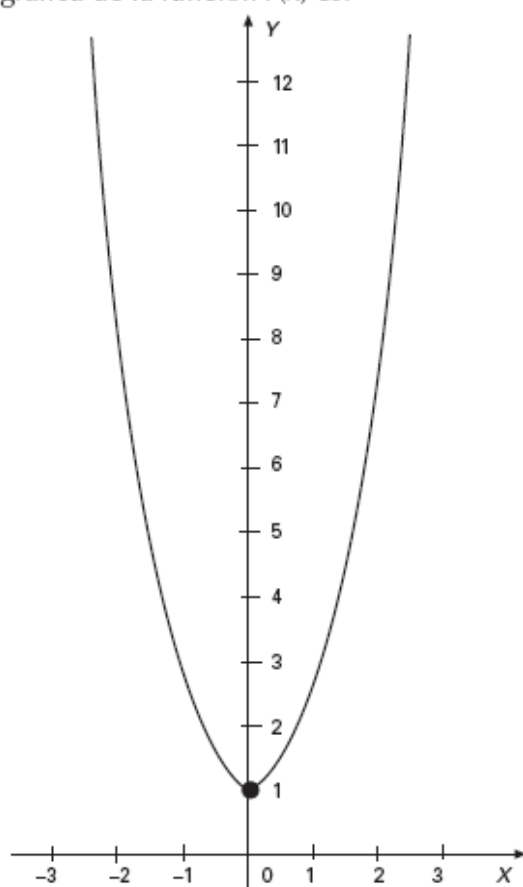
$$a) \ ||x| - 1| = \begin{cases} |x| - 1 & \text{si } |x| - 1 \geq 0 \\ -[|x| - 1] & \text{si } |x| - 1 < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x + 1 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$|x^2 + 2|x|| = x^2 + 2|x| = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = ||x| - 1| + |x^2 + 2|x|| = \begin{cases} x^2 - 3x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 3x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

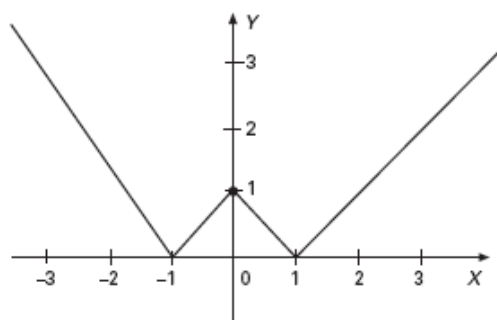
La gráfica de la función $f(x)$ es:



b) la función $g(x) = \frac{|x^2 - 1|}{|x| + 1}$ puede expresarse en la forma:

$$g(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La grafica de la función anterior es:



17. Queda:

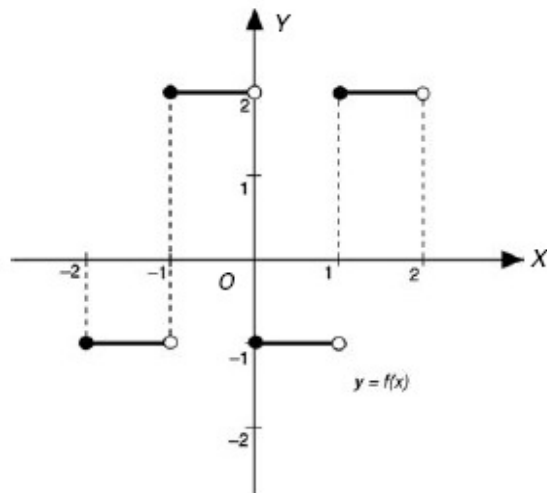
$$\text{Dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+2}{x^2} > 0 \right\} = (-2, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\text{Dom } g = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - x > 0 \text{ y } x \neq -2\}$$

$$= (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$$

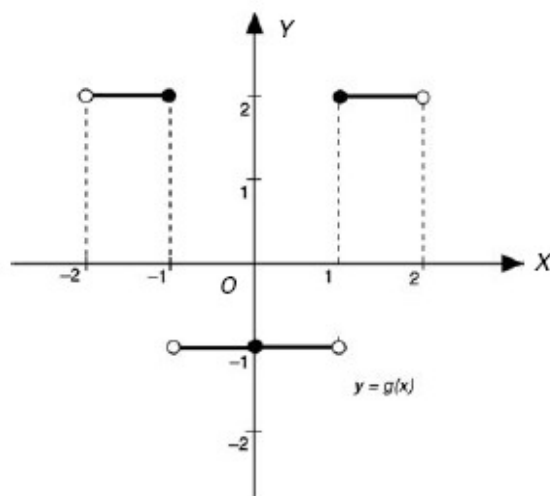
18. Quedan:

a)



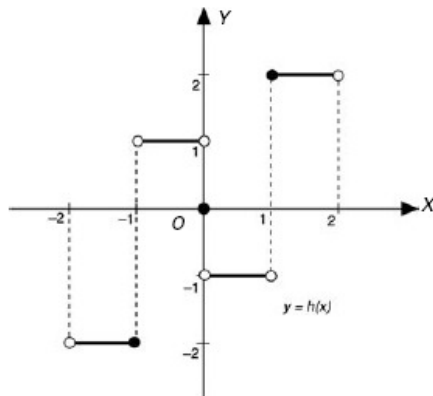
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ o } -2 \leq x < -1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \text{ o } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

b)



$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2 & \text{si } -2 < x \leq -1 \text{ o } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

c)



$$h(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ -1 & \text{si } -0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

19. Si $x < 0$ la función puede expresarse como $f(x) = \frac{x^2 - x}{x} = x - 1$

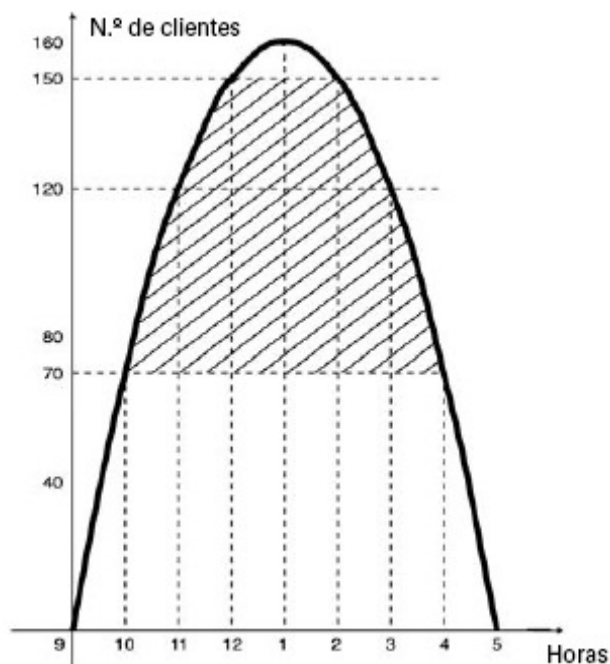
Estudiamos el signo del cociente:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - 1) - (x_1 - 1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1 > 0.$$

Luego la función es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^3$

20. $C = 80h - 10h^2$ C = numero de clientes; h = numero de horas a partir de 9

Hacemos un grafico que ilustre la situación:



a) El número máximo de clientes es de 160.

$$b) 70 < 80h - 10h^2 < 150 \Rightarrow \begin{cases} 10h^2 - 80h + 70 < 0 & y \\ 10h^2 - 80h + 150 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h \in (1, 7) \\ h \in (-\infty, 3) \cup (5, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow h \in (1, 3) \cup (5, 7)$$

Hay que ir entre las 10 y las 12 de la noche o bien entre las 2 y las 4 de la madrugada.
Corresponde a la zona rayada de la grafica.

c) Debemos ir entre las 2 y las 4 de la madrugada. Corresponde a la zona de la derecha, dentro de la zona rayada.

d) El establecimiento cierra a las 5 de la madrugada.

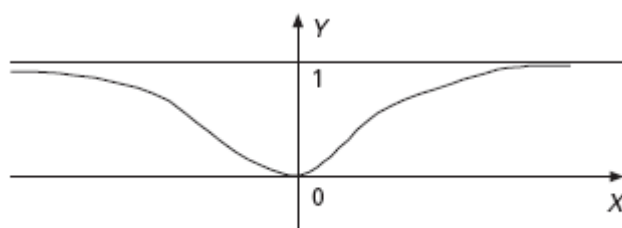
21. Veamos que $0 < \frac{x^2}{x^2+1} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Por un lado tenemos que $\frac{x^2}{x^2+1} < 1$ al ser las expresiones del numerador y del denominador siempre positivas.

De igual forma la función dada es menor que 1 al cumplirse:

$$\frac{x^2}{x^2+1} < 1 \Leftrightarrow x^2 < x^2+1 \Leftrightarrow 0 < 1$$

Puede observarse la acotación en la grafica



22. f es estrictamente creciente si siendo

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$$

$$f(x_1) = x_1^3 + ax_1$$

$$f(x_2) = x_2^3 + ax_2$$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 + ax_1 - (x_2^3 + ax_2) = (x_1^3 - x_2^3) + a(x_1 - x_2)$$

$$(x_1^3 - x_2^3) + a(x_1 - x_2) < 0$$

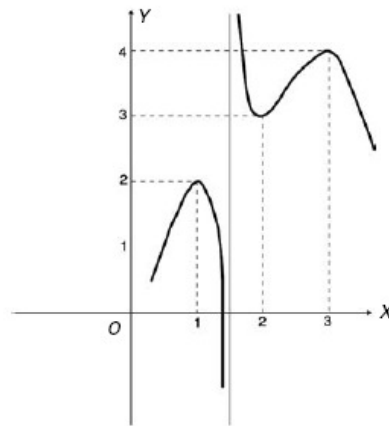
$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2 + a) < 0 \quad (1)$$

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$. La igualdad (1) será cierta si $x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2 + a > 0$

$$\Rightarrow \boxed{a > 0}, \text{ pues como } x_1 < x_2, \text{ entonces}$$

$$x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2 > 0 \Rightarrow \text{queda } \underline{a > 0}.$$

23. La solución es:



24. La función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ tiene un máximo relativo en el punto $p(e, f(e)) = \left(e, \frac{1}{e}\right)$. Luego

$$\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e} \Rightarrow e \ln x < x \Rightarrow \ln x^e < x \Rightarrow \boxed{x^e < e^x} \quad \forall x \in E(e, \varepsilon)$$

Unidad 9 – Límites de funciones

PÁGINA 209

cuestiones iniciales

1. Representa gráficamente la función que satisfaga las siguientes propiedades:

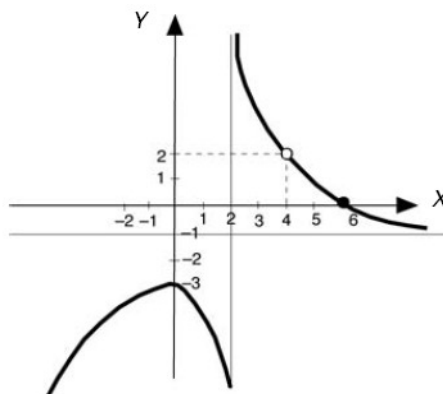
- Dom $f = \mathbb{R} - \{2, 4\}$
- Asíntota horizontal: $y = -1$
- Asíntota vertical: $x = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $f(6) = 0$; $f(0) = -3$

2. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1}$, halla:

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

SOLUCIONES

1. La gráfica queda:



2. Los límites en cada caso quedan:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 0$$

PÁGINA 225

ACTIVIDADES

■ Utiliza el lenguaje matemático en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Números impares.** Demuestra que la suma de dos números naturales impares es un número par.

2. **Números cuadrados.** Demuestra que si a, b, c y d son números naturales, tales que

$$P = a^2 + b^2 \quad \text{y} \quad Q = c^2 + d^2$$

entonces el producto PQ es también suma de los cuadrados de dos números naturales.

SOLUCIONES

1. Se puede decir:

Los números de la forma $2n+1$ y $2n+3$ son números impares. Su suma es:

$$(2n+1) + (2n+3) = 4n+4 = 4(n+1)$$

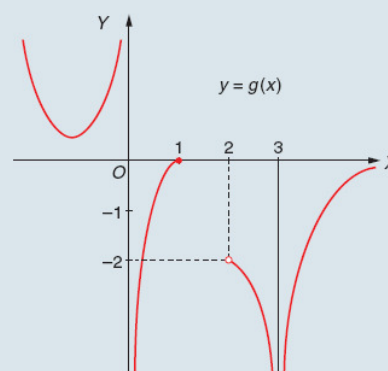
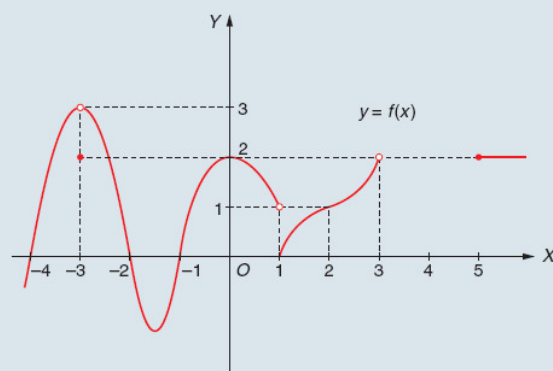
2. Queda del siguiente modo:

$$P \cdot Q = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Determina, en las siguientes funciones, los datos pedidos:



- | | | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| • $f(-3)$ | • $f(-2)$ | • $f(0)$ | • $f(4)$ | • $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ |
| • $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ |

2. Representa gráficamente funciones que satisfagan, respectivamente, las siguientes condiciones:

- a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -2$; $f(-3) = -2$; $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = [-3, +\infty)$.
- b) g estrictamente decreciente en $(0, 6)$; asíntota vertical en $x = 6$; $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -2$; no existe $g(3)$.
- c) h acotada inferiormente por 2; $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2$; asíntota vertical en $x = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

3. Calcula los siguientes límites:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x + 2} \right]$ | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-x}$ | g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^3}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-2}}{5}$ | h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{3} \right]^x$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3}$ | f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^5}$ | i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2}}$ |

4. Determina las asíntotas de cada una de las siguientes funciones:

- | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ | b) $f(x) = \frac{2x^2}{x + 2}$ | c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ | d) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^3 - 9x}$ |
|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|

5. Halla los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1}$ con su asíntota oblicua.

SOLUCIONES

1. Los datos requeridos son los siguientes:

$$y = f(x)$$

$$f(-3) = 2; f(-2) = 0; f(0) = 2; f(4) \text{ no definida}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 3; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ no existe}; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ no existe}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

$$y = g(x)$$

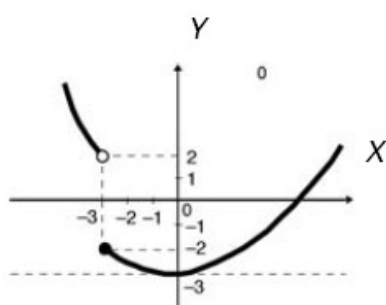
$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

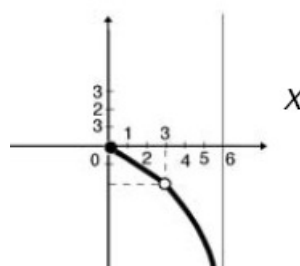
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \text{ no existe}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \text{ no existe}$$

2. Las gráficas quedan:

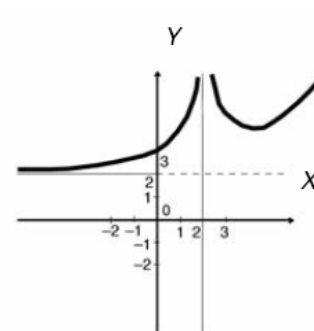
a)



b)



c)



3. La solución en cada caso es:

- | | | |
|--------------|--------------|--------------|
| a) 0 | b) $+\infty$ | c) $-\infty$ |
| d) 0 | e) $+\infty$ | f) 0 |
| g) $+\infty$ | h) 0 | i) $+\infty$ |

4. Queda:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

Asíntotas verticales: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = +1} \quad \boxed{x = -1}$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$

Asíntotas oblicuas: no tiene.

b) $g(x) = \frac{2x^2}{x+2}$

Asíntotas verticales: $x+2=0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x+2} = \pm\infty$ no existen.

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 2x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x+2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x}{x+2} = -4$$

La asíntota oblicua queda $\boxed{y = 2x - 4}$

c) $h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

Asíntotas verticales: no existen.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

Asíntotas oblicuas: no existen.

d) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^3 - 9x}$

Asíntotas verticales: $\boxed{x=0} \quad \boxed{x=3} \quad \boxed{x=-3}$.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3 - 9x} = 0$ quedando $\boxed{y=0}$

5. La solución queda:

La asíntota oblicua tendrá por ecuación $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^3 - x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x^2 + x}{2x^2 - 1} = -2$$

La asíntota oblicua es la recta de ecuación $y = x - 2$

Para hallar los puntos de corte de la asíntota oblicua con la función $f(x)$, resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 2 \\ y = \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{el punto es } P(2, 0)$$

■ 6. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 6}{x^2 + 3x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$

j) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 6x - 9}{x - 3}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 + 5x}$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 5x + 4}$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 2})$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$

ñ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1})$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x + 1}{5x - 1} \right)^{3x+2}$

p) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{3}{x-1}}$

q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} \right)^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

■ 7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - 4}{x + 1} \cdot \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2x} \right]$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} [x - 1]^{\frac{3}{x-2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3)]$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1 + x}{2 + x} \right]^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x + 2}{x - 1} - \frac{x + 5}{x^2 - 1} \right]$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{3x^2 + x} \right)^{x^2-1}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2x - 4}}{x - 2}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$

k) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2 + 4}{x + 4} \right]^{\frac{x}{x-1}}$

l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x + 7} - 3}$

■ 8. Calcula, utilizando infinitésimos equivalentes, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(7x)}{4x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}^2(x - 2)}{x^2 - 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - 1)}{2x - 4}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 2x}$

■ 9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + 3x]^{4/x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 + 3}{4x^2 + 5} \right]^{x/2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x - 1}{2x + 5} \right]^{\sqrt{x^2 + 3x} - x}$

■ 10. Calcula el valor de a ($a \neq 0$) para que se verifique $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 1} \right]^{ax} = e^{-5}$.

SOLUCIONES

6. Los límites quedan:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 6}{x^2 + 3x + 2} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 3x^2 + 2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x^2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x^2+x} = -\frac{5}{2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} \stackrel{\left(\frac{k}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-2} \quad \text{no existe este límite}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}+1 = 2$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} \cdot \frac{2 + \sqrt{4-x}}{2 + \sqrt{4-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2} = 1$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 6x - 9}{x - 3} = 0$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 + 5x} = \text{no existe este límite} \quad \left(\frac{k}{0} \right)$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 + 5x} = +\infty$$

$$m) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 0$$

$$n) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{n}) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) \frac{(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1})}{(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}} = -\infty$$

$$o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{5x-1} \right)^{3x+2} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+2) \cdot \left(\frac{5x+1}{5x-1} - 1 \right)} = e^{6/5}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3+1}{x^2+1} \right)^{\frac{3}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x-1} \cdot \left(\frac{x^3+1}{x^2+1} - 1 \right)} = e^{3/2}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2} \right)^{\frac{x^2+1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x-1} \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2} - 1 \right)} = e^2$$

7. Los límites quedan:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 1} \cdot \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x^2+4)}{(x+1) \cdot x} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{3}{x-2}} \stackrel{(1^\infty)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} \cdot (x-1-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} 3} = e^3$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3)][\sqrt{4x^2 - 5} + (2x - 3)]}{\sqrt{4x^2 - 5} + (2x - 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x - 14}{\sqrt{4x^2 - 5} + (2x - 3)} \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{12x}{x} - \frac{14}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2}} + \frac{2x}{x} - \frac{3}{x}} = 3$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = -\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x} + 1} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x-1} - \frac{x+5}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = 2$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{3x^2 + x} \right)^{x^2-1} \stackrel{(1^\infty)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-1) \left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2-1)(-5-x)}{3x^2+x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x - 1} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x+3} - 2) = 8$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 4}{x + 4} \right)^{\frac{x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} \right) \left(\frac{x^2+4}{x+4} - 1 \right)} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot (x^2-x)}{(x-1)(x+4)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{(x+4)}} = e^{1/5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{l) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = 4
 \end{aligned}$$

8. Los límites quedan:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan^2(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{x+2} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(7x)}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(7x)^2/2}{4x^2} = \frac{49}{8}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln[1+(x-2)]}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{2(x-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x}-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot \ln 2}{2x} = \frac{3 \cdot \ln 2}{2}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

9. Las soluciones son:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{4}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x} (1+3x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x}{x}} = e^{12}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3}{4x^2+5} \right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{2}{4} \right)^{\infty} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+5} \right)^{\sqrt{x^2+3x}-x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3x}-x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = 1^{\frac{3}{2}} = 1
 \end{aligned}$$

10. El límite es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 1} \right)^{ax} \underset{(1^\infty)}{=} e^{x \lim_{x \rightarrow +\infty} ax \left(\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 1} - 1 \right)} = e^{x \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax(5x-1)}{x^2+1}} = e^{x \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5ax^2 - ax}{x^2+1}} = e^{5a}$$
$$e^{5a} = e^{-5} \Rightarrow 5a = -5 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

- 11. Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:

- $f'(0) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

- 12. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{x-2}}$$

- 13. Calcula el límite cuando x tiende a 2 y cuando x tiende a -2 de la función $f(x) = |x^2 - 4|$.

- 14. Calcula cuánto debe valer a para que la función siguiente tenga límite cuando x tienda a 1:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 15. Encuentra las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$. ¿Cuántas asíntotas oblicuas puede tener una función racional?, ¿cuántas horizontales?, ¿cuántas verticales?

- 16. Obtén las asíntotas de la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$

- 17. Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas y, en caso afirmativo, hállalas:

a) $f(x) = \ln(x - 1)$

b) $g(x) = e^{x-1}$

- 18. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Si $a \notin \text{Dom } f$, ¿puede existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$?

b) Si $a \in \text{Dom } f$, ¿puede ser $x = a$ asíntota vertical?

19. Determina el valor de a para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2 + ax + 1} - x] = 2$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x+5}{4x+3} \right]^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi} \right]^{ax^2}$$

- 20. Discute el siguiente límite en función de los valores de a : $\lim_{x \rightarrow a} [\sqrt{3x+4} - \sqrt{ax}]$

- 21. Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2} \right]$$

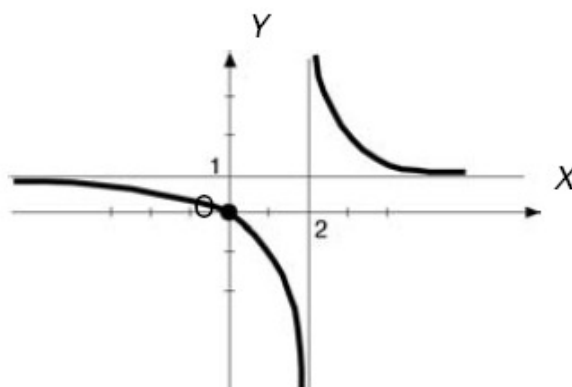
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right]$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} - \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}} \right]$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - x^2}{x^2}$$

SOLUCIONES

11. La gráfica queda:



12. El límite depende de por dónde nos acercamos a $x=2$, en cada caso queda:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = 0$$

13. Queda del siguiente modo:

$$\text{Sea la función definida a trozos: } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } -\infty < x \leq -2 \text{ ó } 2 \leq x < +\infty \\ 4 - x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \end{cases}$$

Los límites quedan:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) = 0 & \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - x^2) = 0 & \text{entonces: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (4 - x^2) = 0 & \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (4 - x^2) = 0 & \text{entonces: } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

14. Queda:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2 \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 - ax^2) = 3 - a$$

Para que la función tenga límite cuando x tiende a 1 ambos deben coincidir, por tanto $a=1$.

15. La solución es:

Asíntotas verticales: $x=2$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \pm\infty$ no existen.

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2-3}{2x-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3}{2x^2-4x} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2-3}{2x-4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-3}{2x-4} = 1$$

La asíntota oblicua queda $y = \frac{1}{2}x + 1$

- Una función puede tener como máximo 2 asíntotas oblicuas correspondientes a los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$.
- Una función puede tener como máximo 2 asíntotas horizontales correspondientes a los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$.
- Una función racional puede tener tantas asíntotas verticales como ceros del denominador que no lo sean en el numerador.

16. La solución queda:

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} = \pm\infty$ no existen.

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2+x-5}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+x-5}{x^2-2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2+x-5}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-5}{x-2} = 3$$

La asíntota oblicua queda $y = x + 3$

17. Queda del siguiente modo:

a) $f(x) = \ln(x-1)$

Para $x=1$; $y \rightarrow -\infty$ tiene asíntota vertical en $\boxed{x=1}$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty$ no existen.

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} = 0$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\ln(x-1) - 0 \cdot x) = +\infty$$

No tiene asíntotas oblicuas.

b) $g(x) = e^{x-1}$

Asíntotas verticales: No tiene.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0$ tiene asíntota horizontal en $\boxed{y=0}$

No tiene asíntotas oblicuas.

18. La solución queda:

a) Sí. Por ejemplo $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$. El punto $x=0 \notin \text{Dom } f$, pero existe $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$

b) No es posible pues las asíntotas verticales son los valores de x para los cuales $y \rightarrow \pm\infty$.

19. Queda del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + ax + 1} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x)(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 1}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a = 4} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+5}{4x+3} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{4x+5}{4x+3} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{4x+3}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{4x^2 + \pi} \right)^{ax^2} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^2 \left(\frac{4x^2 + 1}{4x^2 + \pi} - 1 \right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(1-\pi)x^2}{4x^2 + \pi}} = e^{\frac{a(1-\pi)}{4}} = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \frac{2}{1-\pi} \end{aligned}$$

20. La solución queda:

$$1.^{\circ} \text{ Si } a = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x+4} - \sqrt{ax} = +\infty$$

$$2.^{\circ} \text{ Si } a > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x+4} - \sqrt{ax} \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x+4} - \sqrt{ax})(\sqrt{3x+4} + \sqrt{ax})}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{ax}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4-ax}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{ax}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 3 \\ -\infty & \text{si } a > 3 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 3 \end{cases}$$

21. Los límites quedan:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{3x^2} = \frac{(2x)^2}{3x^2} = \frac{4}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} - \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} - \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right] = -2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 - 1 = 0$$

Unidad 10 – Continuidad de las funciones

PÁGINA 235

cuestiones iniciales

1. Representa gráficamente la siguiente función y estudia su continuidad en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

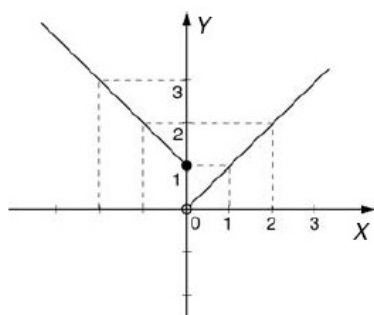
2. ¿Puedes definir la función $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ en algún punto de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}$?

3. Estudia la continuidad de la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. La solución queda del siguiente modo:



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x + 1 = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \neq f(0)$$

En $x = 0$ la función no es continua.

2. La solución es:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x - 1)}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x - 1)}{x - 1} = 1$$

No es continua en $x = 1$, pues no está definida. Evitaremos la discontinuidad, definiéndola:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

3. La continuidad queda:

Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$.

- $$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^2) = 1$$
$$f(0) = e^0 = 1$$

Luego existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, por tanto esta función es continua en $x=0$.

- $$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^2) = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$
$$f(1) = 1 - 1^2 = 0$$

Por tanto esta función no es continua en $x=1$ por no coincidir los dos límites laterales.

ACTIVIDADES

■ Utiliza los conceptos asociados a los teoremas en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Teoremas.** A partir del siguiente enunciado, que es un teorema directo, enuncia el recíproco, el contrario y el contrarrecíproco:

«La suma de dos números naturales impares es un número par.»

2. **Desigualdad.** Demuestra que si a y b son dos números reales positivos, entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

SOLUCIONES

1. La solución queda:

Directo: Si sumamos dos números impares entonces, obtenemos un número par. Este resultado es verdadero: $(2n+1) + (2m+1) = 2(n+m+1)$ que es un número par

Recíproco: Si obtenemos un número par, entonces, sumamos dos números impares. Este resultado es falso. Podemos obtener un número par de la suma de dos pares.

Contrario: Si no sumamos dos números impares, entonces, no obtenemos un número par. Este resultado es falso. De la suma de dos números pares se obtiene un número par.

Contrarrecíproco: Si no obtenemos un número par, entonces, no sumamos dos números impares. Este resultado es verdadero. Si no obtenemos un número par, estamos obteniendo un número impar. Este resultado proviene de sumar un número impar y otro número par; por tanto, no sumamos dos números impares.

2. La solución es:

Como en la hipótesis nos dicen que a y b son dos números reales positivos, podríamos decir $m = \sqrt{a}$ y $n = \sqrt{b}$; así la desigualdad dada quedaría de la forma:

$$\frac{2}{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}} \leq m \cdot n \quad \text{Operando en esta desigualdad obtenemos} \quad \frac{2m^2 n^2}{m^2 + n^2} \leq m \cdot n \quad \text{o lo que es lo mismo, vamos a demostrar que} \quad m \cdot n - \frac{2m^2 n^2}{m^2 + n^2} \geq 0.$$

Operando, convenientemente, en la primera expresión obtenemos:

$$m \cdot n \left[\frac{m^2 + n^2 - 2mn}{m^2 + n^2} \right] = m \cdot n \frac{(m-n)^2}{m^2 + n^2} \quad \text{y como } m \text{ y } n \text{ son números reales positivos queda probado que esta expresión es mayor o igual que cero que es lo que queríamos demostrar.}$$

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} 5 - \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

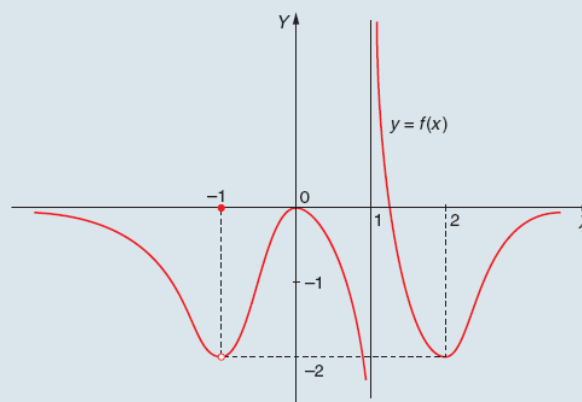
$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x <> 3 (x \neq 3) \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

- 2. Calcula k , en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

$$a) f(x) = \begin{cases} \sin(3x) & \text{si } x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2k + \cos(2x) & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 + |x| & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{2}x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 3. Estudia la continuidad de la función $y = f(x)$, representada en la gráfica, en los puntos de abscisa $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Si existiesen puntos de discontinuidad, indica el tipo. Determina el dominio, recorrido, máximos y mínimos absolutos y relativos, y asíntotas.



- 4. Halla el valor de a para el cual la función f dada por $(ax - 3)$ si $x < 4$ y por $(-x^2 + 10x - 13)$ si $x \geq 4$, es continua.

- 5. Halla en el dominio y estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = |x^2 - 6x + 5|$$

$$b) f(x) = \sqrt{4 + x} + \sqrt{4 - x}$$

$$c) f(x) = \ln(x^2 - 3x)$$

- 6. Determina los parámetros a y b para que las funciones que siguen sean continuas en su dominio de definición:

$$a) f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + x \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 + \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ 2(a + x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ b/x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- 7. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos:

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & \text{si } x < -2 \\ \sin(\pi x) & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < 4 \\ x^2 - 12 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- 8. Halla el valor de a para el cual la función $f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4}$ tenga una discontinuidad evitable en $x = 1$.

SOLUCIONES

1. La continuidad queda:

a) La continuidad en $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 5 - \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 5 - \frac{(-x)}{x} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 5 - \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 5 - \frac{x}{x} = 4$$

$$f(0) = 5$$

No es continua en ese punto al no coincidir los límites laterales.

b) La continuidad en $x=3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 3) = 6$$

$$h(3) = 6$$

$h(x)$ es continua en toda la recta real.

2. La solución queda:

a) La continuidad en $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sin(3x) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} [2k + \cos(2x)] = 2k + \cos \pi = 2k - 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$f(x) \text{ es continua en } x = \frac{\pi}{2} \text{ si } 2k - 1 = -1 \Rightarrow k = 0.$$

Para $k = 0 \Rightarrow f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) La continuidad en $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3/2 x + 1) = 1$$

$$h(0) = k.$$

$h(x)$ es continua en $x = 0$ si $k = 1$.

Para $k = 1$, la función $h(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

3. La solución es.

- En $x=-1$, la $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad evitable.
- En $x=1$, la $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad no evitable de salto finito.
- En $x=2$, la $f(x)$ es continua.
- $\text{Dom } f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- $\text{Im } f = \mathbb{R}$.
- No tiene ni máximos ni mínimos absolutos.
- Tiene dos mínimos relativos en los puntos $(-1, -2)$ y $(2, -2)$, y un máximo relativo en el punto $(0, 0)$.
- Asíntota vertical: $x=1$.
- Asíntota horizontal: $y=0$.

4. La solución es:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 13 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

La función $f(x)$ es continua en todos los números reales, excepto en $x=4$. Veamos qué ocurre en $x=4$.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} ax - 3 = 4a - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} -x^2 + 10x - 13 = 11$$

$$f(4) = 11$$

Para que esta función sea continua en $x=4$ se debe cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$$

$$\text{Por tanto, } 4a - 3 = 11 \Rightarrow \frac{7}{2} = a$$

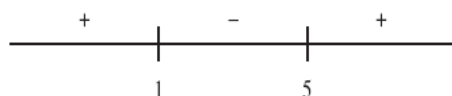
5. En cada uno de los casos:

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f(x) = |x^2 - 6x + 5| =$$

$$= \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si } x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ -(x^2 - 6x + 5) & \text{si } x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $(x^2 - 6x + 5)$. Los ceros de la función son $x=1$ y $x=5$.



Luego:

$$x^2 - 6x + 5 \geq 0 \text{ si } x \leq 1 \text{ o } x \geq 5$$

$$x^2 - 6x + 5 < 0 \text{ si } 1 < x < 5.$$

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si } x \leq 1 \text{ o } x \geq 5 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } 1 < x < 5 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y $x = 5$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 6x + 5) = 0 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 6x - 5) = 0 = f(1)$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (-x^2 + 6x - 5) = 0 = f(5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (x^2 - 6x + 5) = 0 = f(5)$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 5$.

Por tanto, la función $f(x)$ es continua en toda la recta real.

$$b) \text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / 4 + x \geq 0 \text{ y } 4 - x \geq 0\}$$

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 4 + x \geq 0 \\ 4 - x \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq -4 \\ x \leq 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Solución } [-4, 4]$$

$$\text{Dom } f = \{x \in [-4, 4]\} = [-4, 4]$$

La función $f(x)$ es continua en todos los puntos de su dominio. Es decir, es continua $\forall x \in [-4, 4]$

$$c) \text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x < 0 \text{ o } x > 3\}$$

La función $f(x)$ es continua en $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

6. En cada caso queda del siguiente modo:

a) Estudiamos la continuidad en $x=0$ y $x=1$. Obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b = a + b \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + x \cdot \ln x = 1$$

Para que la función sea continua tiene que ser $a=1$ y $b=0$.

b) Procedemos como en el caso anterior:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \cos x) = 2 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2(a + x) = 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2(a + x) = 2a + 2 \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x^2} = b$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 4$.

7. En cada caso queda:

a) Esta función tiene dos puntos de discontinuidad en los ceros del denominador $x=0$ y $x=2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \rightarrow +\infty$$

En $x=0$ la función tiene un punto de discontinuidad no evitable de salto infinito.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)}{x} = 2$$

En $x=2$ la función tiene un punto de discontinuidad evitable.

b) En $x=1$ la función tiene una discontinuidad no evitable de salto finito, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^2) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

c) En $x=0$ la función tiene una discontinuidad no evitable de salto finito, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2 - x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1$$

d) Veamos la continuidad en $x=-2$, $x=2$ y $x=4$.

- $$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(-x) = \ln 2 \neq f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \sin(\pi x) = \sin(-2\pi) = 0 = f(-2)$$

La función no es continua en $x=-2$.

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sin(\pi x) = \sin(2\pi) = 0 = f(2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 0 = f(2)$$

La función es continua en $x=2$.

- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} 0 \neq f(4)$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} x^2 - 12 = 4 = f(4)$$

La función es no continua en $x=4$.

Los puntos de discontinuidad son $x=-2$ y $x=4$.

8. La solución queda:

a debe valer -2 , puesto que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+2)}{(x+4)} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)}{(x+4)} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Para $a=-2$ la función tiene en $x=1$ un punto de discontinuidad evitable.

-

SOLUCIONES

9. Por el teorema de conservación del signo como $f(x)$ es continua en $x=2$ y $f(2) \neq 0$ existe un entorno de 2 en el cual el signo de $f(x)$ es el mismo que en $f(2)$, en este caso negativo.

10. La solución queda:

- La función $f(x) = x^2 - e^x + 2$ es continua en el intervalo $[1, 2]$ y además $f(1) > 0$ y $f(2) < 0$ es decir verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. Por tanto $\exists c \in (1, 2)$ de modo que $f(c) = 0$.
- La función $f(x) = x - \ln x - 3$ es continua en el intervalo $[1, 3]$ y además $f(1) < 0$ y $f(3) < 0$ es decir no verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. Por tanto no podemos asegurar que exista un valor que anule la función en el intervalo dado.

11. La solución queda:

- La función $f(x) = x^3 - 8x^2 + 3$ es continua en el intervalo $[-1, 0]$ y además $f(-1) < 0$ y $f(0) > 0$ es decir verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. Por tanto $\exists c \in (-1, 0)$ de modo que $f(c) = 0$, es decir la ecuación dada tiene solución en ese intervalo.
- La función $f(x) = x - x \sin x - \cos x$ es continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y además $f(-\pi) < 0$ y $f(\pi) > 0$ es decir verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. Por tanto podemos asegurar que exista un valor solución de la ecuación en el intervalo dado.

12. Para demostrar que la igualdad es cierta hay que probar que la siguiente función $f(x) = 3 \sin x - e^{-x} \cos x$ verifica el teorema de Bolzano.

1.º $f(x)$ es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.º $f(0) = -1 < 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 > 0$, es decir $\text{signo } f(0) \neq$

$\neq \text{signo } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x)$ cumple Bolzano en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

luego $\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tal que $f(c) = 0$.

13. La solución es:

$f(x)$ es continua en $[0, 2]$ y además $f(0) = 2$ y $f(2) = -6$, es decir, $\text{signo } f(0) \neq \text{signo } f(2)$, por tanto la función verifica el teorema de Bolzano, luego $\exists c \in (0, 2) / c^3 - 8c + 2 = 0$, es decir, corta al eje de abscisas.

No podemos decir lo mismo de $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$, puesto que esta función no es continua en el punto $x=1$; luego no es continua en $[0,2]$, por lo que no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

14. La solución es:

Para que sea cierto que $\exists c \in (-2,0) / f(x)=0$, la función debe verificar el teorema de Bolzano que es el que nos garantiza que exista esta solución. La función dada no verifica las hipótesis del teorema por lo que no podemos decir nada de su continuidad en $[-2,0]$.

15. La solución queda:

No contradice el teorema al no ser continua la función en el intervalo $[-3,-1]$.

La función presenta en $x=-2$ una discontinuidad no evitable con salto infinito.

16. La solución queda:

La función $h(x)=f(x)-g(x)$, es decir, $h(x)=x^3+x^2-3-\cos(\pi x)$ cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[0,-2]$.

La tesis del teorema permite probar que efectivamente existe algún valor en $(0,2)$ en el cual las funciones se cortan.

17. La solución queda:

Estudiemos si la función es continua en el intervalo $[-1, 1]$ y para ello estudiamos la continuidad en $x=0$ que es donde cambia de definición pues en el resto es continua:

$$f(0)=2 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} + 1) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + 2) = 2$$

Es decir la función es continua en el intervalo dado. Además $f(-1) = 3 - a < 0$ y $f(1) > 0$. Por tanto para que la función verifique las hipótesis del teorema de Bolzano se debe verificar que $a < 3$.

18. La solución queda:

Vamos a aplicar el teorema de Darboux.

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ; \quad e^x - 1 = e - 1 \Rightarrow x = 1$$

La función dada es continua en el intervalo $[0, 1]$ luego aplicando el teorema indicado podemos afirmar que alcanza todos los valores del intervalo $[f(0), f(1)] = [0, e - 1]$.

19. Se cumple:

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x^3 - 1 = 7 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

Por el teorema de Darboux o de los valores intermedios si $x \in [1, 2]$ entonces $f(x)$ recorre los valores del intervalo $[0, 7]$.

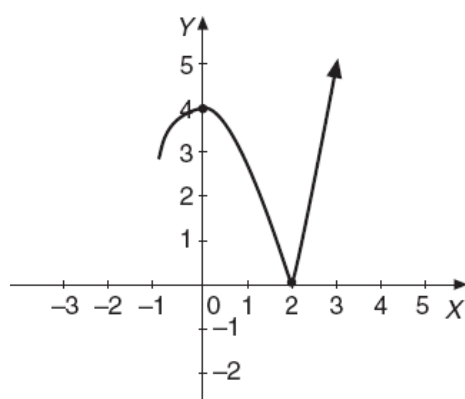
Por el teorema de la acotación en un intervalo cerrado, la función $f(x) = x^3 - 1$, que es continua, está acotada en $[1, 2]$.

20. La solución es:

La función $f(x) = \frac{4}{x}$ no es continua en $[0, 3]$, puesto que no es continua en $x = 0$. La función

$f(x) = \frac{4}{x}$ sí es continua en $[1, 3]$, por lo que podemos asegurar, por el teorema de acotación en un intervalo cerrado, que $f(x)$ está acotada en $[1, 3]$.

21. La solución queda del siguiente modo:



La función $f(x)$ está definida por:

$$\begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Por el teorema de Weierstrass la función alcanza sus extremos absolutos en $[-1, 3]$.

Puede observarse que el mínimo absoluto es 0 y el máximo absoluto es 5.

22. La solución es:

No contradice el teorema de Weierstrass, puesto que $f(x) = \tan x$ no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$; por tanto, no es continua en $[0, \pi]$. Debido a esto, a $f(x)$ no se le puede aplicar el teorema de Weierstrass.

23. La solución queda:

La función dada no es continua en $x = 1$, por tanto no es continua en el intervalo $[0, 2]$, de donde no podemos afirmar que este acotada. En cambio si es continua en el intervalo $[-2, 0]$ por tanto podemos afirmar que en ese intervalo esta acotada.

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

- 24. Dadas las funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

estudia la continuidad de la función $g \circ f$.

- 25. Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ se cortan en algún punto de abscisa positiva.

- 26. Dada la función $f(x) = 2x^3 + 1$, prueba que existe un valor c perteneciente al intervalo $(0, 2)$ de manera que $f(c) = \frac{13}{4}$.

- 27. La función $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^3 + x^2 + ax + 12}$ presenta una discontinuidad evitable en $x = -2$, ¿para qué valor de a ?

- 28. Estudia el dominio y la discontinuidad de la función:

$$f(x) = \ln \left[\frac{x+2}{x^2} \right]$$

- 29. Si g es una función polinómica, ¿qué puedes afirmar sobre la continuidad de la función $f(x) = \frac{g(x)}{x^3 - x}$?

- 30. Halla a y b para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la función f y halla el punto $c \in (-\pi, \pi)$ al que hace mención el teorema:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ a + x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

- 31. La función f se define en $[-1, 1]$ del siguiente modo: vale -1 si $x \leq 0$ y vale $2x^3 - 1$ si $x > 0$. Explica si f verifica el teorema de Bolzano.

- 32. Sea la función $f(x) = x^2 + 1$. Haciendo uso del teorema necesario, cuyo enunciado debes escribir, analiza si dicha función toma todos los valores del intervalo $[1, 5]$.

- 33. Demuestra que la ecuación $\pi^x = e$ tiene solución en $(0, 1)$. ¿Lo cumple también la ecuación $\phi^x = e$, siendo ϕ el número de oro?

- 34. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$, ¿es continua? Prueba que existe $c \in [0, 3]$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano?

- 35. ¿La función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alcanza máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$? En caso afirmativo hálloslos.



SOLUCIONES

24. La solución es:

$$\text{La función } f(x) \text{ es } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función $g \circ f$ es:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Esta función es continua para cualquier número real.

25. La solución queda:

Veamos si la función $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en algún intervalo que hemos de buscar. Vemos que la función $h(x)$ dada es continua en el intervalo $[0,5; 1]$ y además $h(0,5) < 0$ y $h(1) > 0$ por tanto aplicando el teorema mencionado podemos decir que existe un valor en el intervalo $(0,5; 1)$ en el cual la función se anula es decir que $f(x) = g(x)$.

26. La solución es:

Veamos si la función $h(x) = f(x) - \frac{13}{4} = 2x^3 - \frac{9}{4}$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $(0,2)$. La función $h(x)$ dada es continua en el intervalo $(0, 2)$ y además $h(0) < 0$ y $h(2) > 0$ por tanto aplicando el teorema mencionado podemos decir que existe un valor en el intervalo $(0, 2)$ en el cual la función se anula es decir $h(x) = 0$; $f(x) = \frac{13}{4}$.

27. La solución queda:

Para $a = 4$, puesto que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4x + 12} = \frac{\frac{0}{0}}{\frac{0}{0}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2 - x + 6)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-2)}{x^2 - x + 6} = \\ &= \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4x + 12} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2 - x + 6)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-2)}{x^2 - x + 6} = -\frac{1}{3}$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = -2$ para $a = 4$.

28. La solución queda:

- $Dom f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+2}{x^2} > 0 \text{ y } x \neq 0 \right\}$

Por tanto, $Dom f = (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

- $f(x)$ es continua en todos los puntos de su dominio.

29. La solución es:

La $f(x)$ es discontinua en todos los ceros del denominador. En $x=0$; $x=1$; $x=-1$. En estos puntos la discontinuidad de $f(x)$ será evitable si estos valores anulan el numerador y será no evitable en aquellos que no anulan $g(x)$. Es decir, si $g(0)=0$ en $x=0$ $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad evitable, en caso contrario sería no evitable. Con $x=1$ y $x=-1$ se haría igual.

30. La solución es:

1º Estudiemos la continuidad de $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$.

- $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \cos x = \cos(-\pi) = -1 = f(\pi).$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} a + x^2 = a$$

$f(x)$ es continua en $x = 0$ si $a = 1$.

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} a + x^2 = a + 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x} = \frac{b}{1} = b = f(1)$$

$f(x)$ es continua en $x = 1$ si $a + 1 = b$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{b}{x} = \frac{b}{\pi} = f(\pi)$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $[-\pi, \pi]$, pues:

- $f(x)$ es continua por la derecha en $x = -\pi$
- $f(x)$ es continua por la izquierda en $x = \pi$
- $f(x)$ es continua en $(-\pi, \pi)$ si $a = 1$ y $a + 1 = b \Rightarrow$
 $\Rightarrow \boxed{a = 1; b = 2}$

2º $f(-\pi) = -1 < 0$ y $f(\pi) = 2/\pi > 0$, por tanto $\text{signo } f(-\pi) \neq \text{signo } f(\pi)$.

La función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano para $a = 1; b = 2$.

El valor $c \in (-\pi, \pi)$ es $c = \frac{-\pi}{2}$.

31. La solución queda:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^3 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } [-1, 1]$$

Veamos si $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en $[-1, 1]$. Para ello debe verificar:

1º $f(x)$ debe ser continua en $[-1, 1]$. Estudiemos la continuidad de $f(x)$ en $x=0$ que es el único punto en el cual puede presentar problemas.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = f(0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^3 - 1) = -1 = f(0)$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ la función es continua en $x=0$ por lo que es continua en $[-1, 1]$.

2º $f(-1) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$ luego $\text{signo } f(-1) \neq \text{signo } f(1)$

Por tanto, $f(x)$ verifica el teorema de Bolzano en $[-1, 1]$.

32. Se cumple:

$$x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Por el teorema de Darboux o de los valores intermedios la función continua $f(x) = x^2 + 1$ toma los valores del intervalo $[1, 5]$, siempre que x recorra los valores del intervalo $[-2, 0]$ o $[0, 2]$.

33. La solución queda:

- Para ver si la ecuación $\pi^x = e$ tiene soluciones en $(0, 1)$, veamos si $f(x) = \pi^x - e$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en $[0, 1]$.

$f(x)$ es continua en $[0, 1]$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \pi^0 - e = 1 - e < 0 \\ f(1) &= \pi^1 - e = \pi - e > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{signo } f(0) \neq \text{signo } f(1)$$

Por tanto verifica Bolzano y $\exists c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $\pi^c = e$.

- Para ver si la ecuación $\phi^x = e$ hacemos el mismo estudio:

$f(x)$ es continua en $[0, 1]$.

$$f(0) = \phi^0 - e = 1 - e < 0$$

$$f(1) = \phi^1 - e = \phi - e = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - e < 0.$$

Como $\text{signo } f(0) = \text{signo } f(1)$ no se puede aplicar el teorema y no podemos asegurar que existe una solución en $(0, 1)$.

34. La solución queda:

La función $f(x)$ no es continua en $x = 2$ al cumplirse:

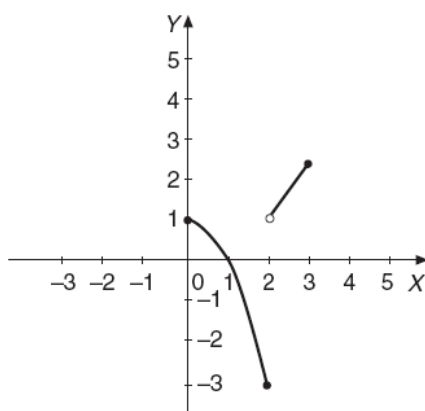
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 1) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 1$$

Se observa que para $c = 1 \in (0, 3)$ se cumple:

$$f(c) = f(1) = -1^2 + 1 = 0$$

Este hecho no contradice el teorema de Bolzano como puede verse en la gráfica de la función:



El que no se pueda explicar el teorema de Bolzano no quiere decir que no exista un valor en el que la función se anule, sino que no podemos explicarlo a través de dicho teorema.

35. La solución queda:

La función es continua en el intervalo dado, por tanto por el teorema de Weierstrass la función alcanza máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

El máximo absoluto es 1 y lo alcanza para $x=0$ y el mínimo absoluto es $\frac{1}{2}$ y lo alcanza para $x=1$ o $x=-1$.

Unidad 11 – Derivadas

PÁGINA 259

cuestiones iniciales

1. Dada la función $g(x) = \sqrt{3x+1}$, calcula el siguiente límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

2. Dada la función $f(x) = |2x - 4|$, calcula:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

SOLUCIONES

1. La solución es:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+1} - \sqrt{3x+1}}{h} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3x+3h+1} - \sqrt{3x+1})(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1})}{h \cdot (\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1})} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x+3h+1 - 3x-1}{h(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1})} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1})} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \end{aligned}$$

2. Queda:

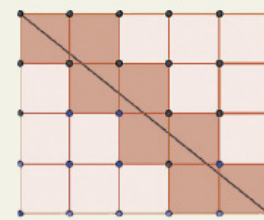
$$\begin{aligned} f(x) = |2x - 4| &= \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x \geq 2 \\ -2x + 4 & \text{si } x < 2 \end{cases} \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(2+h) - 4 - 0}{h} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{h} = 2 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2(2+h) + 4 - 0}{h} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h}{h} = -2 \end{aligned}$$

PÁGINA 277

ACTIVIDADES

■ Utiliza los dos tipos de razonamiento en la resolución de las siguientes situaciones matemáticas:

- 1. Diagonal y cuadrados.** En el rectángulo del dibujo, de orden 5×4 , la diagonal corta en 8 cuadrados pequeños. ¿Podrías enunciar una ley que determine el número de cuadrados que cortará la diagonal de un rectángulo de orden $a \times b$?
- 2. Producto de tres números.** Demuestra que el producto de tres números naturales consecutivos no puede ser el cubo de un número natural.



SOLUCIONES

1. La solución queda:

Experimentamos con los casos particulares más sencillos y ordenamos los resultados. Llamando a (altura) y b (base) a las dimensiones del rectángulo, podemos construir la tabla.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	4	4	6	6
3	3	4	3	6	7	6
4	4	4	6	4	8	8
5	5	6	7	8	5	10
6	6	6	6	8	10	6

En el elemento en el que se cruzan la fila a con la columna b aparece el número de cuadrados pequeños atravesados por la diagonal, para un rectángulo de dimensión $a \times b$. por ejemplo, la fila 4 y la columna 3 se cruzan en el número 6, luego, en un rectángulo de orden 4×3 la diagonal atraviesa 6 cuadrados.

Si analizamos los valores de la tabla anterior podemos plantear la siguiente conjetura:

- El número de cuadrados pequeños que atraviesa la diagonal de un rectángulo de orden $a \times b$ es igual a: $a + b - 1$, si a y b son primos entre sí.
- Si los números a y b no son primos entre sí, entonces el número es: $a + b - d$, siendo d el máximo común divisor de m y n .

2. La solución es:

El producto de tres números naturales consecutivos no puede ser un cubo perfecto ya que si lo fuese se tendría: $k^3 = n(n+1)(n+2)$

Por otra parte son validas las siguientes desigualdades: $n^3 < n(n+1)(n+2) < (n+1)^3$

La desigualdad primera $n^3 < n(n+1)(n+2) \Rightarrow n^3 < n^3 + 3n^2 + 2n$, es inmediata.

Para probar la segunda $n(n+1)(n+2) < (n+1)^3$, basta comprobar que: $n(n+2) < (n+1)^2$

Pero esto también es inmediato porque: $n(n+2) = n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Luego el número $n(n+1)(n+2)$ no puede ser un cubo perfecto ya que se encuentra comprendido entre dos cubos perfectos consecutivos.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula la tasa de variación media en el intervalo $[2, 5]$ para las funciones:

$$f(x) = 7 - 2x \quad g(x) = 4x^2 - 3x + 5 \quad k(x) = \frac{3x}{x^2 + 1} \quad t(x) = \sqrt{x + 4}$$

2. Calcula, mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$\text{a) } f(x) = (2x - 1)^2; Df(2) \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x + 3}; f'(6) \quad \text{c) } f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}; Df(0)$$

3. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en $x = 0$:

$$\text{a) } f(x) = |x| \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. ¿Para qué valores de a y b cada una de las siguientes funciones es continua y derivable?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 20x^2 + bx + a & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax + b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{x}{2\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

5. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 2x^3 + x$ en el origen de coordenadas.

6. Halla los puntos en los cuales la tangente a la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 30x - 6$ es paralela a la recta de ecuación $y = 6x - 5$.

7. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $xy^2 - 5y = 6$ en el punto $(1, 6)$.

8. Dada la función $y = x^2 - 4x + 3$, encuentra un punto de su gráfica en el cual la recta tangente a ella sea paralela a la secante a la curva en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 4$.

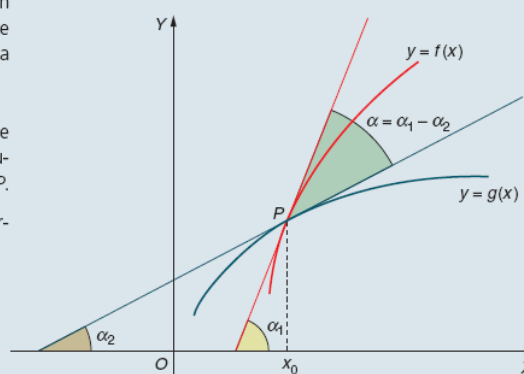
9. Halla los valores de a y b para los cuales la recta tangente a la curva $y = x^2 + ax + b$ en el punto $P(3, 0)$ tenga de pendiente 2.

10. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = e^{3x}$ en un punto cualquiera $x = a$. Halla el valor de a para que dicha recta pase por el punto (exterior a la curva) $P(1, 0)$.

11. Llamamos ángulo de dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ que se cortan en un punto P de abscisa x_0 al menor de los ángulos α que forman sus respectivas tangentes en el punto P . Halla el ángulo que forman los siguientes pares de curvas en todos sus puntos de corte:

$$\text{a) } f(x) = x^2 \\ g(x) = x + 2$$

$$\text{b) } f(x) = x^3 + x^2 \\ g(x) = x + 1$$



SOLUCIONES

1. La solución en cada caso es:

- $f(x) = 7 - 2x$

$$tv_m[2, 5] = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{-3 - 3}{3} = -2$$

- $g(x) = 4x^2 - 3x + 5$

$$tv_m[2, 5] = \frac{g(5) - g(2)}{5 - 2} = \frac{90 - 15}{3} = 25$$

- $k(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$

$$tv_m[2, 5] = \frac{k(5) - k(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{15}{26} - \frac{6}{5}}{3} = -\frac{27}{130} \approx -0,21$$

- $t(x) = \sqrt{x + 4}$

$$tv_m[2, 5] = \frac{t(5) - t(2)}{5 - 2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{6}}{3} \approx 0,18$$

2. Las derivadas son:

a) $D[f(2)] = f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(2+h) - 1]^2 - 3^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 + 12h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4h + 12)}{h} = 12$$

b) $f'(6) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{9+h} - 3}{h} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+h} - 3)(\sqrt{9+h} + 3)}{h(\sqrt{9+h} + 3)} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{9+h} + 3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{9+h} + 3} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } D[f(0)] &= f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{h^2 + 1} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h^2}{(h^2 + 1)h} = \left(\frac{0}{0}\right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h^2 + 1} = 0
 \end{aligned}$$

3. En cada caso:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \bullet \quad f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1 \\
 f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1
 \end{aligned}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues las derivadas laterales son distintas.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-1}{h} = 0 \\
 f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + 1 - 1}{h} = \left(\frac{0}{0}\right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} -h = 0
 \end{aligned}$$

$g(x)$ es derivable en $x = 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } h - 0}{h} = 1 \\
 f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - h^2}{h} = \left(\frac{0}{0}\right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(h-1)}{h} = -1
 \end{aligned}$$

4. El estudio queda:

a) Al ser la función continua en $(0, 2)$ se cumple:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 1^-} (x^3 - 12x + 1) &= \lim_{h \rightarrow 1^+} (20x^2 + bx + c) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -10 &= 20 + b + c \Leftrightarrow b + c = -30 \end{aligned}$$

La función es derivable en $(0, 2)$, por tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 12x + 1 - (-10)}{x - 1} &= \\ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{20x^2 + bx + c - (-10)}{x - 1} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -9 &= 40 + b \Leftrightarrow b = -49. \end{aligned}$$

La solución del sistema: $b = -49$; $c = 19$

b) para que sea continua la función debe cumplirse:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{ax + b} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{b} \Leftrightarrow b = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{ax + b} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2a + b} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

La solución del sistema: $a = -1$; $b = 4$

La función es derivable en cualquier punto salvo en $x = 0$.

En este punto las derivadas laterales no coinciden al ser: $f'(0^-) = 0$; $f'(0^+) = -\frac{1}{4}$;

En $x = 2$ la función es derivable puesto que

$$\begin{aligned} f'(2^-) &= \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4} \quad \text{y} \quad f'(2^+) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ &\text{es decir } f'(2^-) = f'(2^+) \end{aligned}$$

5. La solución es:

$$f(x) = 2x^3 + x$$

$$\text{Recta tangente: } y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$$

$$f'(x) = 6x^2 + 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

$$\text{Recta normal: } y - f(0) = \frac{-1}{f'(0)} \cdot (x - 0)$$

$$y - 0 = -1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -x}$$

6. La solución queda:

La pendiente de la recta $y = 6x - 5$ vale 6; por tanto, la pendiente de la recta tangente, al ser paralela a la anterior, también vale 6. Hemos de encontrar el punto $(x_0, f(x_0))$ en el cual $f'(x_0) = 6$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 6x - 30 \Rightarrow f'(x_0) = 6x_0^2 + 6x_0 - 30 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6x_0^2 + 6x_0 - 30 = 6 \Rightarrow 6x_0^2 + 6x_0 - 36 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_0^2 + x_0 - 6 = 0 \Rightarrow x_0 = 2; x_0 = -3 \end{aligned}$$

Los puntos son: (2, -38) y (-3, 57).

7. La solución es:

Derivando obtenemos

$$y^2 + 2xyy' - 5y' = 0$$

$$36 + 12m - 5m = 0$$

$$m = -\frac{36}{7}$$

$$\text{Recta tangente: } 36x + 7y - 78 = 0$$

8. La recta secante que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(4, 3)$ es $y = x + 1$.

Su pendiente vale 1, luego la pendiente de la tangente vale 1 al ser rectas paralelas $\Rightarrow f'(x_0) = 1$.

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 - 4 \Rightarrow 2x_0 - 4 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{2}$$

El punto pedido es $\left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{4}\right)$

9. La solución:

La grafica de la curva dada pasa por el punto $P(3, 0) \Rightarrow 0 = 9 + 3a + b$.

Por otro lado, $f'(3) = 2 \Rightarrow$ como $f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(3) = 6 + a \Rightarrow 6 + a = 2 \Rightarrow a = -4$

Luego, $a = -4$ y $b = -9 - 3a = 3 \Rightarrow \boxed{a = -4 \text{ y } b = 3}$

10. Queda:

La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = e^{3x}$ en $x = a$ es:

$$y - e^{3a} = 3e^{3a}(x - a)$$

Si esta recta pasa por el punto $P(1, 0)$ se cumple:

$$\begin{aligned} -e^{3a} &= 3e^{3a}(1 - a) \Leftrightarrow -1 = 3(1 - a) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{3} = 1 - a \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

11. La solución en cada caso queda:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ g(x) &= x + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ \Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

Los puntos de corte son $(2, 4)$ y $(-1, 1)$

- Recta tangente a $f(x)$ en $(2, 4)$.

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4$$

Recta tangente a $g(x)$ en $(2, 4)$

$$y - g(2) = g'(2) (x - 2) \Rightarrow y - 4 = 1 (x - 2) \Rightarrow y = x + 2$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 4 \Rightarrow \alpha_1 = 75^\circ 57' 50''$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$$

El ángulo que forman las curvas $f(x)$ y $g(x)$ en el punto $(2, 4)$ vale: $\alpha_1 - \alpha_2 = 30^\circ 57' 50''$

- Recta tangente a $f(x)$ en $(-1, 1)$

$$y - f(-1) = f'(-1) (x + 1)$$

$$\Rightarrow y - 1 = -2 (x + 1) \Rightarrow y = -2x - 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = -2$$

Recta tangente a $g(x)$ en $(-1, 1)$

$$y - g(-1) = g'(-1) (x + 1) \Rightarrow y - 1 = 1 (x + 1) \Rightarrow y = x + 2$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_2 = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -2 \Rightarrow \alpha_1 = 116^\circ 33' 54''$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$$

El ángulo que formen $f(x)$ y $g(x)$ en el punto $(-1, 1)$ vale: $71^\circ 33' 54''$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + x^2 \\ g(x) = x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Se cortan en } (1, 2) \text{ y } (-1, 0)$$

- La recta tangente a $f(x)$ en $(1, 2)$ tiene de pendiente $5 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = 5 \Rightarrow \alpha_1 = 78^\circ 41' 24''$

La recta tangente a $g(x)$ en $(-1, 0)$ tiene por pendiente $1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$

El ángulo que forman en el punto $(1, 2)$ es: $33^\circ 41' 24''$

- La recta tangente a $f(x)$ en $(-1, 0)$ tiene de pendiente $1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 45^\circ$

La recta tangente a $g(x)$ en $(-1, 0)$ tiene de pendiente $1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$

El ángulo que forman en $(-1, 0)$ vale 0° .

■ 12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

- | | | |
|---|--|--------------------------------------|
| a) $D[x^2]$ | g) $D[x^3 \cdot x^4]$ | m) $D[(x^2 - 3)^5]$ |
| b) $D[(3x)^{1/3}]$ | h) $D[x \cdot 4^x]$ | n) $D[(x + 1)^3 \cdot (x - 1)^2]$ |
| c) $D[3^x \cdot \ln x]$ | i) $D[(e^{2x} + 3)^4]$ | ñ) $D[\ln(2 - 3x^2)^4]$ |
| d) $D\left[\frac{2}{(x^3 - 3x^2)^6}\right]$ | j) $D\left[\frac{1}{\sqrt{4 - 5x^2}}\right]$ | o) $D[(4x + 2) \cdot \sqrt{4x - 2}]$ |
| e) $D\left[\frac{e^x}{x}\right]$ | k) $D\left[\frac{x}{e^x}\right]$ | p) $D[x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x}]$ |
| f) $D[\sin 4x]$ | l) $D[\sin^4 x]$ | q) $D[\sin x^4]$ |

■ 13. Calcula las derivadas que se indican a continuación:

- | | | |
|---|--|--|
| a) $D[(x - \sqrt{1 - x^2})^3]$ | i) $D[\sin^2 x^2]$ | p) $D[\arcsen \sqrt{x - 1}]$ |
| b) $D\left[\frac{\cos(x - 1)}{\cos(x + 1)}\right]$ | j) $D[x^2 + \sin x]$ | q) $D\left[\sqrt{\frac{1 + 7x}{1 - 7x}}\right]$ |
| c) $D[\ln \operatorname{tg}^2 x]$ | k) $D[\ln^2(\ln x)]$ | r) $D[(1 - x)\sqrt{1 + x^2}]$ |
| d) $D\left[\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}\right]$ | l) $D\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right)\right]$ | s) $D[\operatorname{arctg} \sqrt{x}]$ |
| e) $D[\sin \{\cos(\sin x)\}]$ | m) $D\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)\right]$ | t) $D\left[\ln\left(\frac{1}{1 + x}\right) + \frac{1}{1 + x}\right]$ |
| f) $D\left[\frac{x^3 \cdot 3^{2x}}{e^{2x}}\right]$ | n) $D\left[\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right]$ | u) $D\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right)\right]$ |
| g) $D[\sin^3 2x \cdot \cos^2 3x]$ | ñ) $D[\operatorname{arctg}(\sin x)]$ | v) $D[\arcsen(\operatorname{tg} x)]$ |
| h) $D[x^x]$ | o) $D[x^{\ln x}]$ | w) $D[(\sin x)^{2\cos x}]$ |

■ 14. Calcula las derivadas sucesivas que se indican:

- | | | | |
|---------------------------------|---|--|--------------------------------------|
| a) $f(x) = 2^{3x}$
$f'''(x)$ | b) $g(x) = \frac{2}{x - 1}$
$g^{(4)}(x)$ | c) $h(x) = \ln(x + 2)$
$h^{(5)}(x)$ | d) $j(x) = \sin 3x$
$j^{(10)}(x)$ |
|---------------------------------|---|--|--------------------------------------|

■ 15. Obtén las derivadas n -ésimas de las siguientes funciones:

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------|---------------------------|
| a) $f(x) = \ln(x - 1)$ | c) $g(x) = e^x + e^{-x}$ | e) $h(x) = \frac{1}{x^2}$ |
| b) $f(x) = \frac{2}{x + 1}$ | d) $g(x) = 3^{-x}$ | f) $h(x) = \cos x$ |

SOLUCIONES

12. Las derivadas quedan:

a) $D[x^2] = 2x$

b) $D[(3x)^{1/3}] = (3x)^{-2/3}$

c) $D[3^x \cdot \ln x] = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \ln x + \frac{3^x}{x}$

d) $D\left[\frac{2}{(x^3 - 3x^2)^6}\right] = D[2 \cdot (x^3 - 3x^2)^{-6}] = \frac{-12(3x^2 - 6x)}{(x^3 - 3x^2)^7}$

e) $D\left[\frac{e^x}{x}\right] = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

f) $D[\sin 4x] = 4 \cos 4x$

g) $D[x^3 \cdot x^4] = D[x^7] = 7x^6$

h) $D[x \cdot 4^x] = 4^x + 4^x \cdot \ln 4 \cdot x$

i) $D[(e^{2x} + 3)^4] = 8e^{2x} (e^{2x} + 3)^3$

j) $D\left[\frac{1}{\sqrt{4-5x^2}}\right] = \frac{5x}{(4-5x^2)\sqrt{4-5x^2}}$

k) $D\left[\frac{x}{e^x}\right] = \frac{e^x - e^x \cdot x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$

l) $D[\sin^4 x] = D[(\sin x)^4] = 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x$

m) $D[(x^2 - 3)^5] = 10x(x^2 - 3)^4$

n) $D[(x+1)^3 \cdot (x-1)^2] = (x^2 - 1)[5x^2 + 4x - 1]$

ñ) $D[\ln(2 - 3x^2)^4] = D[4 \cdot \ln(2 - 3x^2)] = \frac{-24x}{2 - 3x^2}$

o) $D[(4x+2)\sqrt{4x-2}] = 4 \cdot \sqrt{4x-2} + \frac{4(4x+2)}{2\sqrt{4x-2}} = \frac{24x-4}{\sqrt{4x-2}}$

$$p) D[x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x}] = 2x \cdot 2^x \cdot a^{2x} + 2^x \cdot \ln 2 \cdot x^2 \cdot a^{2x} + 2a^{2x} \ln a \cdot x^2 \cdot 2^x$$

$$q) D[\sin x^4] = 4x^3 \cdot \cos x^4$$

13. Las derivadas son:

$$a) D[(x - \sqrt{1-x^2})^3] = 3(x - \sqrt{1-x^2})^2 \cdot \left(1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{6x^2 - 3}{\sqrt{1-x^2}} (x - \sqrt{1-x^2})$$

$$b) D\left[\frac{\cos(x-1)}{\cos(x+1)}\right] = \frac{-\sin(x-1) \cdot \cos(x+1) + \sin(x+1) \cdot \cos(x-1)}{\cos^2(x+1)} = \frac{\sin[(x+1) - (x-1)]}{\cos^2(x+1)} = \frac{\sin 2}{\cos^2(x+1)}$$

$$c) D[\ln \operatorname{tg}^2 x] = D[2 \cdot \ln(\operatorname{tg} x)] = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg} x}$$

$$d) D\left[\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}} \cdot \frac{-\cos x(1 + \sin x) - \cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\cos x}{(1 + \sin x)\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{-1}{1 + \sin x}$$

$$e) D[\sin\{\cos(\sin x)\}] = \cos\{\cos(\sin x)\} \cdot [-\sin(\sin x)] \cdot \cos x$$

$$f) D\left[\frac{x^3 \cdot 3^{2x}}{e^{2x}}\right] = D[x^3 \cdot 3^{2x} \cdot e^{-2x}] = 3x^2 \cdot 3^{2x} \cdot e^{-2x} + x^3 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3 \cdot 2 \cdot e^{-2x} - 2x^3 \cdot 3^{2x} \cdot e^{-2x} = 3^{2x} \cdot e^{-2x}(3x^2 + 2 \ln 3 \cdot x^3 - 2x^3)$$

$$g) D[\sin^3 2x \cdot \cos^2 3x] = 6 \sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos^2 3x - 6 \sin^3 2x \cdot \cos 3x \cdot \sin 3x$$

$$h) D[x^x] = x^x [\ln x + 1]$$

$$i) D[x^{\ln x}] = x^{\ln x} \left[\frac{2 \ln x}{x} \right]$$

$$j) D[x^{x^x}] = x^{x^x} \left[x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$k) D[x^{\cos x}] = x^{\cos x} \left[-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right]$$

$$\begin{aligned} l) D \left[\ln \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} \right) \right] &= \\ &= D [\ln \sqrt{x^2+1} - x] - D [\ln(\sqrt{x^2+1} + x)] = \\ &= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1} - x} - \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} - x} - \frac{2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m) D \left[\arctan \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right] &= \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2} \cdot \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{n) } D \left[\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] &= \frac{1 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{-2x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}}}{(\sqrt{a^2 - x^2})^2} = \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} \end{aligned}$$

$$\text{ñ) } D[\text{arc tg}(\text{sen } x)] = \frac{\cos x}{1 + \text{sen}^2 x}$$

$$\text{o) } D[x^{\ln x}] = x^{\ln x} \left[\frac{2 \ln x}{x} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{p) } D[(\text{sen } x)^{2 \cos x}] &= \\ &= (\text{sen } x)^{2 \cos x} \left[-2 \text{sen } x \cdot \ln \text{sen } x + \frac{2 \cos^2 x}{\text{sen } x} \right] \end{aligned}$$

$$\text{q) } D[x^{\text{sen } x}] = x^{\text{sen } x} \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\text{sen } x}{x} \right]$$

$$\text{r) } D[(\ln x)^x] = (\ln x)^x \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right]$$

$$\text{s) } D[\text{arctg } \sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$\begin{aligned} \text{t) } D \left[\ln \left(\frac{1}{1+x} \right) + \frac{1}{1+x} \right] &= \\ &= D \left[-\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right] = \\ &= -\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-2-x}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{u) } D \left[\ln \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) \right] &= D[\ln(\sqrt{x}-1) - \ln(\sqrt{x}+1)] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} \end{aligned}$$

$$v) D [\arcsen (tg x)] = \frac{1 + tg^2 x}{\sqrt{1 - tg^2 x}}$$

$$w) D [(sen x)^{2 \cos x}] = \\ = (sen x)^{2 \cos x} \left[-2 sen x \cdot \ln sen x + \frac{2 \cos^2 x}{sen x} \right]$$

14. Quedan:

$$a) f(x) = 2^{3x}; f'(x) = 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot 3; \\ f''(x) = 2^{3x} \cdot (\ln 2 \cdot 3)^2; f'''(x) = 2^{3x} \cdot (3 \cdot \ln 2)^3$$

$$b) g(x) = \frac{2}{x-1}; g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}; g''(x) = \frac{4}{(x-1)^3} \\ g'''(x) = \frac{-12}{(x-1)^4}; g^{(4)}(x) = \frac{48}{(x-1)^5}$$

$$c) h(x) = \ln(x+2); h'(x) = \frac{1}{x+2}; h''(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} \\ h'''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}; h^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+2)^4}; h^{(5)}(x) = \frac{24}{(x+2)^5}$$

$$d) j(x) = sen 3x \\ j'(x) = 3 cos 3x \\ j''(x) = -9 sen 3x \\ j'''(x) = -27 cos 3x \\ j^{(4)}(x) = +81 sen 3x \\ j^{(5)}(x) = 243 \cdot cos 3x \\ \dots \\ j^{(10)}(x) = -sen 3x \cdot (3)^{10}$$

Aparece un grupo de cuatro funciones derivadas diferentes, después se repiten.

15. En cada caso:

$$a) f(x) = \ln(x-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1}; f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}; f'''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(x-1)^n}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{2}{x+1} \quad f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \quad f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3} \quad f'''(x) = \frac{-12}{(x+1)^4} \quad f^n(x) = \frac{(-1)^n \cdot 2}{(x+1)^{n+1}} n!$$

$$\text{c) } g(x) = e^x + e^{-x}; \quad g'(x) = e^x - e^{-x}; \quad g''(x) = e^x + e^{-x} \\ g'''(x) = e^x - e^{-x} \Rightarrow g^{(n)}(x) = e^x + (-1)^n \cdot e^{-x}$$

$$\text{d) } g(x) = 3^{-x}; \quad g'(x) = -3^{-x} \cdot \ln 3; \quad g''(x) = 3^{-x} \cdot (\ln 3)^2; \quad g'''(x) = -3^{-x} \cdot (\ln 3)^3;$$

$$g^n(x) = (-1)^n \cdot 3^{-x} \cdot (\ln 3)^n$$

$$\text{e) } h(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$h'(x) = -2x^{-3}; \quad h''(x) = 6x^{-4}; \quad h'''(x) = -24x^{-5}$$

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (n+1)! \cdot x^{-(n+2)}$$

$$\text{f) } h(x) = \cos x; \quad h'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad h''(x) = -\cos x = \cos(x + \pi);$$

$$h'''(x) = \sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right); \quad h^{iv}(x) = \cos x = \cos\left(x + \frac{4\pi}{2}\right);$$

$$h^n(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

ACTIVIDADES FINALES

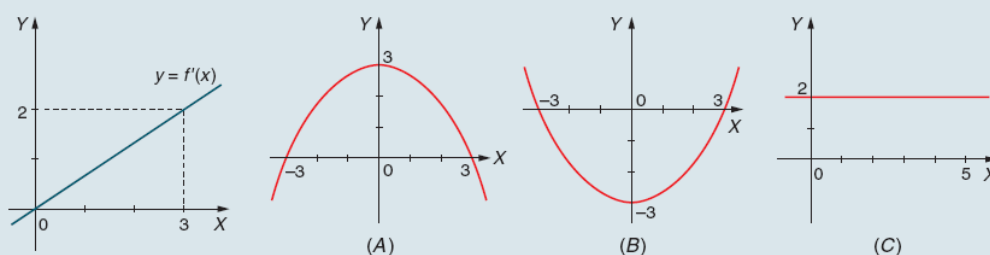
ACCESO A LA UNIVERSIDAD

- 16. ¿En qué punto o puntos la recta tangente a la curva $y = x^3 + 3x + 4$ tiene la menor pendiente?

- 17. Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

- a) Estudia su derivabilidad.
b) Encuentra $f''(x)$.

- 18. La primera gráfica corresponde a la función derivada de $f(x)$.



- a) Obtén la expresión analítica de $y = f'(x)$.
b) Indica cuál de las gráficas, (A), (B) o (C) corresponde a la función $f(x)$. Justifica la respuesta.

- 19. a) Estudia para qué valores de a las funciones $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq a \\ 2ax - 2a + 1 & \text{si } x > a \end{cases}$ son continuas.

- b) En estos casos dibuja las gráficas de las funciones obtenidas.
c) ¿En algún caso f es derivable en a ?

- 20. Considérese la hipérbola $x \cdot y = 1$. Halla la ecuación de la secante a dicha curva que pasa por los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 2$. Halla también las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola que son paralelas a dicha secante.

- 21. Halla el punto de la curva $y = \ln(1 + x^2)$ en que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa $x = 1$.

- 22. Determina los coeficientes a y b de la parábola $y = ax^2 + bx + 2$, sabiendo que la recta tangente en el punto en que $x = 1$ es la recta $y = -2x$.

- 23. Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas $xy = 1$, $x^2 - y^2 = 1$ en sus puntos de intersección.

- 24. Determina, de manera razonada, todas las funciones f que sean polinómicas de tercer grado y verifiquen $f'(-1) = f'(1) = 0$. ¿Puede existir alguna de las funciones determinadas anteriormente que verifique $f(0) = f(1) = 0$?

- 25. Si el lado de un cuadrado aumenta a una velocidad de 3 cm/s, halla la velocidad a la que aumenta su área cuando el lado vale 12 cm. Halla el valor del lado cuando el área crece a 60 cm²/s.



SOLUCIONES

16. Las pendientes de las rectas tangentes a esta curva verifican la relación:

$$y' = 3x^2 + 3 \Rightarrow m = 3x^2 + 3$$

Esta pendiente toma el menor valor posible en el vértice de esta función

$y = 3x^2 + 3$ cuadrática, es decir en $x = 0$. Luego la menor pendiente de la recta tangente está en $(0, 4)$ y vale 3.

17. Las soluciones en cada caso son:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estudiemos su derivabilidad en $x = 0$ y para ello buscamos las derivadas laterales.

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{h}{1+h} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h(1+h)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+h} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{h}{1-h} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h(1-h)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-h} = 1 \end{aligned}$$

La función $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

Luego es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) hallamos $f''(x)$ a través de las derivadas laterales.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f''(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(1+h)^2} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-2h - h^2}{h(1+h)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-2-h}{(1+h)^2} = -2$$

$$f''(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{(1-h)^2} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h - h^2}{h(1-h)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2-h}{(1-h)^2} = 2$$

La función $f''(x)$ no existe en $x = 0$ para todos los demás valores.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(1+x)^3} & \text{si } x > 0 \\ \frac{2}{(1-x)^3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

18. La solución es:

a) expresión analítica de $y = f'(x)$. Es una recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ $(3, 2)$, luego su ecuación es $y = \frac{2}{3}x$.

b) como $f'(x) = \frac{2}{3}x \Rightarrow f(x)$ ha de ser una función polinómica de 2º grado, por lo cual la grafica (C) queda descartada. La grafica (A) corresponde a una función polinómica de 2º grado, luego su función derivada sería negativa. Por tanto, la solución es la función (B).

19. Los casos quedan:

a) para que la función $f(x)$ sea continua debe cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Leftrightarrow$$

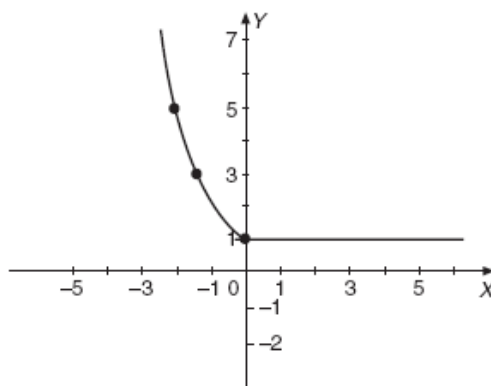
$$\lim_{x \rightarrow a^-} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow a^+} (2ax - 2a + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 = 2a^2 - 2a + 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(a - 2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ y } a = 2$$

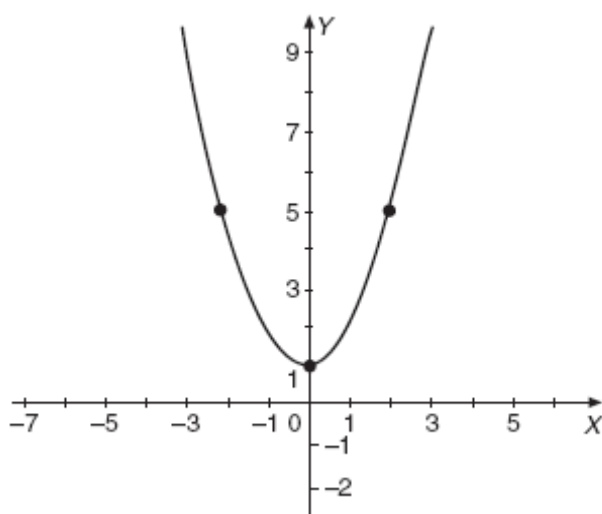
b) en el caso $a = 0$ la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Y su grafica es:



En el caso $a = 2$ la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 4x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Y su grafica es:



c) en el caso $a = 0$ las derivadas laterales de la función en $x = 0$ son:

$$f'(0^-) = 0 \quad \text{y} \quad f'(0^+) = 1$$

Y, por tanto, la función no es derivable.

En el caso $a = 2$ las derivadas laterales de la función en $x = 2$ son:

$$f'(2^-) = 4 \quad \text{y} \quad f'(2^+) = 4$$

Y la función es derivable en $x = 2$. En este caso es derivable en cualquier punto de su dominio.

20. Queda:

La recta secante pasara por los puntos $P(1, 1)$, $Q(2, 1/2)$ y su ecuación es:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1/2} \Rightarrow x + 2y - 3 = 0$$

La pendiente de esta recta es $m = -\frac{1}{2}$ luego las rectas tangentes paralelas a esta tendrán por

$$\text{pendiente } -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Las rectas tangentes de pendiente $-\frac{1}{2}$ pasaran por los puntos

$$P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad Q\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Y sus ecuaciones son:

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2})$$

$$y + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}(x + \sqrt{2})$$

21. Queda:

La recta tangente a la curva en el punto $P(1, 0)$ tiene por pendiente:

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow m = 1$$

La recta perpendicular tendrá por pendiente (-1) , por tanto:

$$\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow -1 \Rightarrow 1 + x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1$$

Por tanto, el punto buscado es $P(-1, \ln 2) \Rightarrow P(-1; 0,7)$

22. La solución es:

La recta tangente en el punto en el cual $x = 1$ pasa por el punto $(1, -2)$ y su pendiente vale (-2) . Por tanto:

$$-2 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = -4$$

$$\text{Por otro lado, } f'(1) = -2 \Rightarrow \text{como } f'(x) = 2ax + b \Rightarrow \\ \Rightarrow 2a + b = -2$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} a + b = -4 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \end{cases}$$

23. Queda:

Las curvas se cortan en los puntos que obtenemos al resolver el sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow P\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right); \\ Q\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

Basta con hallar el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas en P , en Q es igual.

Hallamos α_1 que es el ángulo que forma la recta tangente a la curva $x \cdot y = 1$ en el punto P con el eje de abscisas:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \\ = \frac{-2}{1+\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha_1 = 148^\circ 16' 57''$$

Hallamos α_2 que es el ángulo que forma la recta tangente a la curva $x^2 - y^2 = 1$ en el punto P con el eje de abscisas.

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_2 = 58^\circ 16' 57''$$

Luego, el ángulo que forman las rectas tangentes en P vale: $\alpha_1 - \alpha_2 = 90^\circ$

24. Queda:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(-1) &= 3a - 2b + c \Rightarrow 3a - 2b + c = 0 \\ f'(1) &= 3a + 2b + c \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow c = -3a; \quad b = 0$$

Las funciones polinómicas de tercer grado que verifican las hipótesis del enunciado son de la forma:

$$f(x) = ax^3 - 3ax + d$$

Para que verifique $f(0) = f(1) = 0$, deberán cumplir:

$$\left. \begin{aligned} d &= 0 \\ a - 3a + d &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Luego no existe ninguna función polinómica de tercer grado que verifique estas condiciones, excepto el polinomio nulo.

25. El área de un cuadrado en función del lado l es $A = l^2$.

La variación del área puede venir expresada en la forma:

$$\frac{dA}{dt} = 2l \frac{dl}{dt}$$

Si $l = 12$ cm y $\frac{dl}{dt} = 3$ cm/s, obtenemos:

$$\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 12 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm/s} = 72 \text{ cm}^2/\text{s}$$

Si $\frac{dl}{dt} = 3$ cm/s y $\frac{dA}{dt} = 60$ cm²/s, obtenemos:

$$60 \text{ cm}^2/\text{s} = 2 \cdot l \cdot 3 \text{ cm/s} \Rightarrow l = 10 \text{ cm}.$$

Unidad 12 – Aplicaciones de las derivadas

PÁGINA 287

cuestiones iniciales

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones $f(x) = x \cdot |x|$ y $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$.
2. Demuestra que la función $f(x) = 3^x$ es estrictamente creciente.
3. Expresa, en función de la longitud de la base, el área de un rectángulo cuyo perímetro vale 20 m. ¿Para qué valor de la base el área es máxima?

SOLUCIONES

1. En cada caso:

$$\bullet f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en $x=0$. $f(0)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2) = 0$$

La función $f(x)$ es continua en $x=0$, luego es continua en toda la recta real.

Estudiemos la derivabilidad en $x=0$.

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(0+h)^2 - 0}{h} = 0$$

La función $f(x)$ es derivable en $x=0$, luego es derivable en toda la recta real.

- $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Esta función es continua en toda la recta real.

Estudiemos su derivabilidad en $x=0$.

$$\begin{aligned} g'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{(0+h)^2} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{h^2}{h^3}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{(0-h)^2}}{h} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty \end{aligned}$$

La función $g(x)$ no es derivable en $x=0$.

2. Veamos que para todo $x_1 < x_2$ se cumple que $3^{x_1} < 3^{x_2}$.

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow 3^{x_2 - x_1} > 1 \Rightarrow \frac{3^{x_2}}{3^{x_1}} > 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3^{x_2} > 3^{x_1} \Rightarrow 3^{x_1} < 3^{x_2} \end{aligned}$$

Luego queda probado que la función $f(x) = 3^x$ es estrictamente creciente.

3. Llamando a a la altura del rectángulo y b a la base del mismo, podemos escribir:

$$2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow 10 - a$$

$$\text{Área} = b \cdot a = a(10 - a) = 10a - a^2$$

La función que nos da el area del rectángulo es una función cuadrática cuyo valor máximo lo alcanza en el vértice, es decir, para $a = 5 \text{ m}$.

Luego para este valor de la altura, la base mide $b = 10 - 5 = 5 \text{ m}$. Es decir, la base mide 5 m igual que la altura.

PÁGINA 303

ACTIVIDADES

■ Utiliza el método de demostración por reducción al absurdo para resolver las siguientes actividades:

1. **Número irracional.** Demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional.
2. **Implicación lógica.** Demuestra que si $P \Rightarrow Q$ entonces $\text{no } P \Rightarrow \text{no } Q$.

SOLUCIONES

1. La solución queda:

Supongamos que $\sqrt{3}$ no es irracional, por tanto $\sqrt{3}$ será racional, con lo que se puede poner en forma de fracción de este modo:

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ y primos entre sí.}$$

De esta igualdad obtenemos: $a = b\sqrt{3}$

Elevando ambos miembros al cuadrado nos queda: $a^2 = 3b^2$

De aquí deducimos que a^2 es múltiplo de 3. Si a^2 es múltiplo de 3 entonces a también lo es.

Podemos escribir: $a = 3m$ con $m \in \mathbb{Z}$ y sustituyendo en la igualdad $a^2 = 3b^2$ obtenemos:

$$(3m)^2 = 3b^2 \Rightarrow 9m^2 = 3b^2 \Rightarrow 3m^2 = b^2$$

Con lo que b^2 es múltiplo de 3 y, por tanto, b también lo es.

Con esto hemos llegado a que a y b son múltiplo de 3. Este resultado contradice el hecho de que a y b son primos entre sí. Por tanto, hemos llegado a una contradicción o absurdo, por lo que concluimos afirmando que $\sqrt{3}$ no es un número racional, es decir, es un número irracional.

2. Tiene que ser no P pues si fuera P entonces sería Q y como no dice no Q no puede ser P .

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x - x^2$

c) $f(x) = -5x + 3$

e) $f(x) = \frac{2}{x}$

g) $f(x) = e^{3x}$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

d) $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$

f) $f(x) = 2^{-x}$

h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

- 2. Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $y = -x^2 + 6x - 5$

d) $y = x(x-1)^2$

g) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$

b) $y = \frac{x}{\ln x}$

e) $y = \frac{2}{1+x^2}$

h) $y = \frac{8x}{x^2 + 2}$

c) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

f) $y = x \cdot \ln x$

i) $y = x^2 \cdot e^x$

- 3. Halla el valor de a para que la función $f(x) = x^2 - 6x + a$ tenga un mínimo de valor -1 .

- 4. Halla b y c para que la curva $y = -x^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo en el punto $(0, 4)$.

- 5. Halla a , b y c de manera que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo relativo en el punto $(6, -12)$ y se anule para $x = 8$.

- 6. En la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, halla a , b y c para que esta función pase por el punto $(1, 0)$, tenga un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

- 7. Demuestra que la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene siempre extremo relativo en su vértice, siendo máximo si a es negativo y mínimo si a es positivo.

- 8. Estudia el crecimiento de la función $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{e^x}$. Determina, si existen, sus máximos y mínimos relativos.

- 9. Estudia el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión en las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$

c) $f(x) = \frac{2}{x}$

e) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 8$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

d) $f(x) = x \cdot e^{-2x}$

f) $f(x) = \ln(x+4)$

- 10. Halla los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \sin 2x$$

- 11. Halla el valor de k que hace que la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un extremo relativo único. ¿Se trata de un máximo o un mínimo relativo?

- 12. Dada la función $f(x) = x(x-1)^3$:

a) Estudia su monotonía.

c) Estudia el tipo de concavidad.

b) Halla sus extremos relativos.

d) Determina, si existen, los puntos de inflexión.



SOLUCIONES

1. La tabla queda:

Funciones	Estrictamente Creciente	Estrictamente Decreciente
$f(x) = 4x - x^2$	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$	$(0, 2)$
$f(x) = -5x + 3$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{x-3}{x+3}$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{2}{x}$		$\mathbb{R}$
$f(x) = 2^{-x}$		$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{3x}$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$	$(3, +\infty)$	$(-\infty, -3)$

2. La tabla queda:

Funciones	Máximo Relativo	Mínimo Relativo
$y = -x^2 + 6x - 5$	$(3, 4)$	
$y = \frac{x}{\ln x}$		(e, e)
$y = \frac{x^2 + 1}{x}$	$(-1, -2)$	$(1, 2)$
$y = x(x-1)^2$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$	$(1, 0)$
$y = \frac{2}{1+x^2}$	$(0, 2)$	
$y = x \cdot \ln x$		$\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$
$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$	$(2, 16)$	$(3, 15)$
$y = \frac{8x}{x^2 + 2}$	$(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$
$y = x^2 e^x$	$\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$	$(0, 0)$

3. La solución es:

$$f(x) = x^2 - 6x + a \Rightarrow f'(x) = 2x - 6$$

$$\text{Igualando a cero: } 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(3) > 0$$

La función tiene un mínimo relativo en el punto $(3, -1)$, luego este punto debe verificar la función: $-1 = 9 - 18 + a \Rightarrow a = 8$

4. Queda:

La función $f(x) = -x^2 + bx + c$ tiene un máximo relativo en el punto $(0, 4)$, por tanto:

$$a) f(0) = 4 \Rightarrow 4 = c$$

$$b) f'(0) = 0; f'(x) = -2x + b \Rightarrow b = 0$$

Luego $c = 4$; $b = 0$.

5. Queda:

Que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un mínimo relativo en el punto $(6, -12)$ significa que:

$$a) f(6) = -12 \Rightarrow -12 = 36a + 6b + c$$

$$b) f'(6) = 0; f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 0 = 12a + b$$

Como se anula para $x = 8 \Rightarrow 64a + 8b + c = 0$. Resolviendo el sistema, obtenemos a, b, c .

$$\left. \begin{array}{l} 12a + b = 0 \\ 36a + 6b + c = -12 \\ 64a + 8b + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -36 \\ c = 96 \end{array}$$

6. La solución es:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c ; \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = -1 \\ -2a + b = -3 \\ b = 0 \end{array} \right. \quad \text{de aquí obtenemos } a = \frac{3}{2}; b = 0; c = -\frac{5}{2}$$

7. La solución es:

El vértice de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es: $V\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$f(x)$ tiene extremo relativo en su vértice, pues su derivada primera se anula en el.

$$f'\left(\frac{-b}{2a}\right) = 2a\left(\frac{-b}{2a}\right) + b = 0 \Rightarrow f''(x) = 2a \Rightarrow \begin{cases} f''(x) > 0 & \text{si } a > 0 \\ f''(x) < 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Por tanto, si $a > 0$, entonces la función presenta un mínimo en el vértice y si $a < 0$ presenta un máximo en el vértice.

8. Estudiamos el signo de la derivada primera para ver el crecimiento de la función:

$$f'(x) = \frac{(4x-3)e^x - e^x(2x^2-3x)}{e^{2x}} = \frac{-2x^2 + 7x - 3}{e^x}$$

Como el denominador es siempre positivo, estudiamos el signo del numerador:

$$-2x^2 + 7x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = \frac{1}{2}$$



$f(x)$ es estrictamente creciente en $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

$f(x)$ es estrictamente decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$

Los extremos relativos son $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3$. Para ver si son máximos o mínimos relativos

hallamos la derivada segunda $f''(x) = \frac{2x^2 - 11x + 10}{e^x}$

$f''(3) < 0 \Rightarrow f(x)$ Tiene máximo relativo en el punto $\left(3, \frac{9}{e^3}\right)$.

$f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{e^{1/2}}\right)$

9. La tabla queda:

Funciones	Cóncava	Convexa	Punto de inflexión
$f(x)=2x^3-9x^2$	$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$	$\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{2}\right)$
$f(x)=\sqrt{x^2+4}$	$\mathbb{R}$		No existe
$f(x)=\frac{2}{x}$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	No existe
$f(x)=x \cdot e^{-2x}$	$(1, +\infty)$	$(-\infty, 1)$	$(1, e^{-2})$
$f(x)=x^4-12x^2+8$	$(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, -12) \cup (-\sqrt{2}, -12)$
$f(x)=\ln(x+4)$		$(-4, +\infty)$	No existe

10. La solución es:

$$f'(x)=2\cos 2x \Rightarrow 2\cos 2x=0 \Rightarrow \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f''(x)=-4\sin 2x$$

$$f(x) \text{ tiene máximo relativo en todos los puntos de abscisa } x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$$

$$f''(x)=-4\sin 2x=0 \Rightarrow \sin 2x=0: \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 + 2\pi k \Rightarrow x = 0 + \pi k; k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pi + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f''(x)=-8\cos 2x$$

Como $f'''(0+\pi k) \neq 0$ y $f'''(\frac{\pi}{2}+\pi k) \neq 0$ entonces la función $f(x)$ tiene como punto de inflexión

en todos los puntos de abscisa $x=0+\pi k$ y $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

11. La solución:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$$

$$f'(x) = \frac{e^x (x^2 - 2x + k)}{(x^2 + k)^2}$$

$e^x (x^2 - 2x + k) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + k = 0 \Rightarrow$ Para que exista una única solución se debe verificar que $k=1 \Rightarrow$ la solución única es $x=1$.

$$f'(x) = \frac{e^x (x-1)^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^x (x-1)(x^3 - 3x^2 + 5x + 1)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow f''(1) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{e^x (x^6 - 6x^5 + 21x^4 - 36x^3 + 15x^2 + 18x - 5)}{(x^2+1)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(1) > 0$$

Por tanto, en $x = 1$ no hay ni máximo ni mínimo relativo.

12. La solución es:

La función es $f(x) = x(x-1)^3$ y su derivada $f'(x) = (x-1)^2(4x-1)$

a) Estudiamos el signo de $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2(4x-1) = 0 \Rightarrow x = 1; x = \frac{1}{4}$$



$$f'(0) < 0 \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \quad f'(2) > 0$$

$f(x)$ es creciente en $\left(\frac{1}{4}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ y f es estrictamente decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

b) Respecto a los extremos.

$$f'(x) = (x-1)^2(4x-1); (x-1)^2(4x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{4}, \frac{-27}{256}\right)$

$$f''(x) = (x-1)(12x-6)$$

$$f''(1) = 0$$

$$f''\left(\frac{1}{4}\right) > 0$$

c) Para ver la curvatura estudiamos el signo de la derivada segunda:

$$f''(x) = (x-1)(12x-6); \text{ igualando a cero: } x=1; x=\frac{1}{2}$$



$$f''(0) > 0 \quad f''\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \quad f''(2) > 0$$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ y f es cóncava hacia abajo en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

d) Los puntos de inflexión vienen dados:

$$f''(x) = (x-1)(12x-6); (x-1)(12x-6) = 0$$

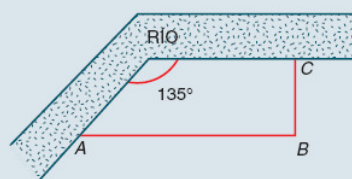
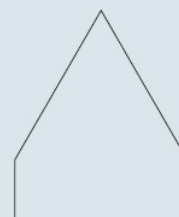
$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = 24x - 18$$

$$f'''\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow f \text{ tiene dos puntos de inflexión en}$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{16}\right) \text{ y } (1, 0).$$

- 13. Descompón el número 48 en dos sumandos tales que el quintuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.
- 14. Halla el número positivo cuya suma, con 4 veces su recíproco, sea mínima.
- 15. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio.
- 16. Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero, como indica la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6,6 m, halla sus dimensiones para que su superficie sea máxima.
- 17. De todos los rectángulos de diagonal igual a 1, halla las dimensiones del de área máxima.
- 18. Se quieren construir botes de enlatar de forma cilíndrica con 10 litros de capacidad. Calcula sus dimensiones si se desea que el gasto de material sea mínimo.
- 19. Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm³. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50 % más caro.
Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.
- 20. Halla las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de ortoedro sabiendo que el volumen ha de ser de 9 m³, su altura 1 m y el coste de construcción por m² es de 30 euros para la base, 35 euros para la tapa y 20 euros para cada pared lateral.
- 21. Una hoja de papel debe contener 18 cm² de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtén, razonadamente, las dimensiones que minimizan la superficie de papel.
- 22. Divide un segmento de 6 cm de longitud en dos partes tales que sea mínima la suma de las áreas de los triángulos equiláteros contruidos sobre ellas.
- 23. Se desea construir un jardín, limitado en dos lados por un río que forma un codo de 135° y los otros dos lados por una valla ABC de 1,2 km de longitud. Halla las dimensiones del jardín de área máxima.



- 24. En un jardín existe un paseo cerrado que consta de media circunferencia de radio 10 m y de su diámetro correspondiente. En el interior de la figura anterior se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. El parterre se plantará de camelias, que ocupan 0,25 m² cada una. ¿Cuál es el número máximo de plantas que pueden ubicarse?

SOLUCIONES

13. Sean x y $48 - x$ los números que hemos de buscar. La función a optimizar es $S(x) = 5x^2 + 6(48 - x)^2 \Rightarrow S(x) = 11x^2 - 576x + 13824$

$$S'(x) = 22x - 576 \Rightarrow 22x - 576 = 0 \Rightarrow x = \frac{288}{11}$$

$$S''(x) = 22 \Rightarrow S''\left(\frac{288}{11}\right) > 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{288}{11}$$

La función $S(x)$ presenta un mínimo.

Los números buscados son: $\frac{288}{11}$ y $\frac{240}{11}$.

14. La función a optimizar es:

$$S(x) = x + \frac{4}{x} = \frac{x^2 + 4}{x}$$

$$S'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$$

$$S''(x) = \frac{8}{x^3} \Rightarrow S''(2) > 0 \text{ y } S''(-2) < 0$$

La función $s(x)$ presenta un mínimo en $x = 2$

El número buscado es $x = 2$.

15. El área es:

$$\text{Como } x^2 + y^2 = 1600 \Rightarrow y = \sqrt{1600 - x^2}$$

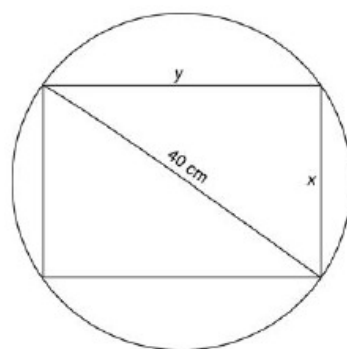
$$\Rightarrow A(x) = x \sqrt{1600 - x^2} = \sqrt{1600x^2 - x^4}$$

$$A'(x) = \frac{3200x - 4x^3}{2\sqrt{1600x^2 - x^4}} = \frac{1600 - 2x^2}{\sqrt{1600 - x^2}}$$

$$1600 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 20\sqrt{2}$$

$$A''(x) = \frac{2x^3 - 4800x}{(1600 - x^2)\sqrt{1600 - x^2}}$$

$$A''(20\sqrt{2}) < 0 \text{ y } A''(-20\sqrt{2}) > 0$$



La función a optimizar es $A = x \cdot y$

La función $A(x)$ es máxima para $x = 20\sqrt{2}$ e $y = 20\sqrt{2}$. Por lo cual, el rectángulo de área máxima es un cuadrado.

16. La función a optimizar es:

$$A = x \cdot y + \frac{y \cdot y \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Como } 2x + 3y = 6,6 \Rightarrow x = \frac{6,6 - 3y}{2}$$

La función a optimizar en una sola variable es:

$$A(y) = \frac{6,6y - 3y^2}{2} + \frac{\sqrt{3} y^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(y) = \frac{13,2y - 6y^2 + \sqrt{3} y^2}{4}$$

$$A'(y) = \frac{13,2 - 12y + 2\sqrt{3}y}{4} \Rightarrow 13,2 - 12y + 2\sqrt{3}y =$$

$$= 0 \Rightarrow y = \frac{13,2}{12 - 2\sqrt{3}} = 1,5 \text{ m}$$

$$A''(y) = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A''(1,5) < 0$$

Luego la superficie es máxima para $y = 1,5 \text{ m}$ $x = 1,05 \text{ m}$.

La ventana es un rectángulo de base 1, 5 m y altura 1, 05 m y un triángulo equilátero de lado 1, 5 m.

17. El área es:

La función a maximizar es $A = xy$.

$$\text{Al ser } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$$

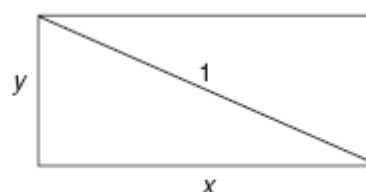
La función a optimizar en una sola variable es:

$$A(x) = x \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow A(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$$

$$A'(x) = \frac{2 - 4x^2}{2\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Rightarrow 2 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La única solución con sentido es $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Para este valor la altura y vale $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



18. Sea r el radio de la base del cilindro y h su altura. La función a optimizar es:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi h$$

La relación entre las variables es $\pi r^2 h = 10$ o $h = \frac{10}{\pi r^2}$

La función a minimizar expresada en una única variable es:

$$A = 2\pi r^2 + \frac{20}{r}$$

Derivando obtenemos:

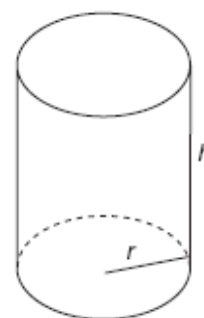
$$A'(r) = 4\pi r - \frac{20}{r^2} \quad A''(r) = 4\pi + \frac{40}{r^3}$$

$$A'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 - 20 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{5}{\pi} \Rightarrow r = 1,17$$

$$A''(1,17) = 28,8 > 0$$

Las dimensiones del bote de enlatar de material mínimo en las condiciones dadas son:

Radio = 1,17 dm y altura = 2,33 dm



19. La solución es:

Sea x la medida del lado de la base e y la medida de la altura lateral.

La función a minimizar es $f(x, y) = x^2 + 1,5x^2 + 4xy$

La relación entre variables es $x^2 y = 80$ es decir, $y = \frac{80}{x^2}$.

La función a optimizar expresada en una única variable es:

$$f(x) = 2,5x^2 + \frac{320}{x}$$

Derivando, obtenemos:

$$f'(x) = 5x - \frac{320}{x^2} \quad f''(x) = 5 + \frac{640}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^3 - 320 = 0 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$$

$$f''(4) = 15 > 0$$

Las dimensiones del envase son:

Lado de la base = 4 cm

Altura lateral = 5 cm

20. Sean x e y las medidas de la base. La función a optimizar es:

$$f(x, y) = 30xy + 35xy + 40(x + y)$$

La relación entre las variables es $xy=9$, es decir, $y=\frac{9}{x}$

La función a minimizar expresada en función de una única variable es:

$$f(x) = 585 + 40x + \frac{360}{x}$$

Derivando, obtenemos:

$$f'(x) = 40 - \frac{360}{x^2} \quad f''(x) = \frac{720}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 40x^2 - 360 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = -3 \text{ y } x = 3$$

$$f''(3) = \frac{720}{27} > 0$$

Para $x = 3$ obtenemos un mínimo.

Las dimensiones del contenedor de coste mínimo son $x = 3$ m e $y = 3$ m.

21. El problema queda:

Llamando x , y a las dimensiones del texto impreso, obtenemos que la función de optimización buscada es:

$$S = (y + 4)(x + 2) = xy + 2y + 4x + 8$$

Expresando esta función en una sola variable mediante:

$$x \cdot y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{x}$$

$$S(x) = 18 + \frac{36}{x} + 4x + 8 \Rightarrow S(x) = \frac{4x^2 + 26x + 36}{x}$$

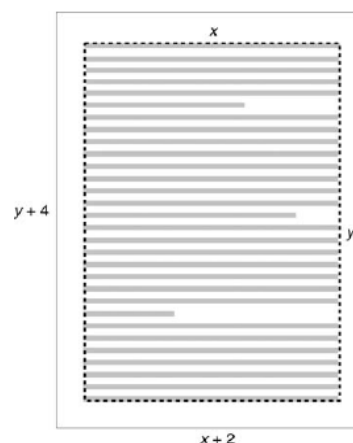
$$S'(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2} \Rightarrow \frac{4x^2 - 36}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$S''(x) = \frac{72}{x^3} \text{ y } S''(3) > 0$$

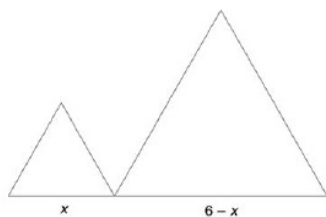
Por tanto, la superficie de la hoja es mínima para $x = 3$ cm y $y = 6$ cm, es decir, la hoja tendrá por dimensiones:

$$x + 2 = 5 \text{ cm de anchura}$$

$$y + 4 = 10 \text{ cm de altura.}$$



22. La solución es:



Llamando x a una de las partes, la otra tendrá por longitud $6 - x$.

La altura de un triángulo equilátero de lado l unidades viene dada por: $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ unidades.

La función a optimizar es:

$$S(x) = \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} + \frac{(6-x) \cdot \frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (2x^2 - 12x + 36)$$

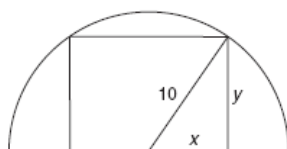
$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (4x - 12) \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

$$S''(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3} \Rightarrow S''(3) > 0$$

Por tanto, la función se hace mínima para $x = 3$ cm.

Luego el segmento dado se divide en dos partes iguales de longitud 3 cm cada una de ellas.

23. La solución es:



Sea x la longitud de la mitad de la base del parterre e y la longitud de su altura.

Debe ser máxima el área el área del parterre, es decir, la función:

$$A = 2xy$$

La relación entre las variables es $x^2 + y^2 = 100$ o $y = \sqrt{100 - x^2}$

La función a maximizar expresada en términos de una única variable es:

$$A(x) = 2x\sqrt{100 - x^2} \quad \text{que derivando: } A'(x) = \frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$A''(x) = \frac{4x^3 - 600x}{(100 - x^2) \cdot \sqrt{100 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 200 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{50}, x = \sqrt{50}$$

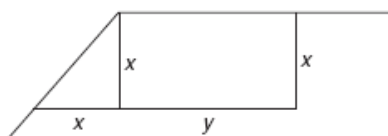
$$A''(\sqrt{50}) = -8 < 0$$

Para $x = \sqrt{50}$ m existe un máximo.

Las dimensiones que hacen máximo el parterre son $x = 2\sqrt{50}$ m e $y = \sqrt{50}$ m; el área máxima vale 100 m^2 .

En esta superficie puede plantearse $100 : 0,25 = 400$ camelias.

24. La solución es:



Sea x e y las longitudes de los segmentos que aparecen en el dibujo.

El área del jardín será:

$$A = \frac{1}{2} x^2 + xy$$

La relación entre las variables es $2x + y = 1,2$.

La función a maximizar expresada en términos de una variable es:

$$A = \frac{1}{2} x^2 + x(1,2 - 2x) \Rightarrow A = -\frac{3}{2} x^2 + 1,2x$$

Derivando:

$$A'(x) = -3x + 1,2$$

$$A''(x) = -3$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 1,2 = 0 \Rightarrow x = 0,4$$

Para $x = 0,4$ la función tiene un máximo.

Las dimensiones del jardín de área máxima son 0,4 km para el lado más corto y 0,8 km para el lado más largo.

ACTIVIDADES FINALES

- 25. Comprueba que la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ verifica el teorema de Rolle en el intervalo $[0, 1]$.
- 26. Estudia la derivabilidad de la función $1 - \sqrt[3]{x^2}$ y analiza si la función verifica las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$.
- 27. Consideramos la función $f(x) = e^x \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^7 \operatorname{sen}^3 x$. Prueba que existe, al menos, un número real x_0 , con $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$ tal que $f'(x_0) = 0$.
- 28. Se considera la función $f(x) = x^{2/3}$. ¿Existe un intervalo $[a, b]$ en el que se pueda aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)$? Justifica la respuesta.
- 29. Consideramos la función f definida en el intervalo cerrado $[0, 2]$ y dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a , b y c para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en dicho intervalo. Halla el valor o los valores de x a los que se refiere el teorema.

- 30. Halla el valor de a para el cual se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$. Encuentra el valor de c que indica el teorema.
- 31. Demuestra que la ecuación $x^3 + x^2 + x = 2$ tiene una única solución en $(-1, 1)$.
- 32. Prueba que las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^{-x}$, se cortan en un único punto en el intervalo $(0, 1)$.
- 33. Aplica el teorema de Cauchy a las siguientes funciones en los intervalos indicados:
- a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ en $[-1, 1]$.
- b) $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^x + 2$ en $[0, 2]$.
- 34. Estudia si se puede aplicar el teorema de Lagrange a las siguientes funciones en los intervalos dados y, cuando sea posible, halla el valor de c que da el teorema:
- a) $f(x) = 2x^2 - 7x + 10$ en $[2, 5]$.
- b) $f(x) = \sqrt[5]{x^2} - 2$ en $[-1, 1]$.
- 35. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ (x^2 - 3)/2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases}$:
- a) Prueba que $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-2, 0]$.
- b) Determina los puntos cuya existencia afirma dicho teorema.
- 36. Halla los valores de $x \in [0, 2\pi]$ en los que la función $f(x) = e^x \cdot \cos x$ presenta extremos relativos y/o puntos de inflexión.



SOLUCIONES

25. La función $f(x)$ es continua en $[0, 1]$ por ser una función polinómica.

La función $f(x)$ es derivable en $[0, 1]$ al ser una función polinómica.

Además se cumple:

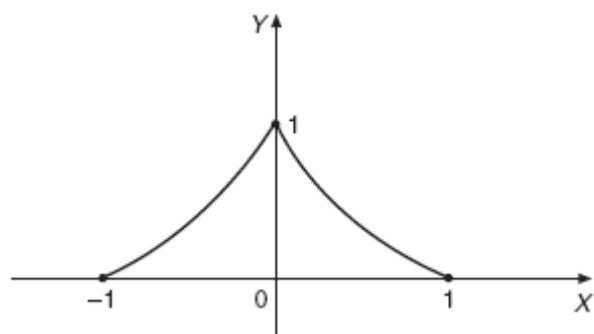
$$f(0)=1 \text{ y } f(1)=1$$

El valor del interior del intervalo $(0, 1)$ que anula la derivada de la función $f(x)$ es $c=\frac{1}{3}$.

26. La función no es derivable en todos los puntos del intervalo $(-1, 1)$ al no ser derivable en el punto $x = 0$.

En el origen se cumple $f'(0)=\infty$ y por tanto, no se verifican todas las hipótesis del teorema de Rolle.

La grafica de la función en el intervalo $[-1, 1]$ es la siguiente:



27. La función $f(x)$ del enunciado cumple las hipótesis del teorema de Rolle al ser:

– Continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

– Derivable en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

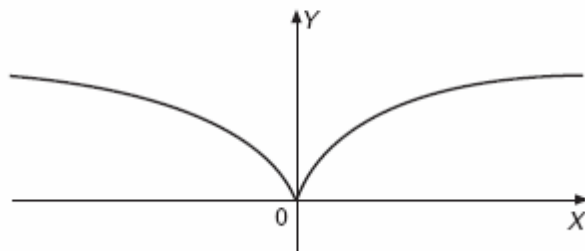
– $f(0) = 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

La tesis del citado teorema nos asegura la existencia de $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ cumpliendo $f'(x_0) = 0$.

28. No existe el citado intervalo, ya que :

- La función es par $f(-x) = f(x)$.
- La función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.
- La derivada en el origen no existe al ser $f'(0) = \infty$.

Todo ello puede verse en la gráfica:



29. La función tiene que ser continua en $x = 1$ y deberá cumplirse:

$$-10 = a + b + c$$

La función tiene que ser derivable en $x = 1$ y se cumplirá:

$$-9 = 2a + b$$

Se cumplirá: $f(0) = f(2)$; es decir, $1 = 4a + 2b + c$.

La solución del sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = -10 \\ 2a + b = -9 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \quad \text{es} \quad \begin{cases} a = 20 \\ b = -49 \\ c = 19 \end{cases}$$

El valor al que se refiere el teorema es $c = 49/40 \in (0, 2)$ en el cual $f'\left(\frac{49}{40}\right) = 0$.

30. La función $f(x)$ ha de ser continua en el intervalo dado. Veamos su continuidad en $x=0$:

$f(0) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + ax) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \cos x) = 0$. Por tanto la función es continua en el intervalo dado para cualquier valor de a .

La función ha de ser derivable en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$

$$f'(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad f'_-(0) = 0 \quad ; \quad f'_+(0) = a$$

Para que sea derivable en $x=0$ ha de ser $a = 0$.

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y $f(1) = 1$ coinciden las ordenadas en los extremos del intervalo.

Luego la función dada verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Entonces existe al menos un valor en ese intervalo en el que la derivada de la función dada se anula y el valor es $c = 0$

31. Consideremos la función $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$. Esta función verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$, luego existe al menos un valor c en el intervalo $(-1, 1)$ en el cual la función se nula.

Como $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ esta función $f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo dado por lo tanto la solución c es única.

32. Consideremos la función $h(x) = x^2 - e^{-x}$. Esta función verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 1]$, luego existe al menos un valor c en el intervalo $(0, 1)$ en el cual la función se nula.

Como $h'(x) = 2x + e^{-x}$ esta función $h(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo dado por lo tanto la solución c es única.

33. En cada caso:

- a) Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ verifican las hipótesis del teorema de Cauchy en el intervalo dado puesto que: son funciones continuas en $[-1, 1]$, derivables en $(-1, 1)$ y no anulan a la vez sus derivadas. Por tanto aplicando el teorema de Cauchy tenemos que $\exists c \in (-1, 1)$ tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} \text{ es decir } \frac{2c - 2}{3c^2 - 14c + 20} = \frac{-2}{21} ; \quad c = 0,14$$

- b) Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ verifican las hipótesis del teorema de Cauchy en el intervalo dado puesto que: son funciones continuas en $[0, 2]$, derivables en $(0, 2)$ y no anulan a la vez sus derivadas. Por tanto aplicando el teorema de Cauchy tenemos que $\exists c \in (0, 2)$ tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} \text{ es decir } \frac{2e^{2c}}{e^c} = \frac{e^4 - 1}{e^2 - 1} ; \quad c = 1,434$$

34. La solución en cada caso:

- a) La función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Lagrange puesto que es continua en el intervalo dado y es derivable en $(2, 5)$. Por tanto $\exists c \in (2, 5)$ tal que $f'(c) = \frac{f(5) - f(2)}{3}$ es decir $c = 3,5$.

- b) La función $f(x)$ no verifica las hipótesis del teorema de Lagrange ya que no es derivable en $x = 0$, por tanto no es derivable en $(-1, 1)$.

35. En cada caso:

a) la función es continua en el intervalo $[-2, 0]$ al estar formada por dos funciones polinómicas y cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 3}{2} = -1.$$

La función es derivable en el intervalo $(-2, 0)$ al cumplirse:

$$f'(-1^-) = -1 \quad \text{y} \quad f'(-1^+) = -1.$$

b) Los puntos cuya existencia afirma el teorema son:

$$f'(c) = - \frac{-\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{0 - (-2)} \Rightarrow f'(c) = -\frac{1}{2}$$

Por tanto los puntos buscados son $-\frac{1}{2}$ y $-\sqrt{2}$.

36. En cuanto a esta función:

Esta función tiene un máximo relativo en $x = \frac{\pi}{4}$, un mínimo relativo en $x = \frac{5\pi}{4}$ y dos puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = \pi$.

- 37. Halla a y b para que se pueda aplicar el teorema de Lagrange a la siguiente función, en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1)^2 + a & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ bx^2 - 6x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

- 38. Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = \ln x - 1$ en el que la recta tangente sea paralela a la secante que pasa por los puntos $A(1, -1)$ y $B(e, 0)$.

- 39. Como aplicación del teorema de Lagrange demuestra que si una función $y = f(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) = 0$ en todos los puntos del intervalo (a, b) , entonces la función $y = f(x)$ es constante en el intervalo $[a, b]$.

- 40. Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en $[0, 5]$ existe un c tal que $f'(c) = 8$.

- 41. Demuestra que $e^x \geq 1 + x$ con $x \geq 0$.

- 42. Prueba que si $x > 0$, se cumple: $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$.

- 43. Haciendo uso del teorema de Lagrange demuestra que $\cos b - \cos a < b - a$.

- 44. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right) \right]^x$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 - 2x]^{x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\sqrt[3]{b} - 1]$

l) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [\operatorname{tg} x]^{\cos x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$

h) $\lim_{x \rightarrow \pi} [x - 1] \cdot \operatorname{tg} \left[\frac{\pi x}{2} \right]$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a^x + b^x}{2} \right]^{\frac{1}{x}}, a > 1 \text{ y } b > 1$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \left[\frac{2}{\sin x} - \frac{2}{\pi - x} \right]$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln(2-e^x)}$

n) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right]$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x) \ln x$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x}$

ñ) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + x)^{\frac{2}{\sin x}}$

- 45. Halla a y b de modo que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{bx^3 + ax} = 4$$

- 46. Halla b , c y d en la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un punto de inflexión en $(1, -3)$ y la recta tangente en el punto de abscisa 0 tenga por pendiente 3.

SOLUCIONES

37. La solución es:

- $f(x)$ ha de ser continua en el intervalo dado. Para ello observamos que es continua por la derecha en $x = 3/2$, por la izquierda en $x = 3$ y falta ver que sea continua en $x = 2$ que es el punto del intervalo en el que cambia de definición.

$$f(2) = a ; \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx^2 - 6x) = 4b - 12 ; \lim_{x \rightarrow 2^-} (\ln(x-1)^2 + a) = a$$

Por tanto se tiene que cumplir que $4b - 12 = a$.

- $f(x)$ ha de ser derivable en el intervalo $(3/2, 3)$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2bx - 6 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases} \quad f'_-(2) = 1 ; f'_+(2) = 4b - 6$$

Por tanto debe ser $b=7/4$ y $a = -5$

38. Se debe verificar que $f'(x) = \frac{1}{e-1}$ luego el punto buscado es $(e-1, \ln(e-1) - 1)$.

39. La función $f(x)$ dada verifica las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[a, b]$ por tanto aplicando este teorema tenemos:

$\exists c \in (a, b)$ De modo que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y como esta expresión es nula tenemos que $f(a) = f(b)$ por tanto la función es constante en el intervalo dado.

40. Teniendo en cuenta el teorema del valor medio se cumplirá:

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} \Rightarrow 8 = \frac{f(5) - 3}{5} \Rightarrow f(5) = 43.$$

41. Aplicamos el teorema de Lagrange a la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $(0, x)$. Esta función $f(x)$ es continua en el intervalo $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$ por lo tanto $\exists c \in (0, x)$ de modo que

$$e^c = \frac{e^x - 1}{x} . \text{ Como } c > 0, e^c > 1 \text{ de donde } \frac{e^x - 1}{x} > 1$$

Por tanto de aquí deducimos que $e^x > x + 1$ esto para $x > 0$. La igualdad es evidente que se cumple para $x = 0$.

42. Aplicamos el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \ln(x+1)$ en el intervalo $(0, x)$. Esta función $f(x)$ es continua en el intervalo $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$ por lo tanto $\exists c \in (0, x)$ de modo que

$$\frac{1}{c+1} = \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

Como $c > 0$ entonces $1+c > 1$ y $\frac{1}{1+c} < 1$ de donde $\frac{\ln(x+1)}{x} < 1$ es decir que $\ln(x+1) < x$

Por otro lado $c < x$ entonces $1+c < 1+x$ y $\frac{1}{1+c} < \frac{1}{1+x}$ de donde $\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(x+1)}{x}$ es

decir que $\ln(x+1) > \frac{x}{1+x}$. De este modo tenemos demostrada la desigualdad para $x > 0$.

43. Aplicamos el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo (a, b) .

Esta función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) por lo tanto

$\exists c \in (a, b)$ de modo que $-\operatorname{sen} c = \frac{\cos b - \cos a}{b-a} < 1$ de donde se deduce la desigualdad buscada.

44. Los límites quedan:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x)^{x^2} \stackrel{(0^0)}{\Rightarrow} \text{Haciendo } M = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x)^{x^2}$$

y tomando logaritmos, obtenemos:

$$\ln M = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x)^{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \ln (x^2 - 2x) \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=}$$

$$\stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (x^2 - 2x)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x-2}{x^2-2x}}{\frac{-2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(x-1) \cdot x^3}{2x(x-2)} = 0$$

$$\text{Por tanto, } \ln M = 0 \Rightarrow M = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x)^{x^2} = 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] &\stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \\
 &\stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \\
 &\stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2e^x + x e^x} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow \pi^+} \left(\frac{2}{\sin x} - \frac{2}{\pi - x} \right) &\stackrel{(\infty - \infty)}{=} \\
 &\stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2\pi - 2x - 2 \sin x}{(\pi - x) \cdot \sin x} = \\
 &\stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-2 - 2 \cos x}{-\sin x + (\pi - x) \cos x} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \\
 &\stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2 \sin x}{-\cos x - \cos x - (\pi - x) \sin x} = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 2x)^2}{2x - 2x^2} = 0$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right]^x \stackrel{(1^\infty)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\cos \left(\frac{1}{x} \right) - 1 \right]}$$

Calculamos el límite del exponente aparte:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\cos \left(\frac{1}{x} \right) - 1 \right] &\stackrel{(\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \left(\frac{1}{x} \right) - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \\
 &\stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sin \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = 0
 \end{aligned}$$

Por tanto, el límite pedido vale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right]^x = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\sqrt[x]{b} - 1] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x [b^{1/x} - 1] \stackrel{(\infty \cdot 0)}{=} \\
 &\stackrel{(\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b^{1/x} \cdot \ln b \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b^{1/x} \cdot \ln b}{1} = \ln b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) &\stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \\
 &\stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + (x-1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{-\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \\
 &\stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + (x-1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{-\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \\
 &= -\frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln(2-e^x)}$$

Este límite presenta la indeterminación 0^0 . Resolveremos esta indeterminación tomando logaritmos neperianos:

$$\begin{aligned}
 M &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln(2-e^x)} \Rightarrow \ln M = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln(2-e^x)} \right]: \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2-e^x) \cdot \ln x \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \\
 &\stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(2-e^x)}} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2-e^x) \ln^2(2-e^x)}{x \cdot e^x} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \\
 &\stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^x \ln^2(2-e^x) - 2e^x \ln(2-e^x)}{e^x + x e^x} =
 \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } \ln M = 0 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln(2-e^x)} = 1$$

j) Llamamos a $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\tan x} = M$ tomando logaritmos neperianos obtenemos:

$$\ln M = \lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cdot \ln \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \operatorname{sen} x \cos x}{1} = 0 \text{ de donde } M=1$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} & \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \\ & \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \operatorname{sen} x - \cos x}{3x^2} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{3x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{3} = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

l) $\lim_{x \rightarrow \pi^+/2} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = \left(\infty^0\right) \Rightarrow$ Llamando:

$$M = \lim_{x \rightarrow \pi^+/2} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} \text{ y tomando logaritmos:}$$

$$\begin{aligned} \ln M &= \lim_{x \rightarrow \pi^+/2} \cos x \cdot \ln (\operatorname{tg} x) \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \\ & \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^+/2} \frac{\ln (\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\cos x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \\ & \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^+/2} \frac{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}}{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto, } \ln M = 0 \Rightarrow M = \lim_{x \rightarrow \pi^+/2} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{m) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} & \stackrel{(1^\infty)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1 \right)} = \\ & = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{2x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{2}} = \\ & = e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{a \cdot b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{n) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) & \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \\
 & \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1) \ln x} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \\
 & \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x \cdot \ln x + x-1} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \\
 & \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x \cdot \ln x + 1 - 1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\text{n)}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + x)^{\frac{2}{\sin x}} &= e^Z ; Z = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x + x - 1)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(-\sin x + 1)}{\cos x} = 2 \\
 \text{Por tanto el límite pedido vale } & e^2.
 \end{aligned}$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{bx^3 + ax} = (\text{aplicando L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{3bx^2 + a} = \frac{2}{a} \text{ de modo que } a = \frac{1}{2} \text{ y b cualquier número real.}$$

46. La solución queda:

$$\text{Las derivadas primera y segunda son: } f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x + 2b$$

$$\text{Por tanto como } f''(1) = 0 \text{ obtenemos que } 6 + 2b = 0$$

$$\text{Como } f(1) = -3 \text{ obtenemos que } 1 + b + c + d = -3$$

$$\text{Como } f'(0) = 3 \text{ obtenemos que } c = 3$$

$$\text{De estas igualdades deducimos los valores buscados } b = -3 ; c = 3 ; d = -4$$

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

- 47. Estudia el dominio de la función $f(x) = \frac{\ln x + 2}{x^2}$ y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- 48. Estudia los intervalos de monotonía y los extremos de la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Como aplicación, prueba que si $x > 0$, entonces $x^e \leq e^x$.
- 49. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos de $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
- 50. Estudia la concavidad de la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 3)$.
- 51. Determina un punto P de la curva $y = 12 - x^2$, con $x > 0$, de forma que el área del rectángulo determinado por los ejes y las rectas paralelas a ellos que pasan por P sea máxima.
- 52. Halla la ecuación de una recta que pase por el punto $(3, 2)$ y corte los ejes coordenados determinando en el primer cuadrante un triángulo de área mínima.
- 53. Halla los puntos de la curva $y^2 = 8x$ cuya distancia al punto $(6, 0)$ sea mínima.
- 54. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener un cono circular recto de 1 metro de generatriz? (Recuerda que el volumen de un cono es un tercio del área de la base por la altura).
- 55. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{\cos x}{2}}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}}$

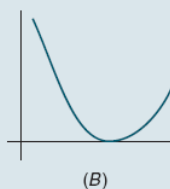
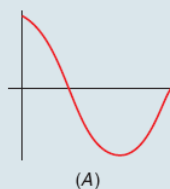
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{e^x - 1} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$

- 56. Las gráficas que se muestran a continuación corresponden a una función f , a su derivada f' y a otra función g . Todas ellas están definidas en un mismo intervalo. Desafortunadamente, al componer el dibujo (en el que se muestran también los ejes), las gráficas han sido colocadas al azar.

Identifica de forma razonada cuál de ellas corresponde a f , cuál a f' y cuál a g .



- 57. Prueba que la ecuación $x^3 - 2x^2 + 3x = 3$ admite una solución y sólo una en $(1, 2)$.

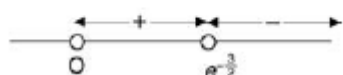
SOLUCIONES

47. La solución:

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, +\infty)$$

Determinamos la monotonía estudiando el signo $f'(x)$.

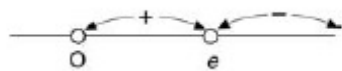
$$f'(x) = \frac{-2 \ln x - 3}{x^3}$$



$f(x)$ Es estrictamente creciente en $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

48. Queda:

- Determinamos la monotonía de $f(x)$ estudiando el signo de $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.



$f(x)$ es estrictamente creciente en $(0, e)$ y estrictamente decreciente en $(e, +\infty)$.

- Determinemos los extremos:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot \ln x - 3}{x^3}; f''(e) < 0.$$

$f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

La función $f(x)$ solo está definida para $x > 0$ por la monotonía y la existencia de máximo en

$$\left(e, \frac{1}{e}\right), \text{ podemos escribir que } f(x) \leq 1/e \Rightarrow \ln x/x \leq 1/e \Rightarrow e \ln x \leq x \Rightarrow \ln x^e \leq x \Rightarrow \boxed{x^e \leq e^x}$$

49. Queda:

$$f(x) = x^2 - 2|x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ es:

Monótona creciente en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$

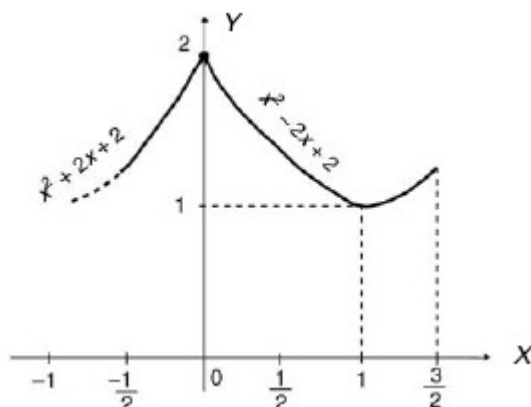
Monótona decreciente en $(0, 1)$

Tiene un mínimo relativo en $(1, 1)$, pues

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (x \geq 0)$$

$$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(1) > 0 \Rightarrow \text{Mínimo } (1, 1).$$

En $x = 1$ tiene un mínimo absoluto que vale 1 y en $x = 0$ un máximo absoluto que vale 2, como podemos ver a través de la grafica.



50. Para estudiar la concavidad de esta función vemos el signo de la derivada segunda.

$$f'(x) = e^{-x} (-x^2 - 2x + 1)$$

$$f''(x) = e^{-x} (x^2 - 3)$$

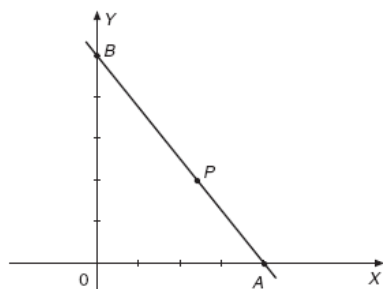


$f(x)$ es cóncava hacia arriba si $f''(x) > 0$, es decir en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (+\sqrt{3}, +\infty)$ y cóncava hacia abajo si $f''(x) < 0$, es decir, en $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$.

51. El punto buscado es de la forma $(x, 12 - x^2)$

Área = $x \cdot (12 - x^2)$ esta función alcanza el máximo relativo en el punto $(2, 8)$.

52. La solución:



La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 2)$ y corta a los semiejes positivos es:

$$y - 2 = m(x - 3) \quad \text{con} \quad m < 0.$$

El área del triángulo de vértices OAB es:

$$A\left(\frac{3m-2}{m}, 0\right) \quad \text{y} \quad B(0, 2-3m)$$

Derivando :

$$A'(x) = \frac{-18m^2 + 8}{4m^2} = \frac{4 - 9m^2}{2m^2} ; \quad A''(x) = -\frac{4}{m^3}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -18m^2 + 8 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{2}{3}$$

Para $m = -\frac{2}{3}$, $A''\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{27}{2} > 0$ y existe un mínimo.

La ecuación de la recta buscada es:

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 3) \Leftrightarrow 2x + 3y = 12$$

53. Los puntos buscados serán de la forma $P(x, \pm\sqrt{8x})$

La función a optimizar es:

$$d(x) = \sqrt{(x-6)^2 + (\pm\sqrt{8x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 36}$$

$$d'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+36}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+36}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$d''(x) = \frac{32}{(x^2 - 4x + 36)\sqrt{x^2 - 4x + 36}}$$

$$d''(2) > 0$$

Por tanto, para $x = 2$ la distancia es mínima. Los puntos buscados son : $P(2, +4), Q(2, -4)$.

54. El volumen del cono de radio r y altura h es: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

La relación del radio, la altura y la generatriz es:

$$r^2 + h^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1 - h^2$$

La función a maximizar es:

$$V = \frac{1}{3} \pi (1 - h^2) h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi h - \frac{1}{3} \pi h^3$$

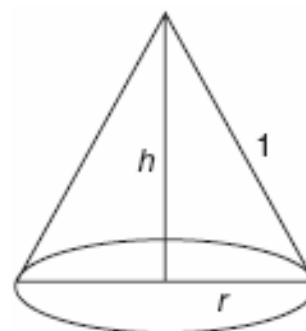
Derivando:

$$V' = \frac{1}{3} \pi - \pi h^2 \quad V'' = -2\pi h$$

$$V' = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \pi - \pi h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ y } h = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $V''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} < 0$, la función presenta un máximo.

El cono de altura $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m y radio $\frac{\sqrt{6}}{3}$ m tienen un volumen máximo de $\frac{1}{3} \pi \cdot \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,403 \text{ m}^3$.



55. Los límites son:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} & \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \underset{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ & \underset{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ & \underset{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \underset{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x - \cos x}{1 - \cos x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \underset{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\cos x} + 1 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{\operatorname{cosec} x}{2}} &\stackrel{(1^\infty)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cosec} x}{2} (1 + \operatorname{sen} x - 1)} = \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} x}} = e^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2x - 2}{xe^x - x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \underset{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{2e^x - 2}{e^x - xe^x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \underset{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{2e^x}{2e^x + xe^x} = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{3x} - 5x)^{1/x} \stackrel{(\infty^0)}{=} L$$

Tomando logaritmos y operando:

$$\begin{aligned}
 \ln L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e^{3x} - 5x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{3x} - 5x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \underset{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow \infty}} \frac{3e^{3x} - 5}{e^{3x} - 5x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \underset{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow \infty}} \frac{9e^{3x}}{3e^{3x} - 5} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \underset{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow \infty}} \frac{27e^{3x}}{9e^{3x}} = 3.
 \end{aligned}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \underset{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x \rightarrow 1}} \frac{\cos(x-1)}{2x-3} = -1.$$

56. En cada caso decimos:

La función f se corresponde con la grafica C.

La función f' se corresponde con la grafica A.

La grafica B queda para una cierta función g .

57. Sea la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 3$, definida en el intervalo $[1,2]$. Cumple las hipótesis del teorema de Bolzano al ser continua y tomar los siguientes valores en los extremos:

$$f(1) = -1 \text{ y } f(2) = 3.$$

El teorema anterior nos asegura al menos una solución en el intervalo $(1,2)$.

Existe solo una solución ya que la función $f(x)$ es siempre creciente al cumplirse:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3 = 3 \left[\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{5}{9} \right] > 0.$$

Unidad 13 – Representación gráfica de funciones

PÁGINA 315

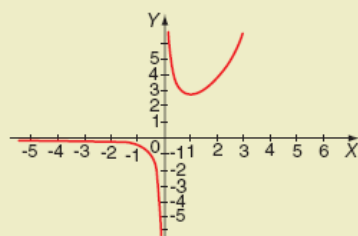
cuestiones iniciales

1. En las siguientes funciones, estudia sus características: dominio, los puntos de corte con los ejes, las simetrías, la periodicidad, las asíntotas, la monotonía, los extremos relativos, el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión.

a) $y = 2x^2 - 8x$

b) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

2. Estudia las características (dominio, recorrido, monotonía, extremos relativos, curvatura y asíntotas) de la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$, representada en la gráfica.



SOLUCIONES

1. Las funciones son:

a) $f(x) = 2x^2 - 8x$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Puntos de corte con el eje OX :

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x^2 - 8x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(0,0) \\ Q(4,0) \end{array} \right\}$$

Puntos de corte con el eje OY :

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x^2 - 8x \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0,0)$$

- Simetrías:

$$f(x) = 2x^2 - 8x$$

$$f(-x) = 2(-x)^2 - 8(-x) = 2x^2 + 8x$$

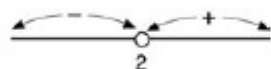
$f(x) \neq f(-x) \Rightarrow f$ no es simétrica respecto al eje OY

$f(x) \neq -f(-x) \Rightarrow f$ No es simétrica respecto al origen de coordenadas.

- Periodicidad: f no es periódica.
- Asíntotas: no tiene asíntotas.
- Monotonía:

$$f'(x) = 4x - 8$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$.



$$f'(x) < 0 \text{ en } (-\infty, 2)$$

$$f'(x) > 0 \text{ en } (2, +\infty)$$

f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$

f es estrictamente creciente en $(2, +\infty)$

- Extremos relativos:

$$f'(x) = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f''(x) = 4 > 0$$

f tiene un mínimo relativo en $(2, -8)$

- Concavidad:

$$f'(x) = 4 > 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava hacia las positivas en todo } \mathbb{R}$$

- No existen puntos de inflexión.

b) $g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

- Dominio: $Dom g = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$
- Puntos de corte con el eje OX :

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^3}{x^2 - 4} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P(0, 0)$$

Puntos de corte con el eje OY :

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^3}{x^2 - 4} \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0, 0)$$

- Simetrías:

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$g(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -g(x)$$

Como $-g(x) = -g(x)$ la función g es simétrica respecto al origen de coordenadas.

- Periodicidad: g no es periódica.

- Asíntotas:

Asíntotas verticales: las rectas de ecuaciones.

$$x = 2 \text{ y } x = -2.$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$$

No existen las asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas:

Son de la forma $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0$$

La asíntota oblicua es la recta $y = x$.

- Monotonía:

$$g'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} \begin{cases} x^4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{3} \end{cases} \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

$g'(x) > 0$ en $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty) \Rightarrow g$ es estrictamente creciente en $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$.

$g'(x) < 0$ en $(-2\sqrt{3}, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 2\sqrt{3}) \Rightarrow g$ es estrictamente decreciente en $(-2\sqrt{3}, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 2\sqrt{3})$.

- Extremos relativos:

$$g'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^2}$$

$g'(2\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow g$ tiene mínimo relativo en el punto $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$

$g'(-2\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow g$ tiene máximo relativo en el punto $(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$

- Concavidad:

$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3}$$



$g''(x) < 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \Rightarrow g$ es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

$g''(x) > 0$ en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

- Puntos de inflexión:

$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3}; \quad 8x^3 + 96x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g'''(x) = \frac{-24x^4 - 576x^2 - 384}{(x^2 - 4)^4}$$

$$g'''(0) \neq 0$$

Existe un punto de inflexión en el punto $(0, 0)$.

2. La solución es:

Dominio $\mathbb{R} - \{0\}$

Recorrido $\mathbb{R} - [0, 2, 7)$

Creciente $(2, 7; +\infty)$

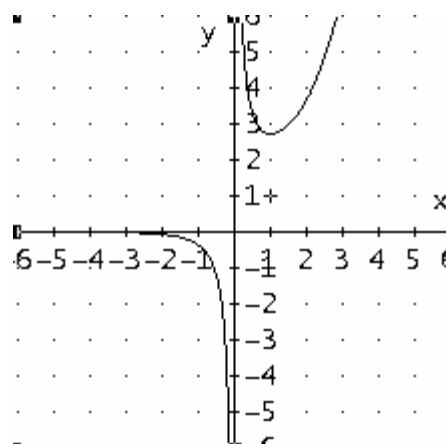
Decreciente $(-\infty, 0) \cup (0, 2, 7)$

Mínimo relativo $(1; 2, 7)$

Cóncava $(0, +\infty)$

Convexa $(-\infty, 0)$

Asíntotas $x = 0$; $y = 0$



PÁGINA 329

ACTIVIDADES

■ Utiliza el proceso diagonal de Cantor para resolver la cuestión siguiente:

1. **Con letras.** Demuestra que el conjunto de todas las «palabras infinitas» de dos letras X e Y tales como:

XYXYXYXYXY...
 XYXXXXXYXY...

no puede ser numerable.

SOLUCIONES

1. Supongamos que todas las palabras indicadas se pueden numerar y por tanto colocar todas una detrás de otra. La lista de todas ellas es la siguiente:

XYXYXYXYXYXYXYXYXYXY...
 YXYXYXYXYXYXYXYXYXY...
 XXXYXYXYXYXYXYXYXYXY...
 XYXYXYXYXYXYXYXYXYXY...
 YYYXYXYXYXYXYXYXYXYXY...

Nos fijamos ahora en la primera palabra infinita XYXYX..., que se obtiene en la lista anterior tomando la primera letra de la primera palabra, la segunda de la segunda, la tercera de la tercera, la cuarta de la cuarta, la quinta de la quinta..., es decir tomando las letras de la diagonal del cuadro de letras.

A partir de esta palabra XYXYX...formamos otra cambiando en ella cada X por Y y cada Y por X. obtenemos así una palabra que empieza:

YXYXY...

Esta palabra tendría que ocupar alguna fila de la lista, pues estamos suponiendo que allí están todas, pero por otra parte, difiere de la primera palabra en la primera letra, de la segunda palabra en la segunda letra, de la tercera palabra en la tercera letra..., de la palabra 538 en la letra 538...Es imposible que este en la lista. Esta contradicción demuestra que nuestro punto de partida es falso.

Podemos afirmar, por consiguiente, que la colección de las palabras infinitas de dos letras no puede ser numerable.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = |x + 2| - x$

c) $y = |x^2 - 4x + 3|$

e) $y = x^3 - \frac{4}{3}|x|$

b) $y = \frac{|x-1|}{x-1}$

d) $y = |x-3| + |x+3|$

f) $y = \frac{x-|x|}{2}$

- 2. Construye la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = x(x+2)(x-2)$

c) $y = x^4 - 2x^2$

g) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x$

b) $y = x(x-1)(x-2)$

e) $y = -\frac{x^3}{6} + x$

h) $y = x^4 - 2x^2 - 8$

c) $y = 3x - x^3$

f) $y = 2x^2 - x^4 - 1$

i) $y = 2x^2 - 3x - \frac{1}{3}x^3$

- 3. Encuentra una función cuya expresión sea un polinomio del menor grado posible que pase por $(0, 0)$ y tenga un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$. Realiza su representación gráfica.

- 4. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$:

a) Halla a y b de manera que la gráfica de la función $f(x)$ tenga para $x = 1$ una inflexión cuya recta tangente en ese punto forme un ángulo de 45° con el eje OX .

b) Representa gráficamente la función.

- 5. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \frac{4}{x^2 - 4}$

e) $y = \frac{2x}{x^2 + 2}$

i) $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ (Curva de Agnesi)

b) $y = \frac{x^2}{x+2}$

f) $y = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4}$

j) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

c) $y = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)(x+4)}$

g) $y = \frac{x}{1+|x|}$

k) $y = \frac{(x+1)(x+2)x}{(x-1)(x+3)}$

d) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

h) $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

l) $y = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4}$

- 6. La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$. Halla el valor de k . Realiza la representación gráfica de la función resultante.

- 7. Se considera la función definida por $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$:

a) Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(-2, -6)$ y admita en dicho punto una tangente horizontal.

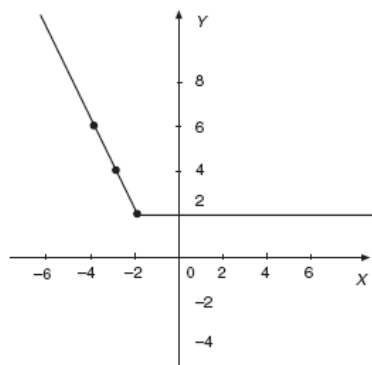
b) Realiza la representación gráfica de la función resultante.



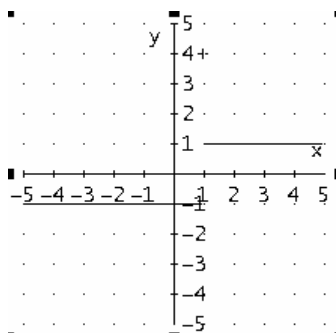
SOLUCIONES

1. La solución en cada caso es:

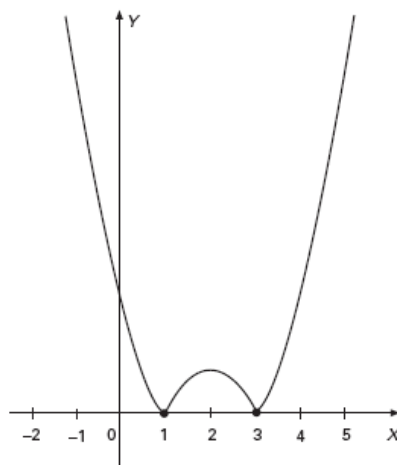
a) La función es $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > -2 \\ -2x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$ y su grafica:



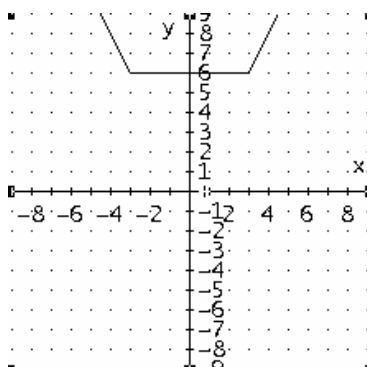
b) La función es $y = \frac{|x-1|}{x-1}$ y su gráfica:



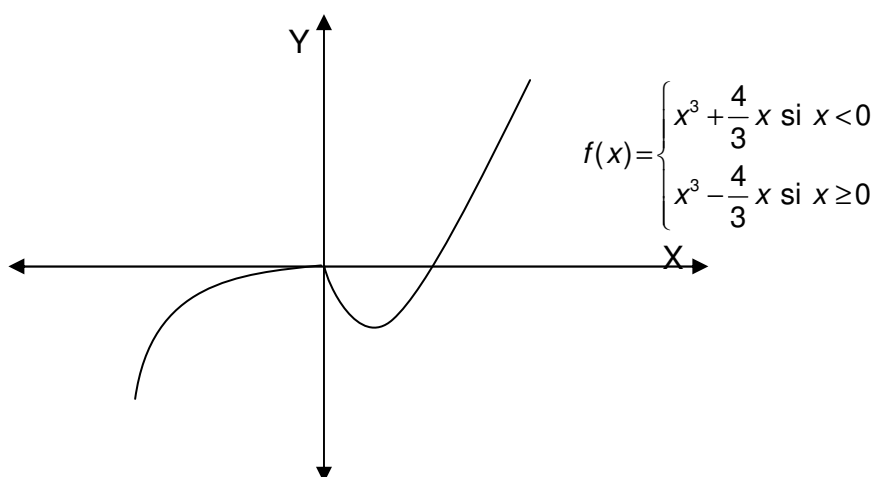
c) la función es $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x \in [1, 3] \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \end{cases}$ y su grafica:



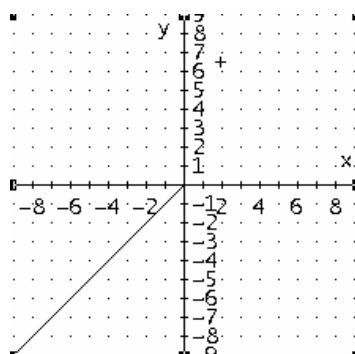
d) La función es $y = |x - 3| + |x + 3|$ y su gráfica:



e) La función es $f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{4}{3}x & \text{si } x < 0 \\ x^3 - \frac{4}{3}x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y su gráfica:



f) La función es $y = \frac{x - |x|}{2}$ y su gráfica es:



2. La solución queda:

a) $y = x(x+2)(x-2) = f(x)$

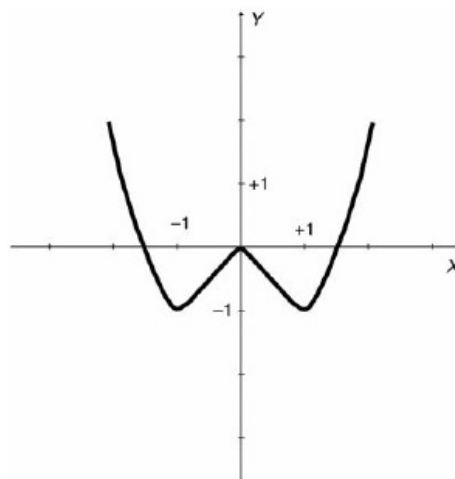
- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al origen y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (-2,0), (2,0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene asíntotas.
- Extremos relativos:

$$\text{Mínimo} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-16}{3\sqrt{3}} \right) \quad \text{máximo} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-16}{3\sqrt{3}} \right)$$

- Puntos de inflexión: $(0, 0)$
- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$

f es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

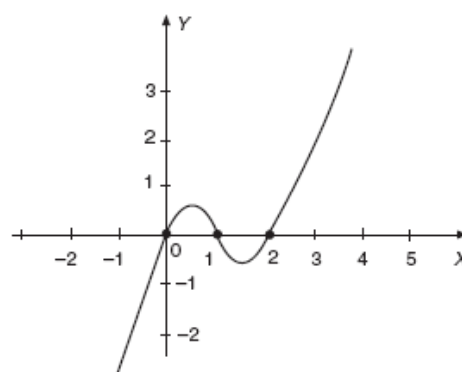


b) $y = x(x-1)(x-2)$

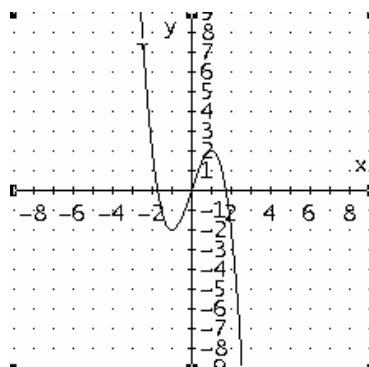
- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- No presenta simetrías ni periodicidad.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (1,0), (2,0)$
- no tiene asíntotas.
- Tiene ramas parabólicas
- Extremos relativos:

$$\text{Mínimo} (1,58; -0,38) \quad \text{máximo} (0,42; 0,38)$$

- Puntos de inflexión: $(1, 0)$

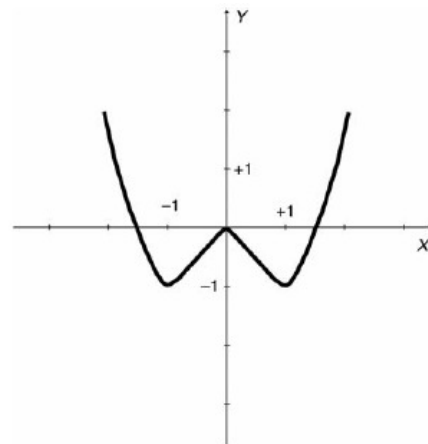


c) $y = 3x - x^3$



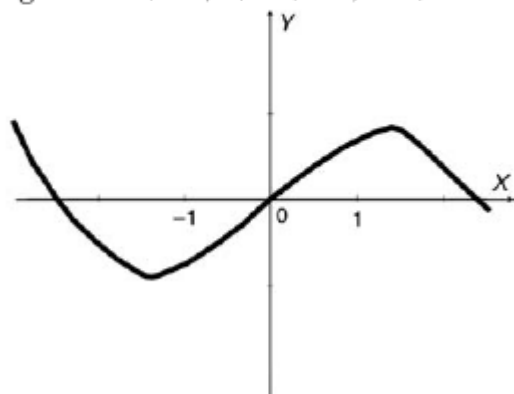
d) $y = x^4 - 2x^2$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al eje de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos:
Mínimo $(-1, -1)$ y $(1, -1)$ máximo $(0,0)$
- Puntos de inflexión: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$
- Intervalos de signo constante:
 f es negativa en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$
 f es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

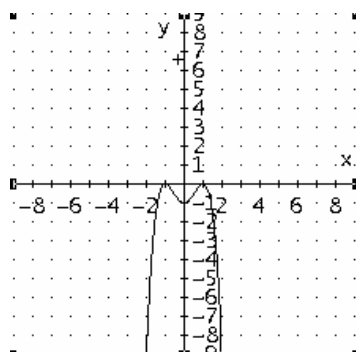


e) $y = -\frac{x^3}{6} + x$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al origen de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (\sqrt{6},0), (-\sqrt{6},0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos:
Mínimo $\left(-\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ máximo $\left(\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$
- Puntos de inflexión: $(0,0)$
- Intervalos de signo constante:
 f es positiva en $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (0, +\sqrt{6})$
 f es negativa en $(-\sqrt{6}, 0) \cup (+\sqrt{6}, +\infty)$

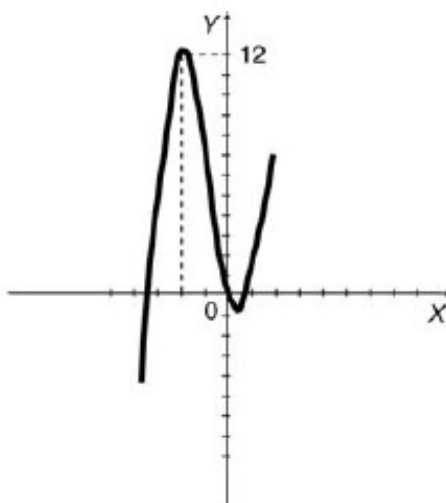


f) $y = 2x^2 - x^4 - 1$



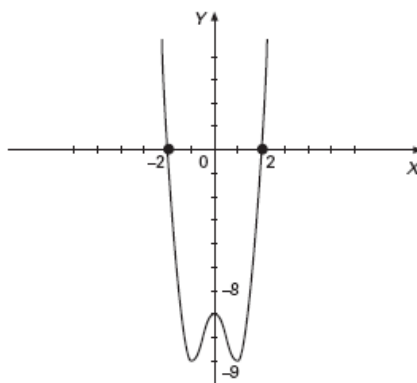
g) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x = f(x)$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: ni es simétrica ni es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (0,64;0), (-3,14; 0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos: Mínimo $\left(\frac{1}{3}, \frac{-19}{27}\right)$ máximo $(-2,12)$
- Puntos de inflexión: $\left(-\frac{5}{6}; 5,65\right)$
- Intervalos de signo constante:
 f es negativa en $(-\infty; -3,14) \cup (0; 0,64)$
 f es positiva en $(-3,14; 0) \cup (0,64; +\infty)$

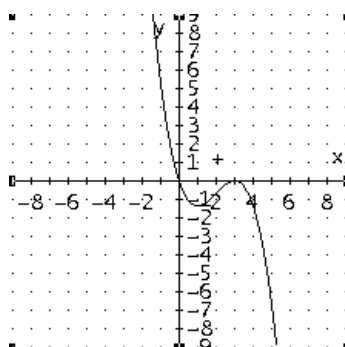


h) $y = x^4 - 2x^2 - 8 = f(x)$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al eje de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, -8), (2, 0), (-2, 0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos: Mínimo $(1, -9)$ y $(-1, -9)$ máximo $(0, -8)$
- Puntos de inflexión: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right)$
- Intervalos de signo constante:
 f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 f es negativa en $(-2, 2)$



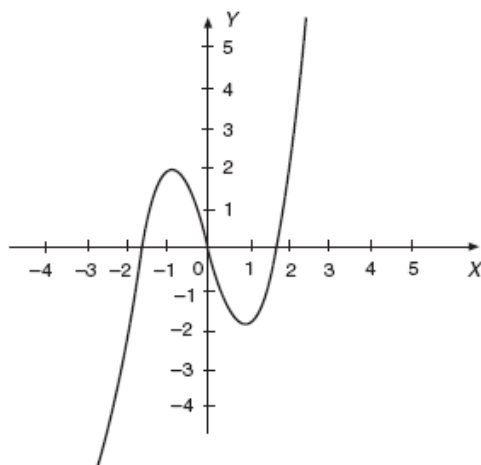
i) $y = 2x^2 - 3x - (1/3)x^3$



3. La función debe cumplir $f'(1)=0, f''(0)=0$ y $f(0)=0$. Suponiendo las condiciones anteriores se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ 2a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \text{ cuya solución es } a=0, b=-3 \text{ y } c=0.$$

La función $f(x) = x^3 - 3x$ cumple las condiciones del enunciado.
Su grafica es:



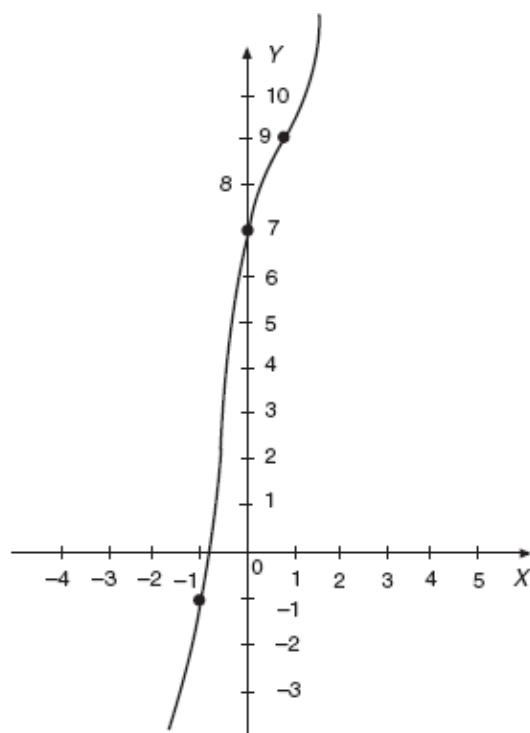
4. La solución es:

a) La función debe cumplir $f'(1)=1$ y $f'(1)=0$. Estas condiciones conducen al sistema:

$$\begin{cases} 2a+b=-2 \\ 2a=-6 \end{cases} \text{ cuya solución es } a=-3, b=4$$

La función buscada es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 7$

b) La gráfica puede verse en el dibujo.



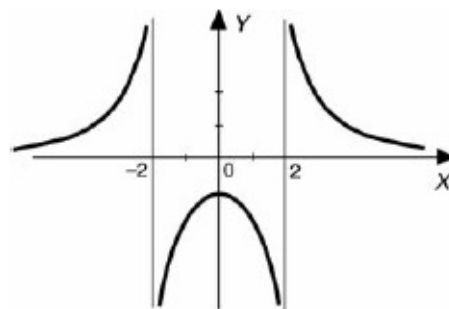
5. Las funciones quedan:

a) $y = \frac{4}{x^2 - 4} = f(x)$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto a OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, -1)$
- Asíntotas: $x = \pm 2$; $y = 0$
- Extremos relativos: Máximo $(0, -1)$

- Puntos de inflexión: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right)$

- Intervalos de signo constante:
 f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 f es negativa en $(-2, 2)$

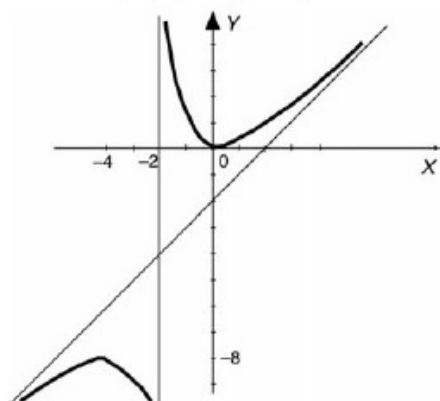


b) $y = \frac{x^2}{x+2} = f(x)$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - 2$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Asíntotas: $x = -2$; $y = x - 2$
- Extremos relativos: Máximo $(-4, -8)$ mínimo $(0, 0)$

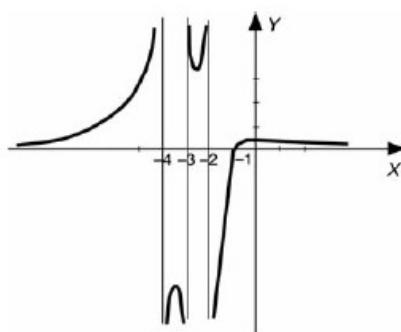
- Puntos de inflexión: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right)$

- Intervalos de signo constante:
 f es negativa en $(-\infty, -2)$.
 f es positiva en $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$.



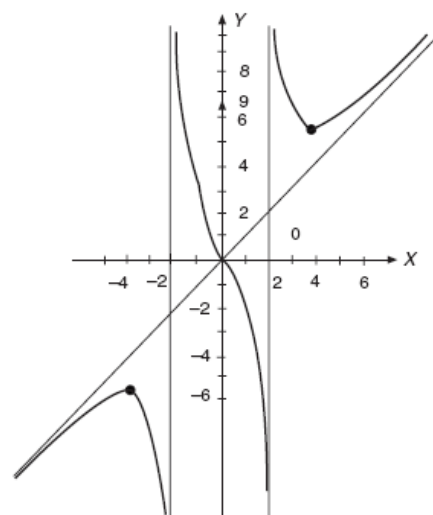
c) $y = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)(x+4)}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{-2, -3, -4\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $\left(0, \frac{1}{24}\right), (-1, 0)$
- Asíntotas: $x = -2; x = -3; x = -4; y = 0$
- Extremos relativos: la curva presenta dos máximos relativos y un mínimo, como observamos en la grafica.
- Intervalos de signo constante:
 f es positiva en $(-\infty, -4) \cup (-3, -2) \cup (-1, +\infty)$
 f es negativa en $(-4, -3) \cup (-2, -1)$



d) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- Tiene una simetría respecto al origen de coordenadas.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Asíntotas: $x = -2; y = x$
- Extremos relativos:
Máximo $\left(-\sqrt{12}, -\frac{3\sqrt{12}}{2}\right)$ mínimo $\left(\sqrt{12}, \frac{3\sqrt{12}}{2}\right)$
- Puntos de inflexión: $(0, 0)$



e) $y = \frac{2x}{x^2 + 2}$

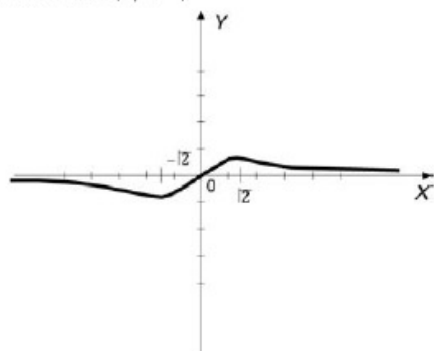
- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: simétrica respecto al origen y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas: $y=0$

- Extremos relativos: Máximo $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ mínimo $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, 0)$

f es positiva en $(0, +\infty)$



f) $y = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{4, -1\}$
- Simetrías y periodicidad: ni simétrica, ni periódica.

- Puntos de corte con los ejes: $\left(0, \frac{1}{2}\right), (1,0)$

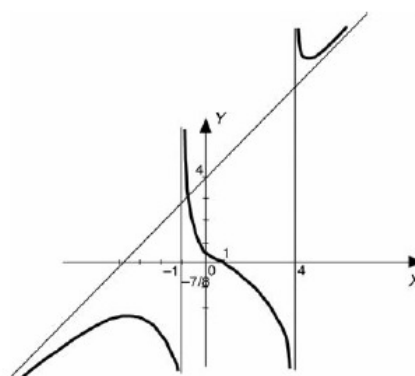
- Asíntotas: $x = -1$; $x = 4$; $y = x + 4$ y como oblicua $y = x + 4$ en el punto $\left(-\frac{7}{8}, \frac{25}{8}\right)$

- Extremos relativos: no se pueden hallar fácilmente.

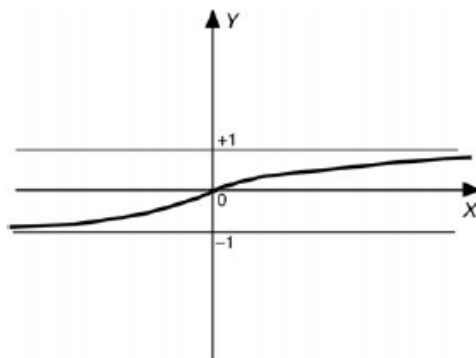
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-1, 1) \cup (4, +\infty)$

f es negativa en $(-\infty, -1) \cup (1, 4)$.

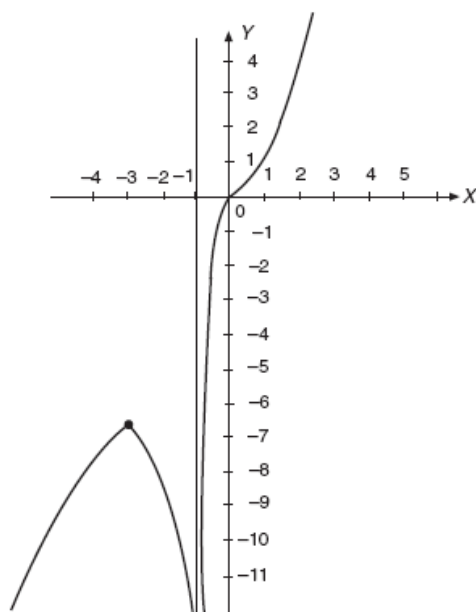


g) $y = \frac{x}{1+|x|}$ que separando el valor absoluto queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$



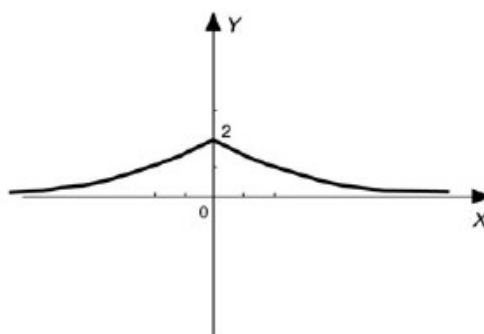
h) $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{-1\}$
- Simetrías y periodicidad: ni simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $\left(0, \frac{1}{2}\right), (1, 0)$
- Asíntotas: $x = -1$; $x = 4$; $y = x + 4$
- Extremos relativos: Máximo $(-3, -6,75)$
- Punto de inflexión: $(0, 0)$



i) $y = \frac{8}{x^2 + 4}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: simétrica respecto a OY y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0,2)
- Asíntotas: $y = 0$
- Extremos relativos: Máximo (0, 2)
- Intervalos de signo constante: F es positiva en todo su dominio.

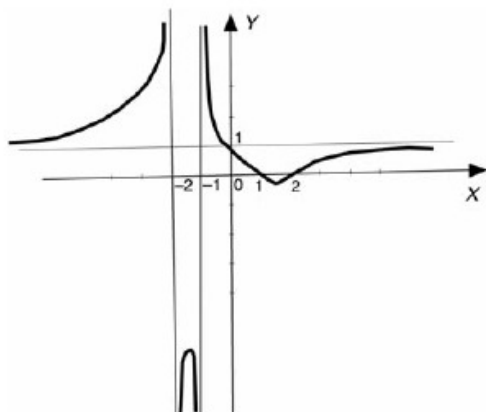


j) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0,1), (1,0), (2,0)
- Asíntotas: $x = -1$; $x = -2$; $y = 1$
- Extremos relativos: Máximo $(-\sqrt{2}, -34)$ mínimo $(\sqrt{2}; -0,03)$
- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$

f es positiva en $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

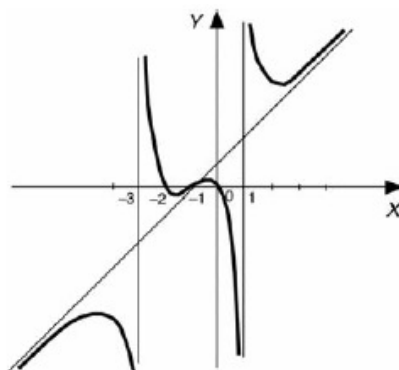


k) $y = \frac{(x+1)(x+2)x}{(x-1)(x+3)}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{1, -3\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)(-1,0)(-2,0)$
- Asíntotas: $x = -1$; $x = -3$; $y = x + 1$ La curva corta a la asíntota oblicua en $(-1,0)$
- Extremos relativos:
Máximo $(-4,25;-4,74)$ y $(0,11;0,38)$ mínimo $(-1,63;-0,11)$ y $(2,25;4,74)$
- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (0, 1)$

f es positiva en $(-3, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty)$



l) $y = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4}$ esta función coincide con la función $y = x$ en todos los números reales ya que:

$$\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = \frac{x(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = x$$

En $x = 2$ se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

En $x = -2$ se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} x = -2.$$

La gráfica es la recta bisectriz del primero y tercer cuadrante.

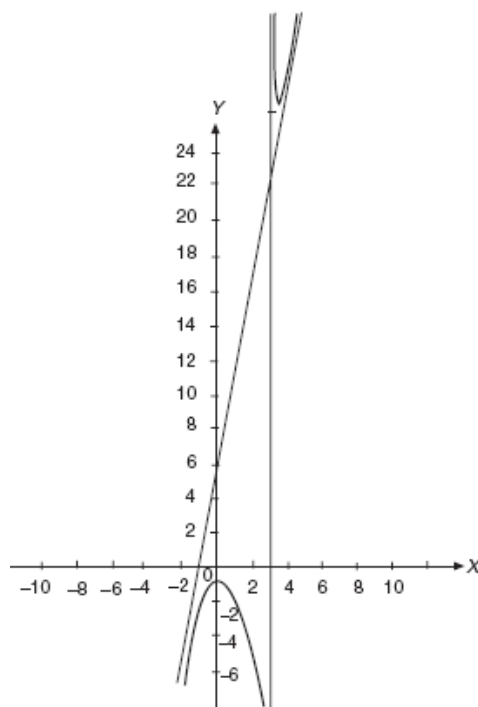
6. La función queda del siguiente modo:

La determinación del valor k se realiza a través del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 2x] &= 6 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x \right] = \\ 6 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 6 \Leftrightarrow 2k = 6 \Leftrightarrow k = 3. \end{aligned}$$

Sea la función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{-3\}$
- No tiene simetrías.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, -1/3)$
- Asíntotas: $x = 3; y = 2x + 6$
- Extremos relativos:
Máximo $(-0,08; -0,33)$ y $(0,11; 0,38)$ mínimo $(6,08; -24,34)$



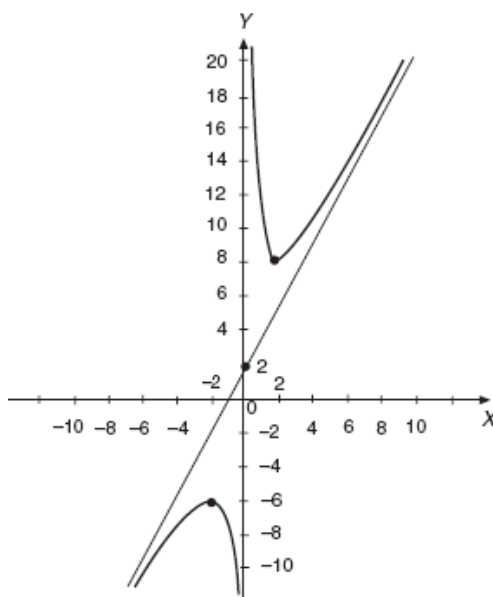
7. Queda:

a) La función debe cumplir: $f(-2) = -6$ y $f'(-2) = 0$. Imponiendo las condiciones obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{cases} \text{ cuya solución es } a=2, b=2$$

b) La función resultante es $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x}$ o $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 8}{x}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$
- No tiene simetrías.
- Cortes con los ejes no tiene.
- Asíntotas: $x=0$; $y=2x+2$
- Extremos relativos: Máximo $(-2, -6)$ mínimo $(2, 10)$



■ 8. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = +\sqrt{x^2 - 1}$

c) $y = [\sqrt[3]{x}]^2$

e) $y = -\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$

b) $y = \pm x\sqrt{\frac{x-1}{4x-1}}$

d) $y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

f) $y^2 = \frac{x}{3-x}$

■ 9. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \ln(x-2)$

e) $y = e^{1/x}$

i) $y = x \cdot e^x$

b) $y = \ln(x^2 - 5x + 4)$

f) $y = \frac{\ln x}{x}$

j) $y = \ln|x+1|$

c) $y = \ln\sqrt{x^2 - 1}$

g) $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$

k) $y = \frac{e^x}{x^2}$

d) $y = x^2 \cdot e^x$

h) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

l) $y = \frac{x}{\ln x}$

■ 10. Calcula las constantes a y b para que las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ y $g(x) = a \ln x + b$ se corten en el punto $\left(e^2, \frac{2}{e^2}\right)$ y tengan en él la misma recta tangente. Realiza la representación gráfica de las funciones resultantes.

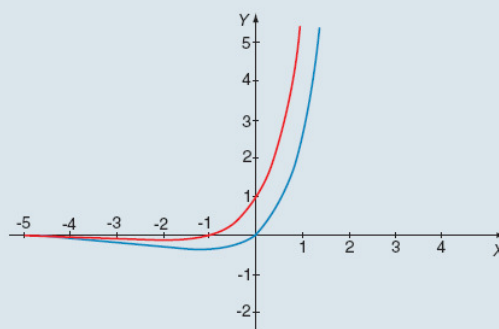
■ 11. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, dibuja de forma razonada las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = \ln|x|$

b) $f(x) = |\ln x|$

c) $f(x) = \ln(x-2)$

■ 12. En la figura siguiente se muestran las gráficas de dos funciones: la de la función $f(x) = x e^x$ y la de su derivada $f'(x)$.



Distingue una de la otra, justificando razonadamente el porqué, y halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, así como los puntos donde hay máximos, mínimos e inflexiones de $y = f(x)$.

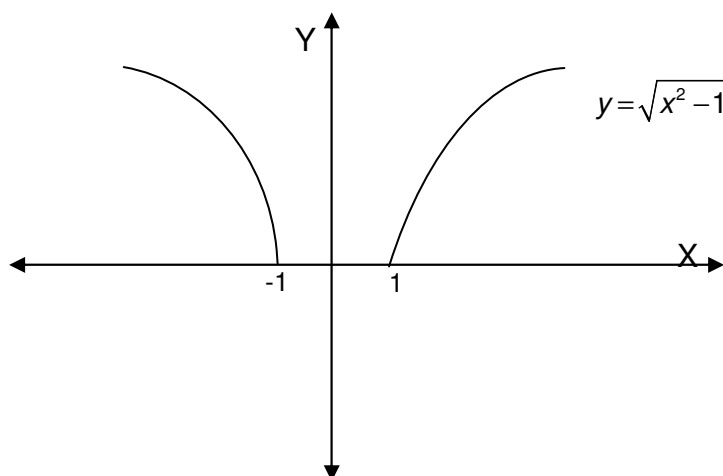
■ 13. Demuestra que la ecuación $x^4 + 4e^x \cdot (x-1) = 0$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números consecutivos está cada una de las soluciones? Utiliza para ello las gráficas de las funciones: $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{-x^4}{4(x-1)}$.

SOLUCIONES

8. La solución en cada caso:

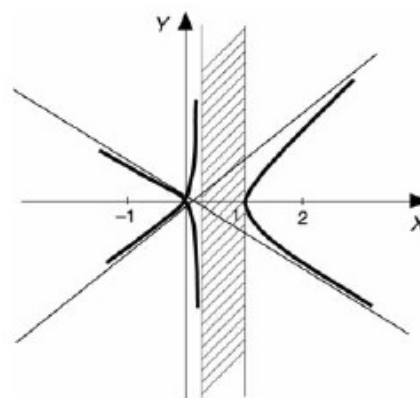
a) $y = +\sqrt{x^2 - 1}$

- Dominio: $Dom f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al eje OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(1,0)(-1,0)$
- Asíntotas: $y = x; y = -x$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante: f es positiva en todo su dominio.



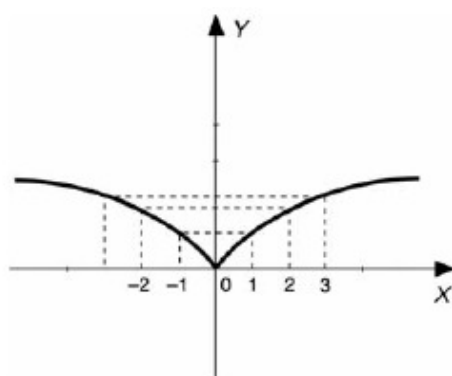
b) $y = \pm x \sqrt{\frac{x-1}{4x-1}}$

- Dominio: $Dom f = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup [1, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (1,0)$
- Asíntotas: $x = \frac{1}{4}; y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}; y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{16}$
- Extremos relativos: no tiene.



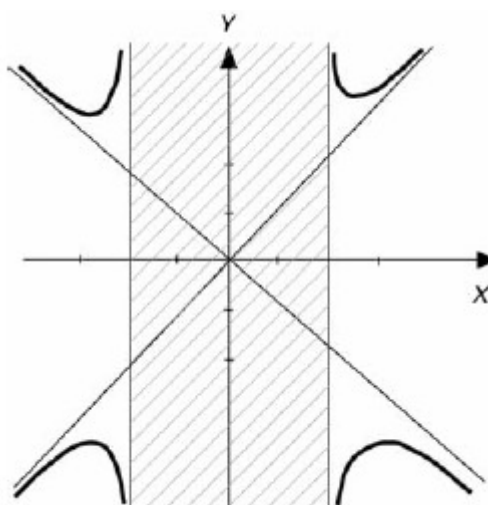
c) $y = [\sqrt[3]{x}]^2$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto a OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas: no tiene
- Extremos relativos: no tiene
- Intervalos de signo constante: f es positiva en todo su dominio.



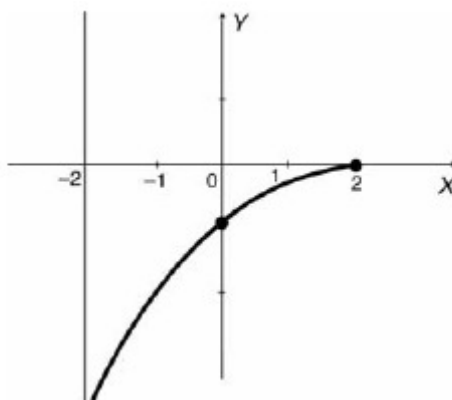
d) $y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} = f(x)$

- Dominio: $Dom f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto a OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$ no existe.
- Asíntotas: $x = \pm 2$; $x = -2$; $y = x$; $y = -x$
- Extremos relativos: Mínimos $(\sqrt{8}, 4)(-\sqrt{8}, 4)$ Máximos $(\sqrt{8}, -4)(-\sqrt{8}, -4)$



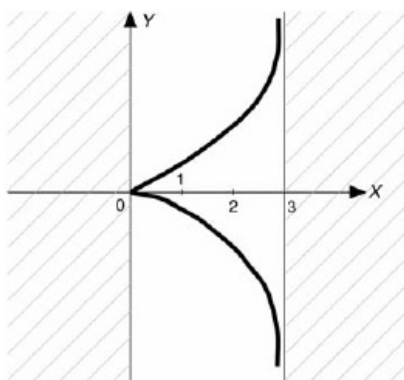
e) $y = -\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} = f(x)$

- Dominio: $Dom f = (-2, 2)$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica ni es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, -1)(2, 0)$
- Asíntotas: $x = -2$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalo de signo constante: f es negativa en todo su dominio.



f) $y = \frac{x}{3-x} \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{x}{3-x}} = f(x)$

- Dominio: $Dom f = [0, 3)$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Asíntotas: $x = 3$
- Extremos relativos: no tiene.



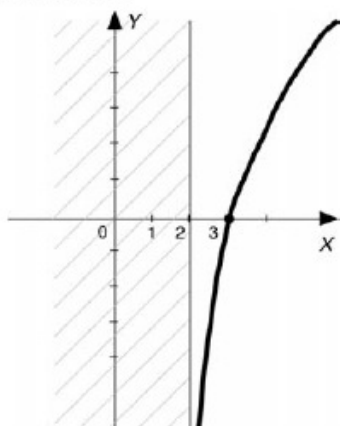
9. Las gráficas quedan:

a) $y = \ln(x-2)$

- Dominio: $Dom f = (2, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: ni simétrica ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(3, 0)$
- Asíntotas: $x = 2$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(3, +\infty)$

f es negativa en $(2, 3)$



b) $y = \ln(x^2 - 5x + 4)$

- Dominio: $Dom f = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, \ln 4)$; $(4, 2; 0)$; $(0, 8; 0)$

$$x = 1, \text{ pues } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x^2 - 5x + 4) = -\infty$$

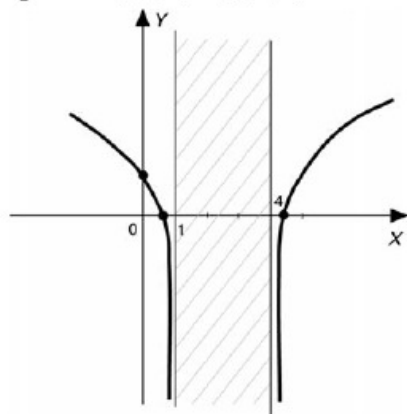
- Asíntotas:

$$x = 4 \text{ pues } \lim_{x \rightarrow 4^+} \ln(x^2 - 5x + 4) = -\infty$$

- Extremos relativos: no tiene; Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-\infty; 0, 8) \cup (4, 2; +\infty)$

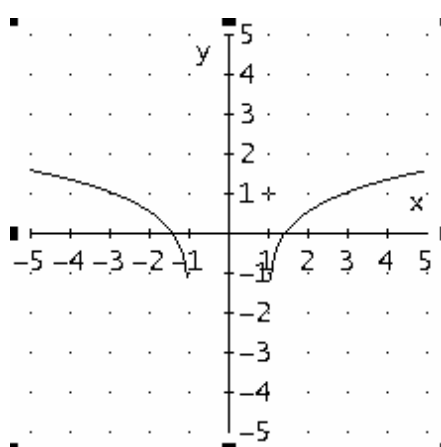
f es negativa en $(0, 8; 1) \cup (4; 4, 2)$



10. Tiene que cumplirse $g(e^2) = \frac{2}{e^2}$ y $g'(e^2) = -\frac{1}{e^4}$. Las condiciones anteriores nos llevan al

c) $y = \ln \sqrt{x^2 - 1}$

- Dominio $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Simétrica respecto al eje OY
- Puntos de corte con los ejes $(\sqrt{2}, 0)$ $(-\sqrt{2}, 0)$
- Asíntotas las rectas $x = 1$ y $x = -1$
- Extremos relativos no tiene
- Monotonía: Creciente en $(1, +\infty)$ y Decreciente en $(-\infty, -1)$
- Intervalos de signo constante: $f(x)$ es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ y $f(x)$ es negativa en $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$

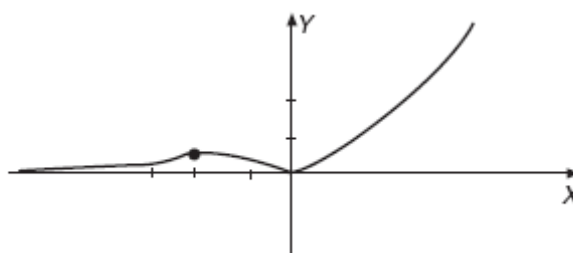


d) $y = x^2 e^x$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- No tiene simetrías.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Asíntotas : $y = 0$, al ser :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

- Extremos relativos: máximo $(-2; 0,54)$ mínimo $(0, 0)$



e) $y = e^{\frac{1}{x}}$

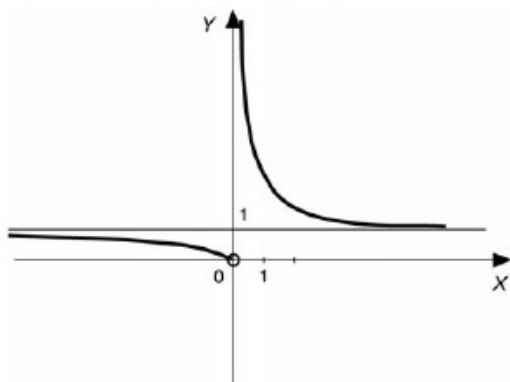
- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Asíntotas :

$x = 0$ pues $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$.

$y = 1$ pues $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$.

- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



f) $y = \frac{\ln x}{x}$

- Dominio: $Dom f = (0, +\infty)$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(1, 0)$
- Asíntotas :

$x = 0$ pues $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

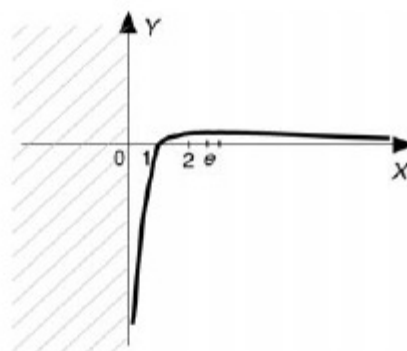
$y = 0$ pues $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- Extremos relativos: máximo $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(0, 1)$

f es positiva en $(1, +\infty)$



g) $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(1, 0)$
- Asíntotas :

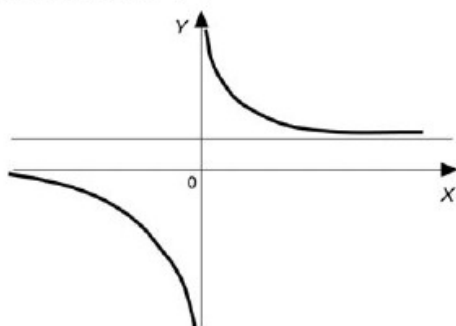
$$y = 1, \text{ pues } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1$$

$$y = 0, \text{ pues } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$$

- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, 0)$

f es positiva en $(0, +\infty)$



h) $y = x^2 e^{-x}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Asíntotas : $y = 0$, pues $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = 0$.

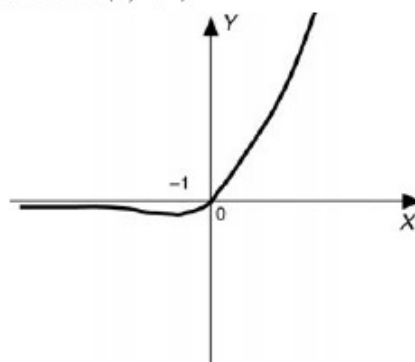
- Extremos relativos: mínimo $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$

- Intervalos de signo constante:

- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, 0)$

f es positiva en $(0, +\infty)$



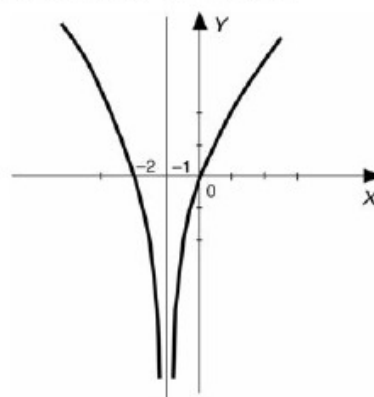
j) $y = \ln|x+1|$ que es de la forma $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x > -1 \\ \ln(-x-1) & \text{si } x < -1 \end{cases}$

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)(-2,0)$
- Asíntotas : $x = -1$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:

• Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

f es negativa en $(-2, -1) \cup (-1, 0)$



k) $y = \frac{e^x}{x^2}$

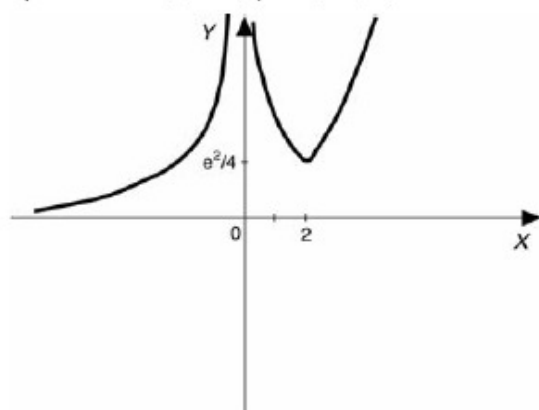
- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Asíntotas : $x = 0$

$$y = 0, \text{ pues } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0$$

- Extremos relativos: mínimo $\left(2, \frac{e^2}{4}\right)$

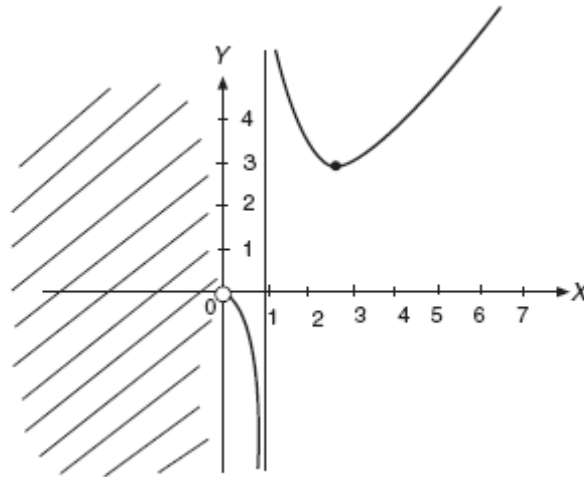
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(0, +\infty)$ y en $(-\infty, 0)$



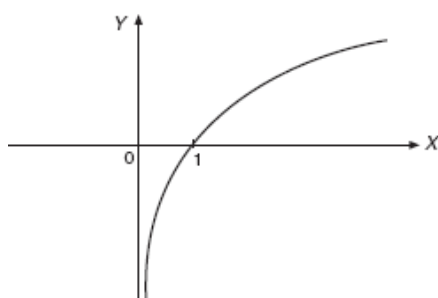
l) $y = \frac{x}{\ln x} = f(x)$

- Dominio: $Dom f = (0, +\infty) - \{1\}$
- No tiene simetrías.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas : $x = 1$
- Extremos relativos: mínimo (e, e)

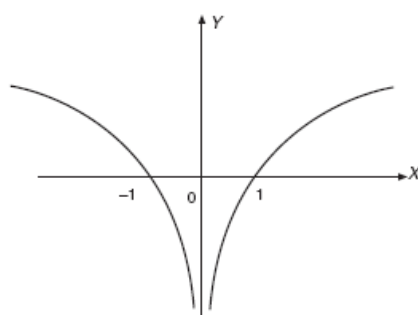


11. Las gráficas son:

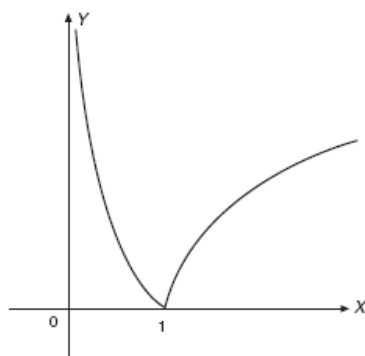
Todas parten de la siguiente gráfica $f(x) = \ln x$



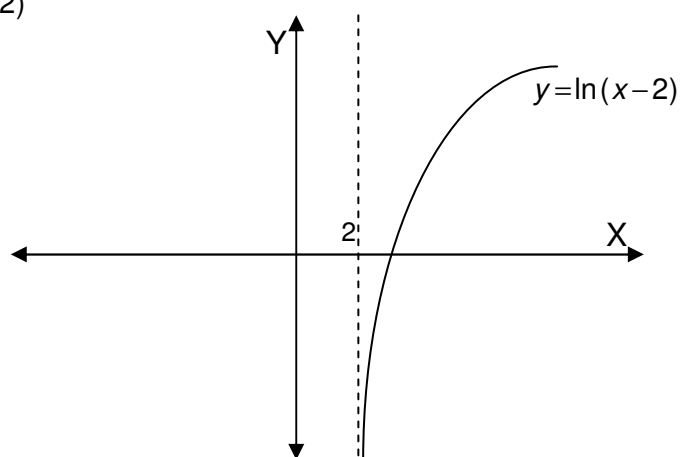
a) $f(x) = \ln|x|$



b) $f(x) = |\ln x|$



c) $f(x) = \ln(x-2)$



12. La función y su función derivada son:

$$f(x) = xe^x \text{ y } f'(x) = (x+1)e^x$$

La grafica de $y = f(x)$ es la que pasa por el origen.

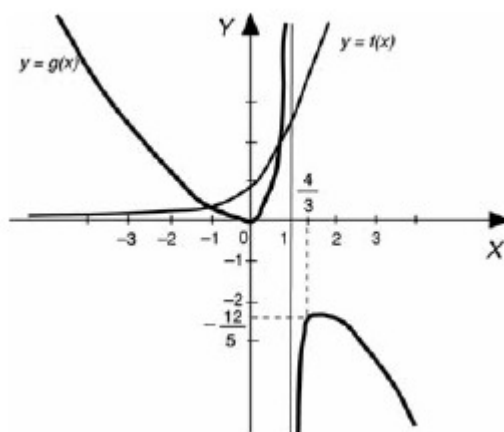
Las características pedidas en el enunciado son:

- Es creciente en $(-1, +\infty)$
- Es decreciente en $(-\infty, -1)$
- Tiene un mínimo relativo en $(-1, -\frac{1}{e})$
- Es cóncava hacia las y positivas en $(-2, +\infty)$
- Es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2)$
- Tiene un punto de inflexión en $(-2, -\frac{2}{e^2})$

13. La ecuación dada $x^4 + 4e^x \cdot (x-1) = 0$ se puede transformar en: $e^x = \frac{-x^4}{4(x-1)}$.

Por tanto, las soluciones de esta ecuación serán los valores de las abscisas de los puntos de intersección de las curvas:

$f(x) = y = e^x$; $g(x) = y = \frac{-x^4}{4(x-1)}$ + la representamos gráficamente :



A partir de la representación grafica observamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en dos puntos; uno de ellos entre $(-2, -1)$ y otro $(0, 1)$.

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

- 14. La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = 3$ y tiene un punto de inflexión en $(2/3, 1/9)$. Halla a , b y c ; y representa gráficamente la función obtenida.

- 15. Esboza la gráfica de la función:
$$\begin{cases} \ln(1+x^2) & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 16. Sea la función $f(x) = e^x + \ln x$.

- Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.
- Haz una gráfica aproximada de esta función.

- 17. Halla el dominio de definición, los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$, los ceros, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1}$$

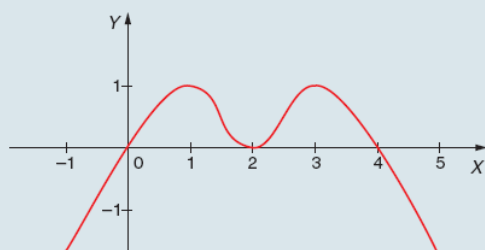
Dibuja luego un esquema sencillo de su gráfica.

- 18. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$, calculando, en su caso, el dominio de definición, máximos, mínimos, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de corte con los ejes.

- 19. Dibuja la región del plano comprendida entre las curvas:

$$y = \sqrt{16 - x^2} \quad x^2 = 12(y - 1)$$

- 20. Se sabe que la gráfica de la derivada $f'(x)$ de una función en el intervalo abierto $(-1, 5)$ es la que muestra el dibujo.

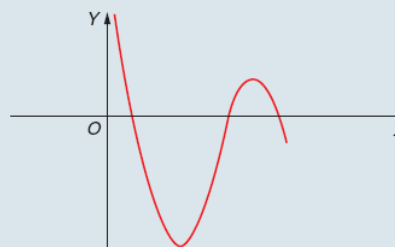


- Sabiendo que $f(0) = 0$, dibuja de manera aproximada la gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, 5)$.
- Indica en esta gráfica los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión.

- 21. El esquema adjunto representa el gráfico de la función $y = f(x)$:

- Haz otro esquema que represente el gráfico de la función $y = -f(x)$.
- Haz otro esquema que represente conjuntamente las gráficas de $y = f(x)$ e $y = 2f(x)$.

Explica el fundamento para la construcción de estos esquemas.



SOLUCIONES

14. La ecuación de la gráfica debe cumplir $f(3)=0$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$ y $f''\left(\frac{2}{3}\right)=0$.

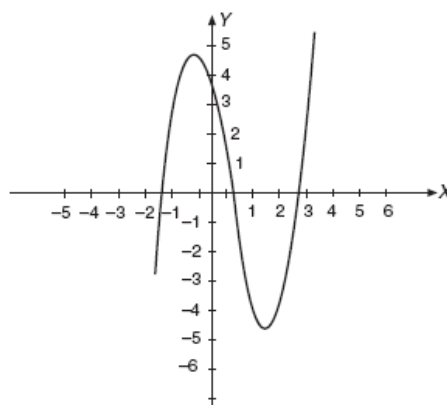
Las condiciones anteriores nos llevan al sistema:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = -27 \\ 12a + 18b + 27c = -5 \\ 2a = -4 \end{cases} \quad \text{cuya solución es } a = -2, b = -\frac{37}{9}, c = \frac{10}{3}.$$

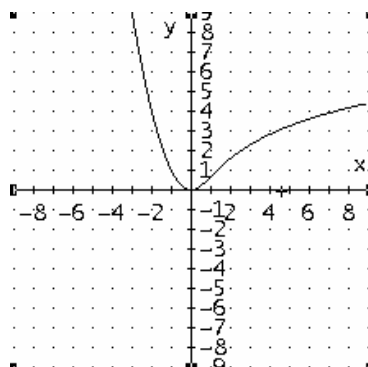
La función es $f(x) = x^3 - 2x^2 - \frac{37}{9}x + \frac{10}{3}$ y su gráfica tiene las siguientes características:

- Corta al eje OX en los puntos: $(-1,65;0)$; $(0,65;0)$ y $(3,0)$
- Corta al eje OY en el punto $(0;3,3)$
- Tiene un máximo relativo en $(0,69;4,89)$ y un mínimo relativo en $(2,02;-4,89)$
- Tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$.

La gráfica puede verse en el dibujo.



15. La gráfica queda:

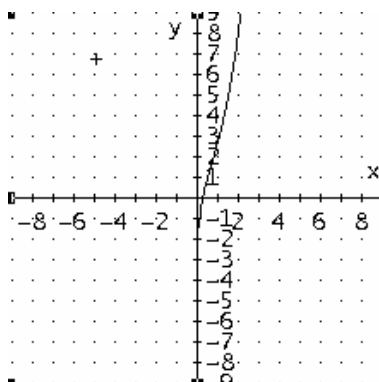


16. La solución es:

a) Creciente $(0, +\infty)$

Asíntotas $x = 0$

b) La gráfica es



17. Para la función queda:

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1} = \frac{1}{8} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1} = \frac{1}{8}$$

- Puntos de corte con los ejes o ceros : $(0,0)(1,0)$

- Asíntotas:

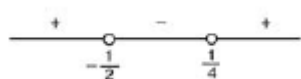
Verticales: no tiene.

Horizontales: $y = \frac{1}{8}$

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{8x^2 + 2x - 1}{(8x^2 + 1)^2}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$



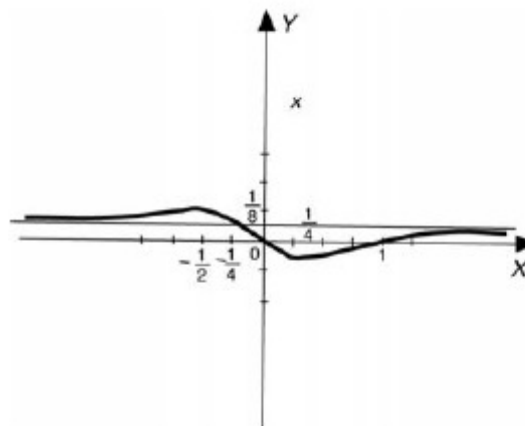
f es creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

f es decreciente en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

- Extremos relativos:

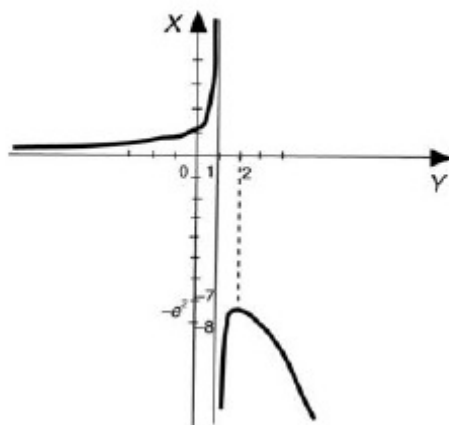
f tiene un máximo relativo en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$.

Su grafica es:

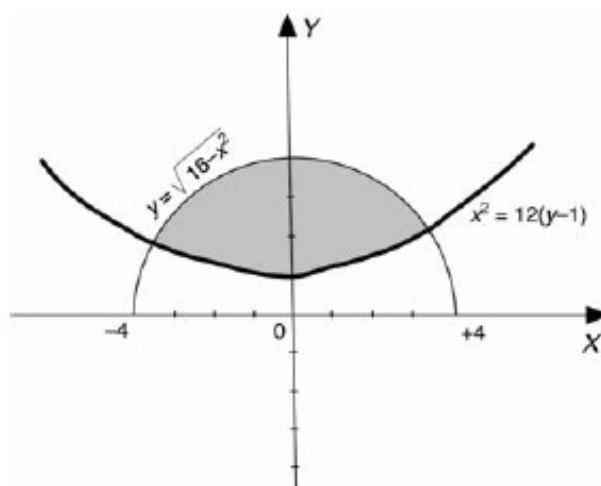


18. Queda:

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{1\}$
- Puntos de corte con los ejes: $(1,0)$
- Asíntotas: $x = 1$
- $y = 0$, pues $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1-x} = 0$.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento:
Crecimiento $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ y decrecimiento $(2, +\infty)$
- Intervalos de signo constante:
 f es positiva en $(-\infty, 1)$
 f es negativa en $(1, +\infty)$



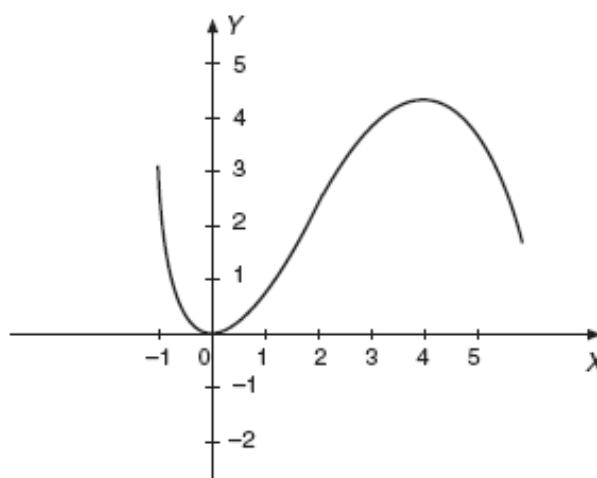
19. Queda:



La zona rayada es la región de plano comprendida entre curvas. Se cortan en los puntos $(-3, 8; 1, 3)$ y $(3, 8; 1, 3)$

20. Las dos funciones quedan:

a) Una grafica aproximada de la función $y = f(x)$ es



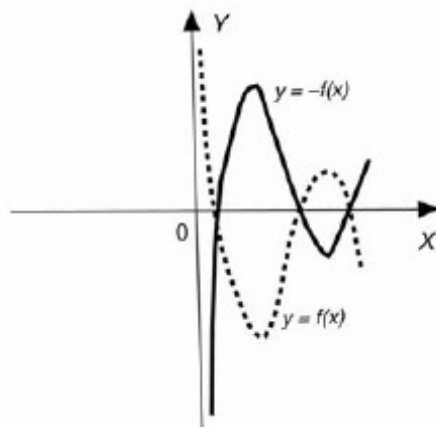
b) La gráfica tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ ya que su función derivada se anula y cambia de signo.

Presenta un máximo relativo para $x = 4$ por la misma razón anterior.

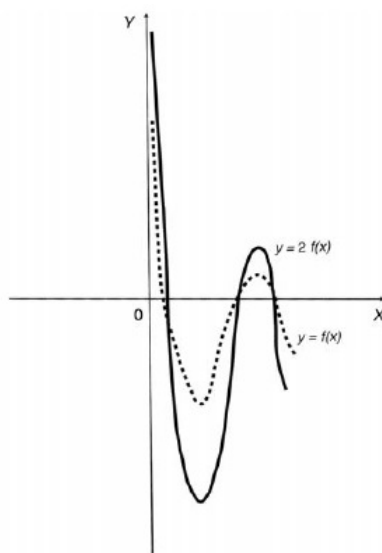
Tiene un punto de inflexión en $x = 2$ ya que la función derivada se anula y no cambia de signo.

21. La solución queda:

a) El gráfico de la función $y = -f(x)$ se obtiene al aplicar al gráfico de la función $y = f(x)$ una simetría del eje de abscisas.



b) El gráfico de la función $y = 2 \cdot f(x)$ se obtiene duplicando las coordenadas correspondientes a cada valor de la abscisa en la gráfica de la función $y = f(x)$.



Unidad 14 – Integrales indefinidas

PÁGINA 339

cuestiones iniciales

1. Una función F es primitiva de otra f siempre y cuando la derivada de F sea f , es decir:

$$F \text{ es primitiva de } f \Leftrightarrow F' = f$$

Encuentra dos primitivas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = \sin x$

d) $f(x) = \frac{3}{x+2}$

2. Comprueba, en cada caso, que F es primitiva de f :

a) $F(x) = -\ln(1-x) - \arctg x + 7$

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{(1-x)(1+x^2)}$$

b) $F(x) = \frac{(2-x)\sin(2x)}{2} - \frac{1}{4}\cos(2x) - \sqrt{3}$

$$f(x) = (2-x)\cos(2x)$$

SOLUCIONES

1. La solución es:

- a) primitivas de $f(x) = 2x$ son:

$$F(x) = x^2 + 7; \quad G(x) = x^2 - \sqrt{2}$$

- b) primitivas de $f(x) = \sin x$ son:

$$F(x) = -\cos x + \frac{1}{3}; \quad G(x) = -\cos x$$

- c) primitivas de $f(x) = e^{-x}$ son:

$$F(x) = -e^{-x} + \sqrt{5}; \quad G(x) = -e^{-x} - 3$$

- d) primitivas de $f(x) = \frac{3}{x+2}$ son:

$$F(x) = 3 \cdot \ln|x+2| - \frac{3}{2}; \quad G(x) = 3 \ln|x+2| + 1$$

2. La solución en cada caso:

a) veamos que $F'(x) = f(x)$

$$F(x) = -\ln(1-x) - \arctan x + 7$$

$$F'(x) = -\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1+x^2 - (1-x)}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{x^2+x}{(1-x)(1+x^2)} = f(x)$$

b) veamos que $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \frac{(2-x) \cdot \sin(2x)}{2} - \frac{1}{4} \cos(2x) - \sqrt{3}$$

$$F'(x) = \frac{-\sin 2x}{2} + 2 \cdot \frac{\cos(2x) \cdot (2-x)}{2} -$$

$$- \frac{1}{4} [-2 \sin(2x)] = \frac{-\sin 2x}{2} + (2-x) \cdot \cos(2x) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sin(2x) = (2-x) \cdot \cos(2x) = f(x)$$

PÁGINA 353

ACTIVIDADES

■ Utiliza el método de inducción para resolver las siguientes actividades:

1. **Matrices.** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestra que $A^n = 3^{n-1} \cdot A$.

2. **Múltiplo de 5.** Demostrar que $n^5 - n$ es múltiplo de 5 para cualquier valor de n .

3. **Suma de cubos.** Demuestra que para cualquier número natural n se verifica: $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

SOLUCIONES

1. Siguiendo el método de inducción y sabiendo que la igualdad es cierta para valores pequeños de n , damos por supuesto que es cierta par aun valor cualquiera y demostramos que también lo es para el siguiente.

- Para $n=1$ vemos que la igualdad es cierta pues $A=3^0 \cdot A$

- Para $n=2$ calculamos $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot A$

- Suponemos que es cierta para $n=p$, es decir: $A^p = 3^{p-1} \cdot A$

- Hemos de ver que también es cierta para $n=p+1$, es decir hemos de probar que:

$$A^{p+1} = 3^p \cdot A$$

Para ello calculamos esta matriz $A^{p+1} = A^p \cdot A = 3^{p-1} \cdot A \cdot A = 3^{p-1} \cdot 3 \cdot A = 3^p \cdot A$ que es lo que queríamos demostrar.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para $p+1$. Por tanto podemos afirmar que es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Siguiendo el método de inducción y sabiendo que $n^5 - n$ es múltiplo de 5 es cierto para valores pequeños de n , damos por supuesto que es cierto para un valor cualquiera y demostramos que también lo es para el siguiente.

- Para $n=1$ vemos que la igualdad es cierta pues $1^5 - 1 = 0$ = múltiplo de 5
- Para $n=2$, $2^5 - 2 = 30$ = múltiplo de 5
- Suponemos que es cierta para $n=p$, es decir:

$$p^5 - p = \text{múltiplo de 5}$$

- Hemos de ver que también es cierta para $n = p+1$, es decir hemos de probar que:

$$(p+1)^5 - (p+1) = \text{múltiplo de } 5$$

Para ello operamos y obtenemos:

$$(p+1)^5 - (p+1) = p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 10p^2 + 5p + 1 - p - 1 =$$

$$(p^5 - p) + 5(p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p) = \text{múltiplo de } 5 + \text{múltiplo de } 5 = \text{múltiplo de } 5$$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para $p + 1$. Por tanto podemos afirmar que es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Siguiendo el método de inducción y sabiendo que la igualdad es cierta para valores pequeños de n , damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostramos que también lo es para el siguiente.

- Para $n = 1$ la igualdad es cierta $1 = \frac{1(1+1)^2}{4}$

- Para $n = 2$ la igualdad es cierta pues $1^3 + 2^3 = \frac{2^2(2+1)^2}{4}$

- Suponemos que es cierta para $n = p$, es decir:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + p^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$$

- Hemos de ver que también es cierta para $n = p+1$, es decir hemos de probar que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + p^3 + (p+1)^3 = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$$

Para ello utilizando lo anterior obtenemos:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + p^3 + (p+1)^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 = (p+1)^2 \left(\frac{p^2}{4} + p + 1 \right) = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$$

Esto es lo que queríamos demostrar.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para $p + 1$. Por tanto podemos afirmar que es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

■ 1. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de integrales inmediatas:

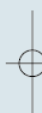
- | | | |
|--|--|--|
| a) $\int (2x^2 - 4x + 5) dx$ | h) $\int \left(3x + \frac{1}{x^2}\right) dx$ | ñ) $\int \left(2\sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x}\right) dx$ |
| b) $\int \left[\frac{x^4 - 3x\sqrt{x} + 2}{x}\right] dx$ | i) $\int \frac{(1+x)^2}{x} dx$ | o) $\int (2x^2 + 3)^2 \cdot 5x dx$ |
| c) $\int \frac{3x}{x^2 + 5} dx$ | j) $\int \frac{4x + 8}{x^2 + 4x} dx$ | p) $\int 4x^2 \sqrt{1 - x^3} dx$ |
| d) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2 + 1}} dx$ | k) $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$ | q) $\int \frac{1 - \cos 2x}{2x - \sin 2x} dx$ |
| e) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$ | l) $\int 3x \cdot 3^{x^2} dx$ | r) $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$ |
| f) $\int \frac{dx}{4 + 7x^2}$ | m) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^8}} dx$ | s) $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ |
| g) $\int \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ | n) $\int \sin^3 2x \cos 2x dx$ | t) $\int \frac{1 - \ln x}{x \ln x} dx$ |

■ 2. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes:

- | | | |
|------------------------------------|-------------------------------|---|
| a) $\int x^2 \cdot \cos x dx$ | e) $\int x^3 \cdot \ln x dx$ | i) $\int x^2 \cdot e^x dx$ |
| b) $\int e^x \cdot \cos 2x dx$ | f) $\int 2^x \cdot \sin x dx$ | j) $\int \ln x dx$ |
| c) $\int \arcsen x dx$ | g) $\int \arctg x dx$ | k) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$ |
| d) $\int x \sin x \cdot \cos x dx$ | h) $\int x^3 \ln^2 x dx$ | l) $\int \frac{x \arcsen x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ |

■ 3. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de funciones racionales:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\int \frac{x}{x-2} dx$ | e) $\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ | i) $\int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx$ |
| b) $\int \frac{x^2 + x}{(1-x)(1+x^2)} dx$ | f) $\int \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x-1)^2(x+1)} dx$ | j) $\int \frac{3x^2 + 5x - 7}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx$ |
| c) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$ | g) $\int \frac{x^3 + 4x}{x^2 + 1} dx$ | k) $\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2} dx$ |
| d) $\int \frac{9x}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx$ | h) $\int \frac{x}{(x-1)^2} dx$ | l) $\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$ |



SOLUCIONES

1. Las integrales quedan:

$$a) \int (2x^2 - 4x + 5) dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x + C$$

$$b) \int \frac{x^4 3x \sqrt{x+2}}{x} dx = \int \left(x^3 - 3x^{1/2} + \frac{2}{x} \right) dx = x^4 / 4 - 2\sqrt{x^3} 2 \ln|x| + C$$

$$c) \int \frac{3x}{x^2+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+5} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+5| + C$$

$$d) \int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}} dx = \frac{1}{3} \int (3x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x \cdot dx = \\ = \frac{2}{3} \sqrt{3x^2+1} + C$$

$$e) \int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \int \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot dx = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$f) \int \frac{dx}{4+7x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)^2} dx = \\ = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{1+\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)^2} dx = \\ = \frac{1}{2\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + C$$

$$g) \int \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} dx = 3 \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \\ = 3 \cdot \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$h) \int \left(3x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int (3x + x^{-2}) dx = \frac{3x^2}{2} - 1/x + C$$

$$i) \int \frac{(1+x)^2}{x} dx = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \\ = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln |x| + C$$

$$j) \int \frac{4x+8}{x^2+4x} dx = 2 \int \frac{2x+4}{x^2+4x} dx = 2 \ln |x^2+4x| + C$$

$$k) \int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} (1+\sqrt{x})^2 dx = \frac{2}{3} \cdot (1+\sqrt{x})^3 + C$$

$$l) \int 3x \cdot 3^{x^2} dx = \frac{3}{2} \int 3^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{x^2}}{\ln 3} + C$$

$$m) \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{1-(x^4)^2} dx = \frac{1}{4} \arctg(x^4) + C$$

$$n) \int \sin^3 2x \cdot \cos 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \int (\sin 2x)^3 \cdot 2 \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sin 2x)^4}{4} + C$$

$$\tilde{n}) \int \left(2 \sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x} \right) dx = \int \left(2x^{\frac{3}{4}} - \frac{5}{x} \right) dx = \frac{8 \sqrt[4]{x^7}}{7} - 5 \ln |x| + C$$

$$o) \int (2x^2+3)^2 \cdot 5x dx = \frac{5}{4} \int (2x^2+3)^2 \cdot 4x dx = \frac{5}{4} \frac{(2x^2+3)^3}{3} + C$$

$$p) \int 4x^2 \cdot \sqrt{1-x^3} dx = \frac{4}{-3} \int (1-x^3)^{\frac{1}{2}} \cdot (-3x^2) dx = \\ = -\frac{4}{3} \frac{2 \sqrt{(1-x^3)^3}}{3} = \frac{-8}{9} \sqrt{(1-x^3)^3} + C$$

$$q) \int \frac{1 - \cos 2x}{2x - \sin 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 - 2 \cos 2x}{2x - \sin 2x} dx = \frac{1}{2} \ln |2x - \sin 2x| + C$$

$$r) \int \frac{e^{\ln x}}{x} \cdot dx = e^{\ln x} + C$$

$$s) \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{-2} \int (4-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x) dx =$$

$$- \frac{1}{2} \frac{(4-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{4-x^2} + C$$

$$t) \int \frac{1 - \ln x}{x \ln x} dx = \int \frac{1/x}{\ln x} dx - \int \frac{1}{x} dx =$$

$$= \ln |\ln x| - \ln x + C$$

2. Las integrales quedan:

$$a) \int x^2 \cdot \cos x \, dx = I$$

$$\left. \begin{aligned} u &= x^2 \Rightarrow du = 2x \cdot dx \\ dv &= \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = x^2 \cdot \operatorname{sen} x - \int 2x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left. \begin{aligned} u &= 2x \Rightarrow du = 2 \cdot dx \\ dv &= \operatorname{sen} x \cdot dx \Rightarrow v = -\cos x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= x^2 \operatorname{sen} x - \left[-2x \cos x - \int 2 \cdot (-\cos x) \cdot dx \right] = \\ &= x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx = x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$$

$$b) \int e^x \cdot \cos 2x \cdot dx = I$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \cos 2x \Rightarrow du = -2 \operatorname{sen} 2x \, dx \\ dv &= e^x \cdot dx \Rightarrow v = e^x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cdot \cos 2x \cdot dx = e^x \cdot \cos 2x - \int -2 e^x \operatorname{sen} 2x \, dx = \\ &= e^x \cos 2x + 2 \int e^x \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot dx \end{aligned}$$

Aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left. \begin{aligned} u &= \operatorname{sen} 2x \Rightarrow du = 2 \cdot \cos 2x \cdot dx \\ dv &= e^x \cdot dx \Rightarrow v = e^x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cdot \cos 2x + 2 [e^x \operatorname{sen} 2x - \int 2 e^x \cos 2x \, dx] = \\ &= e^x \cos 2x + 2 e^x \operatorname{sen} 2x - 4 \int e^x \cdot \cos 2x \, dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow I = e^x \cdot \cos 2x + 2 e^x \cdot \operatorname{sen} 2x - 4 I \Rightarrow \\ &\Rightarrow I = \frac{e^x \cos 2x + 2 e^x \operatorname{sen} 2x}{5} + C \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ dv &= dx \Rightarrow v = x \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \cdot dx = x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx =$$

$$c) \int \arcsin x \cdot dx = I$$

$$\left. \begin{aligned} u = \arcsin x &\Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx &\Rightarrow v = x \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int \arcsin x \cdot dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx =$$

$$= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) dx =$$

$$= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$d) \int x \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot dx = I = \int \frac{x}{2} \cdot \sin 2x \cdot dx$$

$$\left. \begin{aligned} u = \frac{x}{2} &\Rightarrow du = \frac{1}{2} dx \\ dv = \sin 2x \cdot dx &\Rightarrow v = \frac{-\cos 2x}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$e) \int x^3 \cdot \ln x \cdot dx = I$$

$$\left. \begin{aligned} u = \ln x &\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^3 dx &\Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int x^3 \cdot \ln x \cdot dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4x} dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

$$f) \int 2^x \cdot \sin x \cdot dx = I$$

$$\left. \begin{aligned} u = 2^x &\Rightarrow du = 2^x \cdot \ln 2 \cdot dx \\ dv = \sin x \cdot dx &\Rightarrow v = -\cos x \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int 2^x \cdot \sin x \cdot dx = -2^x \cdot \cos x + \int 2^x \cdot \ln 2 \cdot \cos x \cdot dx$$

Aplicando de nuevo este método, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} u = 2^x &\Rightarrow du = 2^x \cdot \ln 2 \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx &\Rightarrow v = \sin x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int -2^x \cdot \cos x + \\ &+ \ln 2 \left[2^x \cdot \sin x - \int 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sin x \cdot dx \right] = -2^x \cdot \cos x + \\ &+ 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sin x - (\ln 2)^2 \int 2^x \cdot \sin x \cdot dx \Rightarrow \\ \Rightarrow I &= -2^x \cdot \cos x + 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sin x - (\ln 2)^2 \cdot I \Rightarrow \\ \Rightarrow I &= \frac{-2^x \cdot \cos x + 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sin x}{1 + (\ln 2)^2} + C \end{aligned}$$

$$g) \int \arctan x \cdot dx = I$$

$$\left. \begin{aligned} u = \arctan x &\Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx &\Rightarrow v = x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \arctan x \cdot dx = x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \\ &= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C \end{aligned}$$

$$h) \int x^3 \cdot \ln^2 x \cdot dx = I$$

$$\left. \begin{aligned} u = \ln^2 x &\Rightarrow du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x^3 dx &\Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int x^3 \cdot \ln^2 x \cdot dx = \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \int \frac{x^4}{4} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{1}{2} \int x^3 \cdot \ln x \cdot dx \end{aligned}$$

Aplicando este método a la última integral, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} u = \ln x &\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^3 dx &\Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right] = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{x^4}{8} \ln x + \frac{x^4}{32} + C \end{aligned}$$

i) $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = I$

$$\left. \begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx &\Rightarrow v = \sin x \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow$$

Aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left. \begin{aligned} u = 2x &\Rightarrow du = 2 dx \\ dv = e^x dx &\Rightarrow v = e^x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 e^x - \left[2x e^x - \int 2 e^x dx \right] = \\ &= x^2 \cdot e^x - 2xe^x + 2e^x + C \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - 2x e^x + 2 e^x + C$$

j) $\int \ln x \cdot dx = I$

$$\left. \begin{aligned} u = \ln x &\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx &\Rightarrow v = x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \ln x - x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \ln x \cdot dx = x \ln x - x + C \end{aligned}$$

$$k) \int \sqrt{x} \cdot \ln x \cdot dx = I$$

$$\left. \begin{aligned} u = \ln x &\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \sqrt{x} \cdot dx &\Rightarrow v = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + C \end{aligned}$$

$$l) \int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = I$$

$$\left. \begin{aligned} u = \arcsin x &\Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &\Rightarrow v = -\sqrt{1-x^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - \\ &- \int \frac{-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + x + C \end{aligned}$$

3. Las integrales quedan:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{x}{x-2} dx &= \int \frac{x-2}{x-2} dx + \int \frac{2}{x-2} dx = \\ &= x + 2 \ln |x-2| + C \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \frac{x^2 + x}{(1-x)(1+x^2)} dx$$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

$$\frac{x^2 + x}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx + C}{1+x^2}$$

$$\frac{x^2 + x}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A(1+x^2) + (Bx + C)(1-x)}{(1-x)(1+x^2)}$$

- $x = 1 \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1$
- $x = 0 \Rightarrow A + C = 0 \Rightarrow C = -1$
- $x = -1 \Rightarrow 2A - 2B + 2C = 0 \Rightarrow B = 0$

La integral pedida vale:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x}{(1-x)(1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{1-x} dx + \int \frac{-1}{1+x^2} dx = \\ &= -\ln |1-x| - \arctan x + C \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} + C$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \frac{9x}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx &= -9 \int \frac{1}{x+1} dx + \\ &+ 9 \int \frac{1}{x+2} dx + 18 \int \frac{1}{(x+2)^2} dx = \\ &= -9 \ln |x+1| + 9 \ln |x+2| - \frac{18}{x+2} + C \end{aligned}$$

$$e) \int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

Descomponemos la fracción integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x-2) + B \cdot x \cdot (x-2) + C \cdot x(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

- $x = 1 \Rightarrow -B = 1 \Rightarrow B = -1$
- $x = 0 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$
- $x = 2 \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-2} dx = \frac{1}{2} \ln |x| - \ln |x-1| +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln |x-2| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x(x-2)}}{x-1} \right| + C$$

$$f) \int \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} dx$$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

$$\frac{-x^2 + 6x - 1}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{-x^2 + 6x - 1}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} =$$

$$= \frac{A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2 \cdot (x+1)}$$

- $x = 1 \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2$
- $x = -1 \Rightarrow 4C = -8 \Rightarrow C = -2$
- $x = 0 \Rightarrow A - B + C = -1 \Rightarrow B = 1$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} dx = \int \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx +$$

$$+ \int \frac{-2}{x+1} dx = -\frac{2}{x-1} + \ln|x-1| - 2 \ln|x+1| + C =$$

$$= \frac{-2}{x-1} + \ln \left| \frac{x-1}{(x+1)^2} \right| + C$$

$$g) \int \frac{x^3 + 4x}{x^2 + 1} dx = \int x dx + \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} +$$

$$\frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$h) \int \frac{x}{(x-1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x-1)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2 + 2}{(x-1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2} dx +$$

$$+ \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \int \frac{x^3}{x^2-1} dx &= \int \frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1} = \\ &= \int x dx + \int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln |x^2-1| + C \end{aligned}$$

$$\text{j)} \quad \int \frac{3x^2+5x-7}{x^3-2 \cdot x^2+x-2} dx$$

Descomponemos la fracción dada en suma de fracciones simples:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+5x-7}{(x-2)(x^2+1)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ \frac{3x^2+5x-7}{(x-2)(x^2+1)} &= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)} \end{aligned}$$

- $x=2 \Rightarrow 5A=15 \Rightarrow A=3$
- $x=0 \Rightarrow A-2C=-7 \Rightarrow C=5$
- $x=1 \Rightarrow 2A-B-C=1 \Rightarrow B=0$

La integral pedida vale:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2+5x-7}{(x-2)(x^2+1)} dx &= \int \frac{3}{x-2} dx + \int \frac{5}{x^2+1} dx = \\ &= 3 \ln |x-2| + 5 \cdot \arctan x + C \end{aligned}$$

$$\text{k)} \quad \int \frac{x^4+2x-6}{x^2+x-2} dx = \int \left[x^2 - x + 3 - \frac{3x}{x^2+x-2} \right] dx =$$

$$= \int x^2 dx - \int x dx + 3 \int dx - \int \frac{1}{x-1} dx -$$

$$- 2 \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} +$$

$$+ 3x - \ln |x-1| - 2 \ln |x+2| + C$$

$$\text{l)} \quad \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int \left[x - \frac{x}{x^2+1} \right] dx =$$

$$= \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + C$$

- 4. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable con el cambio que se indica en cada caso:

a) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 2} dx$ $[e^x = t]$	d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$ $[\sqrt{x-1} = t]$
b) $\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$ $[\sqrt{x} = t]$	e) $\int \cos^4 x \, dx$ $[\operatorname{tg} x = t]$
c) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ $[4-x^2 = t^2]$	f) $\int \frac{3^x + 27^x}{1+9^x} dx$ $[3^x = t]$

- 5. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable:

a) $\int x \sqrt{x-1} dx$	d) $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$	g) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$
b) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1} dx$	e) $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+1}}$	h) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$
c) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$	f) $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{\sqrt[3]{1+3\cos 3x}} dx$	i) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$

- 6. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración más conveniente:

a) $\int \frac{3}{1+\sqrt{x+1}} dx$	i) $\int x^2 \cdot \arcsen x \, dx$	p) $\int \frac{1}{\sqrt{1+4x-x^2}} dx$
b) $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$	j) $\int \frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	q) $\int \frac{3x}{x^4+16} dx$
c) $\int \frac{[\ln x]^5}{x} dx$	k) $\int \frac{dx}{x[\ln x - 1]}$	r) $\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{2x} dx$
d) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$	l) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$	s) $\int \frac{x^4-8}{x^3-4x} dx$
e) $\int \operatorname{sen}(\ln x) \cdot dx$	m) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$	t) $\int \ln[x + \sqrt{1+x^2}] dx$
f) $\int \frac{6x^3-x}{1+x^4} dx$	n) $\int x \ln(x^2-1) \, dx$	u) $\int \frac{6x^3-7x}{\sqrt{1-x^4}} dx$
g) $\int x \cdot \ln\left[\frac{1-x}{1+x}\right] dx$	ñ) $\int \frac{4x^2}{x^4-1} dx$	v) $\int \frac{2+x^2-3x}{(1+x^2)} dx$
h) $\int \operatorname{sen}^4 5x \cdot \cos 5x \, dx$	o) $\int \frac{\cos 5x}{\operatorname{sen}^4 5x} dx$	w) $\int \sqrt{6-5x^2} \, dx$

- 7. Halla la primitiva de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ cuya gráfica pase por el punto (2, 2).

SOLUCIONES

4. Las integrales son:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 2} dx &= \int \frac{1}{t^2 + t + 2} dt = \\
 &= \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{7}{4} \int \frac{1}{1 + \left[\frac{2}{\sqrt{7}} \left(t + \frac{1}{2}\right)\right]^2} dt = \\
 &= \frac{7\sqrt{7}}{8} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}} t + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} \frac{2}{\sqrt{7}} dt = \\
 &= \frac{7\sqrt{7}}{8} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2}{\sqrt{7}} e^x + \frac{1}{\sqrt{7}} \right) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx &= \int \frac{1}{t^2 + t} 2t dt = 2 \int \frac{1}{t+1} dt = \\
 &= 2 \ln |t+1| + C = 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + C
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = - \int dt = -t + C = -\sqrt{4-x^2} + C$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx &= 2 \int (t^2 + 1)^3 dt = \\
 &= 2 \int [t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1] dt = \frac{2t^7}{7} + \frac{6t^5}{5} + 2t^3 + 2t + C = \\
 &= \frac{2}{7} (\sqrt{x-1})^7 + \frac{6}{5} (\sqrt{x-1})^5 + 2 (\sqrt{x-1})^3 + \\
 &+ 2 \sqrt{x-1} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \int \frac{1}{\cos^4 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\
 &= \int (1 + \tan^2 x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + t^2) dt = \\
 &= t + \frac{t^3}{3} + C = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C \\
 \text{f) } \int \frac{3^x + 27^x}{1 + 9^x} dx &= \int \frac{3^x(1 + 9^x)}{1 + 9^x} dx = \int 3^x dx = \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \int dt = \frac{1}{\ln 3} t + C = \frac{1}{\ln 3} 3^x + C
 \end{aligned}$$

5. Las integrales son:

a) $\int x\sqrt{x-1} dx$ Hacemos el cambio de variables:
 $x - 1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$

$$\begin{aligned}
 \int x \cdot \sqrt{x-1} dx &= \int (t^2 + 1) \cdot t \cdot 2t dt = \\
 \int (2t^4 + 2t^2) dt &= \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C
 \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio $t = \sqrt{x-1}$, obtenemos:

$$\int x \sqrt{x-1} dx = 2 \frac{\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{2 \sqrt{(x-1)^3}}{3} + C$$

b) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1} dx$

Hacemos el cambio de variable: $2x-3 = t^2 \Rightarrow dx = t dt$.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1} dx &= \int \frac{t}{t+1} \cdot t dt = \int \frac{t^2}{t+1} dt = \\
 &= \int \frac{(t+1)(t-1)+1}{t} dt = \int (t-1) dt + \\
 &+ \int \frac{1}{t+1} dt = \frac{t^2}{2} - t + \ln |t+1| + C
 \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio: $t = \sqrt{2x-3}$, obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1} dx = \frac{2x-3}{2} - \sqrt{2x-3} + \\ + \ln |\sqrt{2x-3}+1| + C$$

$$c) \int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \int (\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} = -1/\ln x + C$$

$$d) \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -\ln|1+e^{-x}| + C$$

También se puede hacer mediante el cambio de variable: $1+e^{-x}=t$.

$$e) \int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+1}} \quad \text{hacemos el cambio: } x+1=t^2 \Rightarrow dx=2t dt$$

$$\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+1}} = \int \frac{2t dt}{(t^2+4) \cdot t} = \int \frac{2}{t^2+4} dt =$$

$$\int \frac{1/2}{1+t^2/4} dt = \int \frac{1/2}{1+(t/2)^2} dt = \arctan\left(\frac{t}{2}\right) + C =$$

$$= \arctan \frac{\sqrt{x+1}}{2} + C \text{ tras deshacer el cambio con}$$

$$t = \sqrt{x+1}.$$

$$f) \int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{1+3 \cos 3x}} dx = \int (1+3 \cos 3x)^{-\frac{1}{3}} \cdot$$

$$\sin 3x \cdot dx = \frac{1}{-9} \int (1+3 \cos 3x)^{-\frac{1}{3}} \cdot$$

$$(-9 \sin 3x) dx = -\frac{1}{9} \frac{(1+3 \cos 3x)^{2/3}}{2/3} =$$

$$= \frac{-\sqrt[3]{(1+3 \cos 3x)^2}}{6} + C$$

También se puede hacer mediante el cambio de variable: $1+3 \cos 2x = t^3$.

$$\begin{aligned} \text{g) } \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx &= - \int (1+\ln x)^{1/3} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \\ &= \frac{(1+\ln x)^{4/3}}{4/3} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(1+\ln x)^4} + C \end{aligned}$$

También se puede hacer con el cambio de variable:
 $1 + \ln x = t$.

$$\text{h) } \int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$$

Hacemos el cambio: $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx = \int \frac{t}{t^2+2} \cdot 2t \cdot dt = \int \frac{2t^2}{t^2+2} dt =$$

$$= 2 \int \frac{(t^2+2)-2}{t^2+2} dt = 2 \int \frac{t^2+2}{t^2+2} dt -$$

$$- 4 \int \frac{1}{t^2+2} dt = 2t - 2 \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= 2t - 2 \int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt = 2t - 2 \cdot \sqrt{2} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt =$$

$$= 2t - 2\sqrt{2} \cdot \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} \cdot \arctan\sqrt{\frac{x}{2}} + C$$

al deshacer el cambio con $t = \sqrt{x}$.

$$\text{i) } \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx =$$

Hacemos el cambio $x^2 + 1 = t^2 \Rightarrow dx = \frac{t dt}{x}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \int \frac{t}{x} \cdot \frac{t dt}{x} = \int \frac{t^2}{x^2} dt = \int \frac{t^2}{t^2-1} dt =$$

$$= \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = \int \frac{t^2-1}{t^2-1} dt + \int \frac{1}{t^2-1} dt =$$

$$= t + \int \frac{1/2}{t-1} dt + \int \frac{-1/2}{t+1} dt = t + \frac{1}{2} \ln|t-1| -$$

$$- \frac{1}{2} \ln|t+1| + C = t + \ln \left| \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \right| + C = \sqrt{x^2+1} +$$

$$+ \ln \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}} + C$$

6. Las integrales quedan:

$$a) \int \frac{3}{1+\sqrt{x+1}} dx$$

La resolveremos por el método de cambio de variable haciendo: $x+1=t^2 \Rightarrow dx=2t dt$

$$\begin{aligned} 3 \int \frac{1}{1+t} \cdot 2t dt &= 3 \int \frac{2(t+1)-2}{t+1} dt = \\ &= 3 \int 2 dt - 3 \int \frac{2}{t+1} dt = 6t - 6 \ln |t+1| = \\ &= 6\sqrt{x+1} - 6 \ln |\sqrt{x+1} + 1| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \int \sin^3 x \cdot dx &= \int \sin x \cdot \sin^2 x \cdot dx = \\ &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \int \sin x dx - \\ &- \int (\cos x)^2 \cdot \sin x \cdot dx = -\cos x + \int (\cos x)^2 (-\sin x) dx = \\ &= -\cos x + \frac{(\cos x)^3}{3} + C \end{aligned}$$

$$c) \int \frac{(\ln x)^5}{x} dx = \int (\ln x)^5 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{(\ln x)^6}{6} + C$$

$$d) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} \text{ hacemos esta integral por el método de cambio de variable, haciendo:}$$

$$x^2 + 2x = t \Rightarrow dx = \frac{t dt}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} &= \int \frac{1}{(x+1) \cdot t} \cdot \frac{t dt}{x+1} = \\ &= \int \frac{1}{(x+1)^2} dt = \int \frac{1}{x^2+2x+1} dt = \\ &= \int \frac{1}{t^2+1} dt = \arctan t = \arctan \sqrt{x^2+2x} + C \end{aligned}$$

$$e) \int \operatorname{sen}(\ln x) dx = I$$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por partes.

Esta integral la resolvemos por el método de integración por partes.

$$\left. \begin{aligned} u = \operatorname{sen}(\ln x) &\Rightarrow du = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx &\Rightarrow v = x \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int \operatorname{sen}(\ln x) dx = x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) -$$

$$- \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

Volvemos a aplicar este método a la última integral:

$$\left. \begin{aligned} u = \cos(\ln x) &\Rightarrow du = -\operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx &\Rightarrow v = x \end{aligned} \right\}$$

$$I = x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \left[x \cdot \cos(\ln x) - \int -x \operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \right] =$$

$$= x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \operatorname{sen}(\ln x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x) - I \Rightarrow 2I = x \operatorname{sen}(\ln x) -$$

$$- x \cos(\ln x) \Rightarrow I = \frac{x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}(\ln x) dx = \frac{x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C$$

$$f) \int \frac{6x^3 - x}{1 + x^4} dx = \int \frac{6x^3}{1 + x^4} dx - \int \frac{x}{1 + x^4} dx =$$

$$= \frac{6}{4} \int \frac{4x^3}{1 + x^4} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + (x^2)^2} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \ln |1 + x^4| - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^2) + C$$

$$g) \int x \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx = I$$

Hacemos esta integral por medio del método de integración por partes:

$$\left. \begin{aligned} u &= \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow du = \frac{-2}{1-x^2} dx \\ dv &= x \cdot dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int x \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \\ &- \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-2}{1-x^2} dx = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \\ &- \int \frac{x^2}{x^2-1} dx = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{x^2-1}{x^2-1} dx - \int \frac{1}{x^2-1} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \int \frac{1}{x^2-1} dx = \\ &\quad (*) \\ &= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \int \frac{1/2}{x-1} dx - \int \frac{-1/2}{x+1} dx + \\ &+ \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

(*) en esta integral hemos aplicado el método de integración de funciones racionales, descomponiendo la fracción $\frac{1}{x^2-1}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \int \sin^4 5x \cdot \cos 5x \cdot dx &= \frac{1}{5} \int (\sin 5x)^{-4} \cdot 5 \cdot \cos 5x \cdot dx = \\ &= \frac{1}{5} \frac{(\sin 5x)^{-3}}{-3} = \frac{-1}{15 (\sin 5x)^3} + C \end{aligned}$$

$$\text{i) } \int x^2 \cdot \arcsin x \cdot dx = I$$

La resolvemos por el método de integración por partes:

$$\left. \begin{aligned} u &= \arcsin x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv &= x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot \arcsin x \cdot dx = \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Esta última integral la resolvemos por cambio de variables, haciendo $1 - x^2 = t^2 \Rightarrow dx = \frac{-t dt}{x}$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{x^3}{t} \cdot \frac{-t dt}{x} = \int -x^2 \cdot dt = \\ &= \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t = \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Por tanto, la integral pedida vale:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \arcsin x \cdot dx &= \frac{x^3}{3} \cdot \arcsin x - \\ &- \frac{1}{3} \left[\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \sqrt{1-x^2} \right] = \frac{x^3}{3} \arcsin x - \\ &- \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{9} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + C \end{aligned}$$

$$\text{i) } \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int (\arcsin x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + C$$

$$k) \int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = \int \frac{1/x \cdot dx}{\ln x - 1} = \ln |\ln x - 1| + C$$

$$l) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = I$$

$$I = \int \frac{\ln t}{x} \cdot x dt = \int \ln t \cdot dt$$

Hacemos esta integral por el método de cambio de variable, haciendo: $\ln x = t \Rightarrow dx = x \cdot dt$

$$\left. \begin{aligned} u = \ln t &\Rightarrow du = \frac{1}{t} dt \\ dv = dt &\Rightarrow v = t \end{aligned} \right\}$$

$$\int \ln t \cdot dt = t \cdot \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = t \cdot \ln t - t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} \cdot dx = \ln x \cdot [\ln(\ln x)] - \ln x + C$$

$$m) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = - \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C$$

Hemos realizado el cambio de variable $\cos x = t$

$$n) \int x \cdot \ln(x^2 - 1) \cdot dx = I$$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por partes:

$$\left. \begin{aligned} u = \ln(x^2 - 1) &\Rightarrow du = \frac{2x}{x^2 - 1} dx \\ dv = x dx &\Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int x \cdot \ln(x^2 - 1) \cdot dx = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 - 1) - \int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x^2 - 1) - \int \frac{(x^2 - 1)x + x}{x^2 - 1} dt = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 - 1) -$$

$$- \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 - 1) - \frac{x^2}{2} -$$

$$- \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C$$

$$\begin{aligned} \text{ñ)} \int \frac{4x^2}{x^4 - 1} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx + \\ &+ 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx = \ln |x-1| - \ln |x+1| + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

$$\text{o)} \int \frac{\cos 5x}{\operatorname{sen}^4 5x} dx = \frac{1}{5} \int (\operatorname{sen} 5x)^{-4} \cdot 5 \cdot \cos 5x \cdot dx = \frac{1}{5} \frac{(\operatorname{sen} 5x)^{-3}}{-3} = \frac{-1}{15 (\operatorname{sen} 5x)^3} + C$$

$$\begin{aligned} \text{p)} \int \frac{1}{\sqrt{1+4x-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{5-(2-x)^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(2-x)^2}{5}}} dx = \\ &= - \int \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\left(\frac{2-x}{\sqrt{5}}\right)^2}} dx = -\operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{2-x}{\sqrt{5}} \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{q)} \int \frac{3x}{x^4+16} dx &= \int \frac{\frac{3x}{16}}{1+\frac{x^4}{16}} dx = \int \frac{\frac{3x}{16}}{1+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2} dx = \\ &= \frac{3}{8} \int \frac{\frac{x}{2}}{1+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2} dx = \frac{3}{8} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{4} \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{r)} \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{2x} dx &= \int \frac{\sqrt{x}}{2x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\ln x}{x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int x^{-1/2} dx + \frac{1}{2} \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{2} + C = \sqrt{x} + \frac{(\ln x)^2}{4} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{s)} \int \frac{x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx &= \int \left[x + \frac{4x^2 - 8}{x^3 - 4x} \right] dx = \\
 &= \int x dx + 2 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{1}{x+2} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x| + \ln |x-2| + \ln |x+2| + C
 \end{aligned}$$

$$\text{t)} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = 1$$

Hacemos esta integral por el método de integración por partes:

$$\begin{aligned}
 u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) &\Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx \\
 dv = dx &\Rightarrow v = x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot dx = x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \\
 &- \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{u)} \int \frac{6x^3 - 7x}{\sqrt{1-x^4}} dx &= \int \frac{6x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx - \int \frac{7x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \\
 &= \frac{6}{-4} \int (1-x^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4x^3) dx - \frac{7}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \\
 &= -\frac{3}{2} \frac{(1-x^4)^{1/2}}{1/2} - \frac{7}{2} \arcsen(x^2) = \\
 &= -3\sqrt{1-x^4} - \frac{7}{2} \cdot \arcsen(x^2) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v)} \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} dx &= \int \left[1 + \frac{-3x + 1}{x^2 + 1} \right] dx = \\
 &= \int dx - \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \\
 &= x - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan x + C
 \end{aligned}$$

$$w) \int \sqrt{6-5x^2} \, dx$$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por cambio de variable, haciendo:

$$x = \frac{\sqrt{6} \cdot \operatorname{sen} t}{\sqrt{5}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{6} \cdot \cos t}{\sqrt{5}} \cdot dt$$

$$\int \sqrt{6-5x^2} \cdot dx = \int \sqrt{6-5 \cdot \frac{6 \operatorname{sen}^2 t}{5}} \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \cos t}{\sqrt{5}} \cdot dt =$$

$$= \int \frac{6}{\sqrt{5}} \cos^2 t \, dt = \frac{6}{\sqrt{5}} \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot t +$$

$$+ \frac{3}{2\sqrt{5}} \operatorname{sen} 2t = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{5} x}{\sqrt{6}} +$$

$$+ \frac{3}{2\sqrt{5}} \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} t \cdot \cos t = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{5} x}{\sqrt{6}} +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5} x}{\sqrt{6}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} x}{\sqrt{6}} \right)^2} + C$$

7. Calculamos las primitivas de $f(x)$:

Resolvemos esta integral por el método de la integración de cambio de variable, haciendo:

$$x^2 - 1 = t^2 \Rightarrow dx = \frac{t \, dt}{x}.$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \cdot dx = \int \frac{t}{x} \cdot \frac{t \, dt}{x} = \int \frac{t^2}{t^2 + 1} \, dt =$$

$$= \int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} \, dt = \int \frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} \, dt - \int \frac{1}{t^2 + 1} \, dt =$$

$$= t - \operatorname{arc} \operatorname{tg} t = \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x^2 - 1} + C$$

Todas las primitivas de $f(x)$ son las funciones:

$$F(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x^2 - 1} + C$$

La primitiva buscada que pase por el punto $(2, 2)$ cumple:

$$2 = \sqrt{3} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{3} + C \Rightarrow C = 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

Luego la primitiva buscada es:

$$F(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x^2 - 1} + \left(2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right)$$

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

- 8. Calcula:

a) $\int x^3 \cdot e^{x^2} dx$

b) $\int \frac{e^{2x}}{2 + e^x} dx$

- 9. Resuelve: $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$.

- 10. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$I_1 = \int e^{3x} \cos 2x dx$

$I_2 = \int x e^{-x} dx$

$I_3 = \int x^2 \sin x dx$

- 11. Resuelve la siguiente integral indefinida:

$I = \int \frac{x^3 - x}{x^2 + 4x - 12} dx$

- 12. Calcula:

$I = \int \frac{x+1}{x^2 - x} dx$

- 13. Resuelve las siguientes integrales indefinidas:

$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 3} dx$

$I_2 = \int \frac{5x+8}{2x^2 + x - 3} dx$

- 14. Resuelve $\int \frac{4^x + 5 \cdot 16^x}{1 + 16^x} dx$.

- 15. Calcula $\int \frac{1 + \ln x}{x (\ln^2 x - \ln x)} dx$.

- 16. Calcula la primitiva de la función $f(x) = [\ln x]^2$ que se anule en $x = e$.

- 17. Calcula, integrando por partes, las siguientes integrales. Comprueba el resultado por derivación.

$I_1 = \int x \cdot \sin (\ln x) dx$

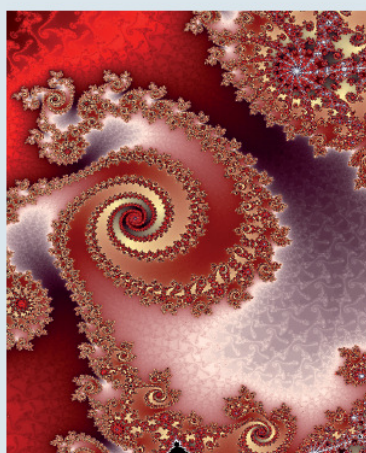
$I_2 = \int x \cdot \ln (x^2 + 1) dx$

$I_3 = \int x^2 \cdot \ln (2x + 1) dx$

- 18. Halla $f(x)$ si sabemos que $f(0) = 1$; $f'(0) = 2$ y $f''(x) = 3x$.

- 19. Calcula una función real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las condiciones siguientes:

$f'(0) = 5$, $f''(0) = 1$, $f(0) = 0$ y $f'''(x) = x + 1$



SOLUCIONES

8. Las integrales quedan:

a) Haciendo el cambio de variable $x^2 = t$ obtenemos:

$$\int x^3 \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int t \cdot e^t dt \text{ resolviendo esta integral por partes obtenemos:}$$

$$\int x^3 \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int t \cdot e^t dt = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C$$

b) Haciendo el cambio de variable $e^x = t$ obtenemos:

$$\int \frac{e^{2x}}{2 + e^x} dx = \int \frac{t}{2 + t} dt = \int \frac{2 + t}{2 + t} dt - \int \frac{2}{2 + t} dt = t - 2 \ln(2 + t) = e^x - 2 \ln(2 + e^x) + C$$

9. La solución queda:

$$\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x \cdot dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^2 x \cdot dx = \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \cdot \cos x \cdot dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

10. Todas las integrales pueden calcularse utilizando integración por partes. Obtenemos:

$$I_1 = \int e^{3x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \sin 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x - \frac{3}{2} \left\{ -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} \int e^{3x} \cos 2x \, dx \right\}$$

$$I_1 = \frac{2}{13} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{13} e^{3x} \cos 2x \, dx + C$$

$$I_2 = \int x e^{-x} \, dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} \, dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$I_3 = \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x \, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

11. La solución es:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x^3 - x}{x^2 + 4x - 12} dx = \int \left[x - 4 + \frac{27x - 48}{x^2 + 4x - 12} \right] dx = \\
 &= \int x dx - 4 \int dx + \int \frac{27x - 48}{x^2 + 4x - 12} dx = \\
 &= \int x dx - 4 \int dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{105}{4} \int \frac{1}{x+6} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{3}{4} \ln |x-2| + \frac{105}{4} \ln |x+6| + C.
 \end{aligned}$$

12. La integral es:

$\int \frac{x+1}{x^2-x} dx$
 Descomponemos la fracción $\frac{x+1}{x^2-x}$ en suma de fracciones simples:

$$\begin{aligned}
 \frac{x+1}{x(x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{x+1}{x(x-1)} &= \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+1}{x^2-x} dx &= \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{2}{x-1} dx = \\
 &= -\ln |x| + 2 \ln |x-1| + C
 \end{aligned}$$

13. La solución en cada caso es:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{x}{x^2+2x+3} dx - \\
 &- \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+3} dx - \\
 &- \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx - \\
 &- 2 \int \frac{1}{(x+1)^2+2} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+2x+3| - \\
 &- \sqrt{2} \int \frac{1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \ln |x^2+2x+3| - \sqrt{2} \cdot \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + C \\
 I_2 &= \int \frac{5x+8}{2x^2+x-3} dx = \int \left[\frac{13/5}{x-1} - \frac{1/5}{2x+3} \right] dx = \\
 &= \frac{13}{5} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{10} \int \frac{2}{2x+3} dx = \\
 &= \frac{13}{5} \ln |x-1| - \frac{1}{10} \ln |2x+3| + C
 \end{aligned}$$

14. Quedan:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{4^x + 5 \cdot 16^x}{1 + 16^x} dx &= \int \frac{4^x}{1 + 16^x} dx + \int \frac{5 \cdot 16^x}{1 + 16^x} dx = \\
 &= \int \frac{4^x}{1 + (4^x)^2} dx + 5 \int \frac{16^x}{1 + 16^x} dx = \\
 &= \frac{1}{\ln 4} \int \frac{4^x \cdot \ln 4}{1 + (4^x)^2} dx + \frac{5}{\ln 16} \int \frac{16^x \cdot \ln 16}{1 + 16^x} dx = \\
 &= \frac{1}{\ln 4} \cdot \operatorname{arc\,tg} (4^x) + \frac{5}{\ln 16} \cdot \ln |1 + 16^x| + C
 \end{aligned}$$

15. Haciendo $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$ la integral queda:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \ln x}{x (\ln^2 x - \ln x)} dx &= \int \frac{1 + t}{t^2 - t} dt = \\ &= \int \left[-\frac{1}{t} + \frac{2}{t-1} \right] dt = -\int \frac{1}{t} dt + 2 \int \frac{1}{t-1} dt = \\ &= -\ln |t| + 2 \ln |t-1| + C = -\ln |\ln x| + \\ &+ 2 \ln |\ln x - 1| + C. \end{aligned}$$

16. $\int (\ln x)^2 dx = I$

$$\left. \begin{aligned} u &= (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2 (\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv &= dx \Rightarrow v = x \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int (\ln x)^2 dx = x \cdot (\ln x)^2 - \int 2 \ln x \cdot dx$$

$$\left. \begin{aligned} u &= 2 \ln x \Rightarrow du = \frac{2}{x} dx \\ dv &= dx \Rightarrow v = x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int (\ln x)^2 dx = x \cdot (\ln x)^2 - \left[2x \ln x - \int 2 dx \right] = \\ &= x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \end{aligned}$$

Todas las primitivas de $f(x) = (\ln x)^2$ son las funciones de la forma:

$$F(x) = x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

Lo que se anula para $x=e$ verificara: $0 = e - 2e + 2e + C \Rightarrow C = -e$

La primitiva buscada es:

$$F(x) = x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x - e$$

17. Las integrales quedan del siguiente modo:

$$I_1 = \int x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) dx$$

$$\left. \begin{aligned} u = \operatorname{sen}(\ln x) &\Rightarrow du = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x dx &\Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$I_1 = \int x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(\ln x) -$$

$$- \int \frac{x}{2} \cdot \cos(\ln x) dx$$

Esta última integral la resolvemos por el mismo método de integración por partes:

$$\left. \begin{aligned} u = \cos(\ln x) &\Rightarrow du = -\operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = \frac{x}{2} dx &\Rightarrow v = \frac{x^2}{4} \end{aligned} \right\}$$

$$I_1 = \int x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(\ln x) -$$

$$- \left[\frac{x^2}{4} \cos(\ln x) - \int -\frac{x}{4} \operatorname{sen}(\ln x) dx \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(\ln x) - \frac{x^2}{4} \cos(\ln x) - \frac{1}{4} I_1$$

$$\frac{5}{4} I_1 = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(\ln x) - \frac{x^2}{4} \cos(\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{4}{5} \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(\ln x) - \frac{x^2}{4} \cos(\ln x) \right] + C$$

$$I_1 = \int x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) dx = \frac{2x^2 \operatorname{sen}(\ln x)}{5} -$$

$$- \frac{x^2 \cos(\ln x)}{5} + C$$

Vamos a comprobar el resultado, para ello veremos que la derivada del segundo miembro es igual a la función del primer miembro:

$$\begin{aligned}
 D \left[\frac{2x^2 \cdot \operatorname{sen}(\ln x)}{5} - \frac{x^2 \cdot \cos(\ln x)}{5} + C \right] &= \\
 &= \frac{4x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) + 2x^2 \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}}{5} - \\
 &- \frac{2x \cdot \cos(\ln x) - x^2 \operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x}}{5} = \\
 &= \frac{4x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) + 2x \cdot \cos(\ln x) - 2x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \operatorname{sen}(\ln x)}{5} = \\
 &= \frac{5x \cdot \operatorname{sen}(\ln x)}{5} = x \cdot \operatorname{sen}(\ln x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int x \cdot \ln(x^2 + 1) \, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 + 1) - \int \frac{x^3}{x^2 + 1} \, dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} \ln(x^2 + 1) - \int x \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C
 \end{aligned}$$

Hallamos la derivada de la función:

$$\begin{aligned}
 D \left[\frac{x^2}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C \right] &= \\
 &= x \ln(x^2 + 1) + \frac{x^3}{x^2 + 1} - x + \frac{x}{x^2 + 1} = x \ln(x^2 + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int x^2 \cdot \ln(2x+1) dx = \frac{1}{3} x^3 \ln(2x+1) - \\
 &- \frac{1}{3} \int \frac{2x^3}{2x+1} dx = \frac{1}{3} x^3 \ln(2x+1) - \\
 &- \frac{1}{3} \int \left[x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{2x+1} \right] dx = \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \ln(2x+1) - \frac{1}{3} \int x^2 dx + \frac{1}{6} \int x dx - \\
 &- \frac{1}{12} \int dx + \frac{1}{24} \int \frac{2}{2x+1} dx = \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \ln(2x+1) - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{12} x + \\
 &+ \frac{1}{24} \ln(2x+1) + C
 \end{aligned}$$

Hallamos la derivada de la función anterior:

$$\begin{aligned}
 D(I_3) &= x^2 \ln(2x+1) + \frac{2}{3} \frac{x^3}{2x+1} - \frac{1}{3} x^2 + \\
 &+ \frac{1}{6} x - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \frac{1}{2x+1} = x^2 \ln(2x+1)
 \end{aligned}$$

18. La solución es:

$$\text{Si } f''(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2} + C$$

Como $f'(0) = 2 \Rightarrow C = 2$, por tanto:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + D$$

Como $f(0) = 1 \Rightarrow D = 1$, luego la función $f(x)$ buscada es:

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + 1$$

19. La función buscada es: $f(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 5x$

Unidad 15 – Integrales definidas. Aplicaciones

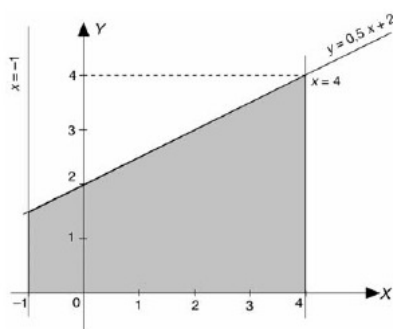
PÁGINA 363

cuestiones iniciales

1. Calcula el área del recinto limitado por la recta $y = 0,5x + 2$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 4$.
2. Halla el área de la región limitada por la curva de ordenadas negativas $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ y el eje OX .

SOLUCIONES

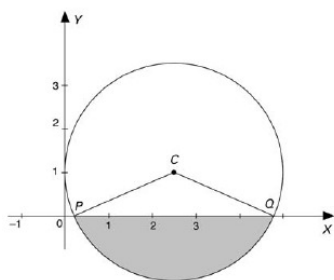
1. La solución:



Lo que nos pide el problema es hallar el área del recinto rayado. Este recinto es un trapecio y su área es:

$$\text{Área} = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{4 + 1,5}{2} \cdot 5 = 13,7$$

2. Queda:



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 &= 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 &= 9 \end{aligned}$$

La curva es una circunferencia de centro $C(3, 1)$ y radio 3 unidades.

La circunferencia corta al eje OX en los puntos $P(0,17;0)$ y $Q(5,83;0)$.

El área de la zona sombreada vale:

$$\frac{9\pi \cdot 141,058}{360} - \frac{1}{2} \cdot 5,66 \cdot 1 = 8,29 \text{ u}^2$$

ACTIVIDADES

■ Utiliza el principio de distribución de Dirichlet en la resolución de los problemas que siguen.

- 1. Iniciales repetidas.** ¿Cuántos habitantes debe tener una ciudad para asegurar que hay al menos dos habitantes cuyas tres iniciales, del nombre y de los dos apellidos, coinciden? Suponemos que sólo se considera el primer nombre propio y 26 letras del alfabeto.
- 2. Correspondencia.** Diecisiete personas mantienen correspondencia por carta, cada una con todas las demás. En sus cartas solamente tratan 3 temas. Cada par de personas trata en sus cartas sólo uno de estos temas. Demuestra que hay, al menos, 3 personas que se escriben sobre el mismo tema.

SOLUCIONES

1. Puesto que tanto el nombre de pila como los dos apellidos pueden comenzar por cualquiera de las 26 letras del alfabeto, por el principio de multiplicación de la combinatoria tenemos $26 \cdot 26 \cdot 26 = 17\,576$, conjuntos ordenados distintos de tres iniciales.

Por el principio de distribución, el número mínimo de habitantes necesarios para garantizar que existen dos con las mismas iniciales será 17 577.

En esta situación los nidos son $r = 17\,576$, es decir, los conjuntos ordenados distintos de tres iniciales; y las palomas son el número mínimo de habitantes, $n = 17\,577$.

2. Seleccionaremos una persona, digamos A. Mantiene correspondencia con las 16 restantes. Como solamente hay tres temas, según el principio del palomar, debe escribirse al menos con seis de ellas sobre el mismo tema.

Para fijar ideas, supongamos que A se escribe al menos con 6 de las restantes 16 sobre el tema I. Si alguna de estas seis se escribe con otra sobre el tema I, entonces ya hay tres escribiéndose sobre el tema I.

Supongamos que estas seis personas se escriben sobre los temas II y III. Si B es una de estas seis, entonces, por el principio del palomar, debe escribirse al menos con tres de las otras 5 sobre uno de los dos temas, por ejemplo el tema II.

Ahora hay dos posibilidades para estas últimas tres personas. Si alguna se escribe con otra sobre el tema II, ya hemos encontrado tres personas que se escriben sobre el tema II. Si, por el contrario, ninguna de las tres se escribe con las otras sobre el tema II, entonces las tres deben escribirse entre sí sobre el tema III, con lo que está probada la afirmación del enunciado.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Se considera la función $f(x) = 16 - x^2$ en el intervalo $I = [-1, 4]$ y la partición de dicho intervalo dada por $P = \{-1, 0, 2, 4\}$. Encuentra de forma razonada el valor de las sumas superior e inferior correspondientes a f y a dicha partición P .
- 2. Una partición creciente verifica que $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ y $f(3) = 10$. Halla de forma razonada la suma superior y la inferior correspondientes a la función f en el intervalo $[1, 3]$ respecto a la partición $P = \{1, 2, 3\}$.
- 3. Haciendo uso del teorema del valor medio, resuelve las siguientes cuestiones:
 - a) Halla el valor medio de $f(x) = x^2 + 3$ en el intervalo $(0, 3)$ y halla el punto en el que se alcanza.
 - b) Halla el valor medio de $f(x) = -x^2 + 2x$ en el intervalo $(0, 2)$. Halla los puntos en que se alcanza este valor. El existir dos puntos donde se alcanza el valor medio, ¿contradice el teorema del valor medio?
 - c) ¿Es aplicable el teorema citado a la integral $\int_{-1}^1 f(x) dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$?
 - d) Calcula $\int_2^4 f(x) dx$ siendo $f(x) = 2x^2 - 3x$, y determina el valor medio de f en el intervalo $(2, 4)$, así como el valor de c correspondiente.

- 4. Obtén la derivada de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$$

$$H(x) = \int_0^x t^2 dt$$

$$J(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{3+t} dt$$

$$G(x) = \int_{-3}^x |t+2| dt$$

$$I(x) = \int_x^{x^3} \frac{e^t}{t^2+1} dt$$

$$K(x) = \int_x^{x^2} \ln(t^2+4) dt$$

- 5. Haciendo uso del teorema fundamental del cálculo integral, resuelve las cuestiones siguientes:

- a) Para la función $F(x) = \int_0^{2x} e^{at} dt$, calcula $F'(0)$.

- b) Encuentra los extremos de la función $F(x) = \int_1^x \ln t dt$ en el intervalo $[2, 10]$.

- c) Halla el punto de $[0, 2]$ en el que la función $F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{1+t^2} dt$ alcanza su mínimo.

- d) Para $F(x) = \int_0^{\sin x} \arcsen t dt$, calcula $F'(x)$.

- e) Para $G(x) = \int_1^x e^{-t^2} (1+t^2) dt$, halla $G'(x)$.

- f) La función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, ¿tiene puntos de inflexión? En caso afirmativo halla las abscisas de estos puntos.

- g) Calcula $\int_x^{x^2} e^{t^{1/2}} dt$.



SOLUCIONES

1. La suma superior es:

$$s(P) = (0 - (-1)) \cdot 16 + (2 - 0) \cdot 16 + (4 - 2) \cdot 12 = \\ = 16 + 32 + 24 = 72.$$

La suma inferior es:

$$s(P) = (0 - (-11)) \cdot 15 + (2 - 0) \cdot 12 + (4 - 2) \cdot 0 = \\ = 15 + 24 + 0 = 39$$

2. La suma superior es:

$$s(P) = (2 - 1) \cdot 3 + (3 - 2) \cdot 10 = 3 + 10 = 13$$

La suma inferior es:

$$s(P) = (2 - 1) \cdot 1 + (3 - 2) \cdot 3 = 1 + 3 = 4$$

3. La solución es:

$$a) \int_0^3 (x^2 + 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x \right]_0^3 = 18$$

El teorema del valor medio dice que $\exists c \in (0, 3)$ tal que:

$$\int_0^3 (x^2 + 3) dx = (c^2 + 3) \cdot (3 - 0) \Rightarrow 3c^2 + 9 = 18 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$$

Por tanto, como $c \in (0, 3)$, el valor pedido es $c = \sqrt{3}$

$$b) \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

El teorema del valor medio dice que $\exists c \in (0, 2)$ tal que

$$\int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = (-c^2 + 2c) \cdot (2 - 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow -2c^2 + 4c = \frac{4}{3} \Rightarrow 6c^2 - 12c + 4 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3c^2 - 6c + 2 = 0 \Rightarrow c = 1,58; c = 0,42$$

Obtenemos dos valores de C , pero esto no contradice el teorema, ya que este teorema garantiza que exista un valor pero no dice que este valor sea único.

c) no es aplicable el teorema del valor medio ya que la función $y=f(x)$ no es continua en el intervalo $[-1, 1]$, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_2^4 f(x) dx &= \int_2^4 (2x^2 - 3x) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_2^4 = \\ &= 18,6 - (-0,6) = 19,3 = \frac{58}{3} \end{aligned}$$

Por el teorema de la media:

$$\int_2^4 f(x) dx = f(c)(4 - 2) \text{ con } c \in (2, 4) \Rightarrow f(c) = \frac{29}{3}$$

$$y \frac{58}{3} = (2c^2 - 3c) \cdot 2 \Rightarrow 12c^2 - 18c - 58 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 2784}}{24} = \frac{18 \pm 55,75}{24} = \begin{cases} 3,07 \\ -1,57 \end{cases}$$

Por tanto, $c = 3,07 \in (2, 4)$.

4. La solución es:

$$F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt \Rightarrow F'(x) = e^{\cos x}$$

$$G(x) = \int_0^x t^2 dt \Rightarrow G'(x) = x^2$$

$$H(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{3+t} dt \Rightarrow H'(x) = \frac{1}{3+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{3+x^2}$$

$$I(x) = \int_{-3}^x |t+2| dt \Rightarrow I'(x) = (x+2)$$

$$J(x) = \int_2^{x^2} \frac{e^t}{t^2+1} dt \Rightarrow J'(x) = \frac{e^{x^2}}{x^6+1} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2 \cdot e^{x^2}}{x^6+1}$$

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_x^{x^2} \ln(t^2+4) dt = \int_x^a \ln(t^2+4) dt + \\ &+ \int_a^{x^2} \ln(t^2+4) dt = -\int_a^x \ln(t^2+4) dt + \int_a^{x^2} \ln(t^2+4) dt = \\ &= \int_a^x -\ln(t^2+4) dt + \int_a^{x^2} \ln(t^2+4) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow K'(x) = -\ln(x^2+4) + \ln(x^4+4) \cdot 2x \\ K'(x) &= 2x \cdot \ln(x^4+4) - \ln(x^2+4) \end{aligned}$$

5. La solución queda:

a) la derivada es: $F'(x) = 2e^{4x^2}$

El valor buscado es $F'(0) = 2 \cdot e^{4 \cdot 0} = 2$.

b) la derivada de la función $F(x)$ es $F'(x) = \ln x$. Esta no se anula en el intervalo $[2, 10]$. La derivada es positiva en intervalo citado.

Teniendo en cuenta los hechos anteriores la función $F(x)$ no tiene extremos relativos y si extremos absolutos que se alcanzan en los extremos del intervalo.

Para $F(2) = 0,39$ se obtiene el número de la función y en $F(10) = 14,04$ tiene máximo absoluto.

c) En este caso:

$$F'(x) = \frac{x-1}{1+x^2} \quad ; \quad F''(x) = \frac{1-x^2+2x}{(1+x^2)^2}$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y como } F''(1) > 0 \text{ en } x = 1 \in (0, 2)$$

$F(x)$ alcanza un mínimo relativo.

d) $F'(x) = x \cdot \cos x$

e) $G'(x) = e^{-x^2} (1+x^2)$

f) $F'(x) = e^{-x^2}$; $F''(x) = -2 \cdot e^{-x^2}$; $F'''(x) = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$

Por tanto como $F''(0) = 0$ y $F'''(0) \neq 0$ la función $F(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa 0.

g) $F'(x) = e^{\frac{x^4}{2}} \cdot 2x - e^{\frac{x^2}{2}}$

6. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^6 \frac{4 dx}{\sqrt{x+3}}$

j) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx$

r) $\int_3^5 \frac{\ln x}{x} dx$

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2} dx$

k) $\int_{-1}^1 \frac{4x}{(x^2 + 2)^4} dx$

s) $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^3 x \, dx$

c) $\int_0^8 \frac{3 dx}{\sqrt{1+x}}$

l) $\int_0^4 \sqrt{9+4x} \, dx$

t) $\int_0^b \frac{dx}{x+b}$ con $b > 0$

d) $\int_2^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

m) $\int_0^2 4x^2 (1+x^3)^5 \, dx$

u) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

e) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \sqrt{x}}{3\sqrt{x}} dx$

n) $\int_{-1}^0 x^2 \cdot e^{2x} \, dx$

v) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx$

f) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

ñ) $\int_0^1 (x - e^x \cos x) \, dx$

w) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$

g) $\int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$

o) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$

x) $\int_3^6 \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1} dx$

h) $\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x} dx$

p) $\int_3^6 x \sqrt{x-2} \, dx$

y) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

i) $\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx$

q) $\int_2^3 \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x} dx$

z) $\int_{-1}^1 x^2 \cdot \ln x \, dx$

7. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| \, dx$

c) $\int_{-2}^2 |x^2-1| \, dx$

e) $\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \sin x \, dx$

b) $\int_0^2 x[|x-1|+1] \, dx$

d) $\int_{-2}^2 ||x|-1| \, dx$

f) $\int_0^2 |2x-1| \, dx$

8. Calcula las siguientes integrales mediante la interpretación geométrica:

$I = \int_{-50}^{50} (x^{23} + x^{21}) \, dx$

$J = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 (8x^3 + x) \, dx$

9. Halla el área del recinto limitado por la recta $y = 3x + 2$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. Comprueba el resultado por métodos geométricos.

10. Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - 4x$ y el eje OX .

SOLUCIONES

6. La solución queda:

$$a) \int_1^6 \frac{4 dx}{\sqrt{x+3}}$$

Calculamos la integral indefinida por integrales inmediatas:

$$\int \frac{4 dx}{\sqrt{x+3}} = 4 \int (x+3)^{-\frac{1}{2}} dx = 8\sqrt{x+3} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_1^6 \frac{4 dx}{\sqrt{x+3}} = [8\sqrt{x+3}]_1^6 = 8\sqrt{9} - 8\sqrt{4} = 24 - 16 = 8$$

$$b) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2} dx \text{ operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2} dx &= [\ln(e^x + 2)]_0^1 = \ln(e + 2) - \ln 3 = \\ &= \ln \frac{e + 2}{3} = 0,45 \end{aligned}$$

$$c) \int_0^8 \frac{3}{\sqrt{1+x}} dx \text{ operando de manera análoga a las anteriores, obtenemos:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^8 \frac{3}{\sqrt{1+x}} dx &= 3 \int_0^8 (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx = [6\sqrt{1+x}]_0^8 = \\ &= 6\sqrt{9} - 6\sqrt{1} = 12 \end{aligned}$$

$$d) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} dx \text{ operando de forma análoga, obtenemos:}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} dx &= [\arctan x]_1^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan 1 = \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

$$e) \int_0^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{3\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx =$$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{2}{3} \cdot \cos \sqrt{x} \right]_0^{\pi^2} = \left(-\frac{2}{3} \cos \pi \right) - \left(-\frac{2}{3} \cos 0 \right) = \\ &= \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

f) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ queda:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \int_0^2 \frac{\frac{1}{3} dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \left[\arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + C \right]_0^2 = \\ &= \left[\arcsen\left(\frac{x}{3}\right) \right]_0^2 = \arcsen \frac{2}{3} - \arcsen 0 = 0,73 \end{aligned}$$

g) $\int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$ determinamos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx &= \int \frac{(x+2)(x-1)^2 + 3x-2}{(x-1)^2} dx = \\ &= \int (x+2) dx + \int \frac{3x}{(x-1)^2} dx - \int \frac{2}{(x-1)^2} dx = \frac{(x+2)^2}{2} + \\ &+ 3 \int \frac{x-1+1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{2}{(x-1)^2} dx = \frac{(x+2)^2}{2} + \\ &+ 3 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \frac{(x+2)^2}{2} + 3 \ln|x-1| - \\ &- \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

Determinamos la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2} dx &= \left[\frac{(x+2)^2}{2} + 3 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} \right]_2^3 = \\ &= \left(\frac{25}{2} + 3 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) - (8 + 0 - 1) = 5 + 3 \ln 2 = 7,08 \end{aligned}$$

h) $\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x} dx$ calculamos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^3-x} dx &= \int \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \\ &+ \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| = \\ &= \ln \left| \frac{x^2-1}{x} \right| + C \end{aligned}$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando Barrow, obtenemos la integral definida:

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x} dx &= \left[\ln \left| \frac{x^2-1}{x} \right| \right]_2^5 = \ln \frac{24}{5} - \ln \frac{3}{2} = \\ &= \ln \frac{16}{5} = 1,16 \end{aligned}$$

i) $\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx$ resolvemos la integral indefinida por cambio de variable, haciendo:
 $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$.

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{t^2}{t^2+t} \cdot 2t dt = \int \frac{2t^2}{t+1} dt = \\ &= \int \frac{(2t-2)(t+1)+2}{t+1} dt = \int (2t-2) dt + \int \frac{2}{t+1} dt = \\ &= t^2 - 2t + 2 \ln|t+1| = x - 2\sqrt{x} + 2 \ln|\sqrt{x}+1| + C \end{aligned}$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx = [x - 2\sqrt{x} + 2 \ln|\sqrt{x}+1|]_4^9 = 3,58$$

j) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cdot dx$ calculemos la integral indefinida:

$$\int \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot 2 dx = \frac{1}{2} (-\cos 2x) + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin 2x \cdot dx &= \left[\frac{1}{2} (-\cos 2x) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} (-\cos \pi) - \frac{1}{2} (-\cos 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

k) $\int_{-1}^1 \frac{4x}{(x^2 + 2)^4} dx$ operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{4x}{(x^2 + 2)^4} dx &= 2 \int_{-1}^1 (x^2 + 2)^{-4} \cdot 2x dx = \\ &= \left[\frac{-2}{3(x^2 + 2)^3} \right]_{-1}^1 = \frac{-2}{81} - \frac{-2}{81} = 0 \end{aligned}$$

l) $\int_0^4 \sqrt{9 + 4x} dx$ operando de manera análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \sqrt{9 + 4x} dx &= \frac{1}{4} \int_0^4 (9 + 4x)^{\frac{1}{2}} \cdot 4 dx = \left[\frac{\sqrt{(9 + 4x)^3}}{6} \right]_0^4 = \\ &= \frac{125}{6} - \frac{27}{6} = \frac{49}{3} \end{aligned}$$

m) $\int_0^2 4x^2 (1 + x^3)^5 dx$ operando de manera análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^2 4x^2 (1 + x^3)^5 dx &= \frac{4}{3} \int_0^2 (1 + x^3)^5 \cdot 3x^2 dx = \\ &= \left[\frac{4}{3} (1 + x^3)^6 \right]_0^2 = \left[\frac{2(1 + x^3)^6}{9} \right]_0^2 = 118\,098 - \frac{2}{9} = \\ &= 118\,097,8 \end{aligned}$$

$$n) \int_{-1}^0 x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx$$

Determinamos la integral indefinida por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx &= I \\ u = x^2 &\Rightarrow du = 2x \, dx \\ dv = e^{2x} \cdot dx &\Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo el método a esta última integral:

$$\left. \begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} \cdot dx &\Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left[\frac{x e^{2x}}{2} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \right] = \\ &= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C \end{aligned}$$

Calculamos la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow:

$$\int_{-1}^0 x^2 e^{2x} dx = \left[\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} \right]_{-1}^0 = \left(\frac{1}{4} \right) - \left(\frac{5}{4 e^2} \right) = 0,08$$

$$\tilde{n}) \int_0^1 (x - e^x \cos x) dx = \int x dx - \int e^x \cos x dx = \frac{x^2}{2} - I$$

$$\int (x - e^x \cos x) dx = \int x dx - \int e^x \cos x dx = \frac{x^2}{2} - I$$

La integral $I = \int e^x \cos x dx$ la calculamos por el método de integración por partes:

$$\left. \begin{aligned} u = e^x &\Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx &\Rightarrow v = \sin x \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Aplicando el mismo método a esta última integral, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} u = e^x &\Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx &\Rightarrow v = -\cos x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x - \int -e^x \cos x \, dx \right] = \\
 &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx \Rightarrow \\
 &\Rightarrow I = e^x \sin x + e^x \cos x - I \Rightarrow I = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2}
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int (x - e^x \cos x) \, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando Barrow, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (x - e^x \cos x) \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} \right]_0^1 = \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{e \sin 1 + e \cos 1}{2} \right) - \left(0 - \frac{0 + 1}{2} \right) = \\
 &= 1 - 1,88 = -0,88
 \end{aligned}$$

o) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^3 + 1)} \, dx$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^3 + 1} \, dx &= \int \frac{1/3}{x + 1} \, dx + \int \frac{-1/3 x + 2/3}{x^2 - x + 1} \, dx = \\
 &= \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2 - x + 1} \, dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} \, dx = \\
 &= \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1 + 1}{x^2 - x + 1} \, dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} \, dx = \\
 &= \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \, dx + \\
 &+ \frac{2}{3} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 1/2}{\sqrt{3}/2} \right)^2} \, dx = \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \ln |x^2 - x + 1| + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C
 \end{aligned}$$

Calculamos la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicado la regla de Barrow y obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1} &= \left[\frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \ln |x^2 - x + 1| + \right. \\
 &+ \left. \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} = 0,84
 \end{aligned}$$

p) $\int_3^6 x\sqrt{x-2} \, dx$ resolvemos la integral indefinida por el método de cambio de variable,

haciendo $x-2=t^2 \Rightarrow dx=2t \, dt$.

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-2} \, dx &= \int (t^2+2) \cdot t \cdot 2t \, dt = \int (2t^4+4t^2) \, dt = \\ &= \frac{2t^5}{5} + \frac{4t^3}{3} = \frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3} + C \end{aligned}$$

Haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_3^6 x\sqrt{x-2} \, dx &= \left[\frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3} \right]_3^6 = \\ &= \left(\frac{64}{5} + \frac{32}{3} \right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{3} \right) = \frac{62}{5} + \frac{28}{3} = \frac{326}{15} = 21,7 \end{aligned}$$

q) $\int_2^3 \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x} \, dx$ resolvemos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x} \, dx &= \int \frac{(x^3+x^2-2x)(x-1)+3x^2-6}{x^3+x^2-2x} \, dx = \\ &= \int (x-1) \, dx + \int \frac{3x^2-6}{x(x-1)(x+2)} \, dx = \frac{(x-1)^2}{2} + \int \frac{3}{x} \, dx + \\ &+ \int \frac{-1}{x-1} \, dx + \int \frac{1}{x+2} \, dx = \frac{(x-1)^2}{2} + 3 \ln|x| - \ln|x-1| + \\ &+ \ln|x+2| = \frac{(x-1)^2}{2} + \ln \left| \frac{x^3(x+2)}{x-1} \right| + C \end{aligned}$$

Haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos la integral definida:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x} \, dx &= \left[\frac{(x-1)^2}{2} + \ln \left| \frac{x^3(x+2)}{x-1} \right| \right]_2^3 = \\ &= \left(2 + \ln \frac{135}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \ln 32 \right) = \frac{3}{2} + \ln \frac{135}{64} = 2,25 \end{aligned}$$

r) $\int_3^5 \frac{\ln x}{x} dx$ calculamos la integral indefinida:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow

$$\begin{aligned} \int_3^5 \frac{\ln x}{x} dx &= \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_3^5 = \frac{(\ln 5)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} [(\ln 5 - \ln 3)(\ln 5 + \ln 3)] = \frac{1}{2} \ln 15 \cdot \ln \frac{5}{3} = 0,69 \end{aligned}$$

s) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cdot dx$ calculamos la integral indefinida:

$$\int \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot 2 dx = \frac{1}{2} (-\cos 2x) + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin 2x \cdot dx &= \left[\frac{1}{2} (-\cos 2x) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} (-\cos \pi) - \frac{1}{2} (-\cos 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

t) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x+b}$ con $b > 0$ operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x+b} = [\ln |x+b|]_1^{\sqrt{3}} = \ln |2b| - \ln |b| = \ln \frac{2b}{b} = \ln 2 = 0,69$$

u) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$ obtenemos la integral haciendo el cambio: $x-1=t^2 \Rightarrow dx=2t dt$.

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \int \frac{t}{1+t^2} \cdot 2t dt = \int \frac{2t^2}{1+t^2} = dt =$$

$$= \int \frac{2(1+t^2)-2}{1+t^2} dt = \int 2 dt - \int \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= 2t - 2 \arctan t = 2\sqrt{x-1} - 2 \cdot \arctan \sqrt{x-1} + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow para determinar la integral definida:

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = [2\sqrt{x-1} - 2 \cdot \arctan \sqrt{x-1}]_1^4 =$$

$$= \left(2\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{3} \right) - (0 - 0) = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = 1,37$$

v) $\int_{-1}^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx$ calculamos la integral indefinida por el método de integrales inmediatas y después calculamos la definida haciendo $C = 0$ y aplicando Barrow.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx &= - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = [-\ln |\cos x| + C]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \\ &= \left(-\ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(-\ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

w) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} \, dx$ determinamos la integral indefinida por el método de integrales inmediatas y después la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicando Barrow:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} \, dx &= \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{2x}{x^2-1} \, dx = \left[\frac{1}{2} \ln |x^2-1| + C \right]_2^3 = \\ &= \frac{1}{2} \ln 8 - \frac{1}{2} \ln 3 = \ln \sqrt{\frac{8}{3}} = 0,49 \end{aligned}$$

x) $\int_3^6 \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1} \, dx$ resolvemos la integral mediante el cambio: $2x-3=t^2 \Rightarrow dx=t \, dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1} \, dx &= \int \frac{t}{t-1} \cdot t \, dt = \int \frac{t^2}{t-1} \, dt = \\ &= \int \frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1} \, dt = \int (t+1) \, dt + \int \frac{1}{t-1} \, dt = \\ &= \frac{(t+1)^2}{2} + \ln |t-1| = \\ &= \frac{(\sqrt{2x-3}+1)^2}{2} + \ln |\sqrt{2x-3}-1| + C \end{aligned}$$

Dando a C el valor 0 y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_3^6 \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1} \, dx &= \left[\frac{(\sqrt{2x-3}+1)^2}{2} + \ln |\sqrt{2x-3}-1| \right]_3^6 = \\ &= (8 + \ln 2) - \left[\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} + \ln (\sqrt{3}-1) \right] = 5,27 \end{aligned}$$

y) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$ esta integral no está definida en $[0, 1]$.

Resolvemos la integral indefinida en el campo complejo por el método de cambio de variable,

haciendo $x^2-1=t^2 \Rightarrow dx = \frac{t dt}{x}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \int \frac{t}{x} \cdot \frac{t dt}{x} = \int \frac{t^2}{x^2} dt = \int \frac{t^2}{t^2+1} dt =$$

$$= \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt = \int dt \int \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$= t - \operatorname{arc} \operatorname{tg} t = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x^2-1} + C.$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = [\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x^2-1}]_0^1 = \frac{-\pi \cdot i}{4}$$

z) $\int_{-1}^1 x^2 \cdot \ln x dx$ esta integral no está definida en el intervalo $[-1, 1]$.

7. Las integrales quedan:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x| \, dx &= \int_{-\pi/2}^0 -\operatorname{sen} x \, dx + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = \\ &= [\cos x]_{-\pi/2}^0 + [-\cos x]_0^{\pi/2} = (1 - 0) + (-0 + 1) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^2 x[|x-1| + 1] \, dx &= \int_0^1 (-x^2 + 2x) \, dx + \int_1^2 x^2 \, dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_{-2}^2 |x^2 - 1| \, dx &= 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) \, dx + 2 \int_1^2 (x^2 - 1) \, dx = \\ &= 2[-x^2 + 2x]_0^1 + 2[x^2 - 2x]_1^2 = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_{-2}^2 ||x| - 1| \, dx &= 2 \int_0^1 (-x + 1) \, dx + 2 \int_1^2 (x - 1) \, dx = \\ &= [-x^2 + 2x]_0^1 + [x^2 - 2x]_1^2 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x \, dx &= \int_{-\pi}^0 -x \operatorname{sen} x \, dx + \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} x \, dx = \\ &= [x \cos x - \operatorname{sen} x]_{-\pi}^0 + [-x \cos x + \operatorname{sen} x]_0^{2\pi} = \\ &= -\pi - 2\pi = -3\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int_0^2 |2x - 1| \, dx &= \int_0^{1/2} (-2x + 1) \, dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1) \, dx = \\ &= [-x^2 + 2x]_0^{1/2} + [x^2 - x]_{1/2}^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

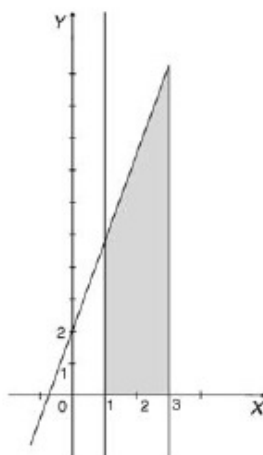
8. Las integrales quedan:

$$I = \int_{-50}^{50} (x^{33} + x^{21}) dx = 0$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5(8x^3 + x) dx = 0$$

Ambas integrales son iguales a cero, pues al ser las funciones impares y simétricas respecto al origen se anulan entre si las áreas de las regiones que se obtienen.

9. El área viene dada por:



El área del recinto sombreado viene dada por:

$$\begin{aligned} \int_1^3 (3x + 2) dx &= \\ &= \left[\frac{3x^2}{2} + 2x \right]_1^3 = \left(\frac{27}{2} + 6 \right) - \left(\frac{3}{2} + 2 \right) = 16 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Directamente este recinto es un trapecio y su area vale:

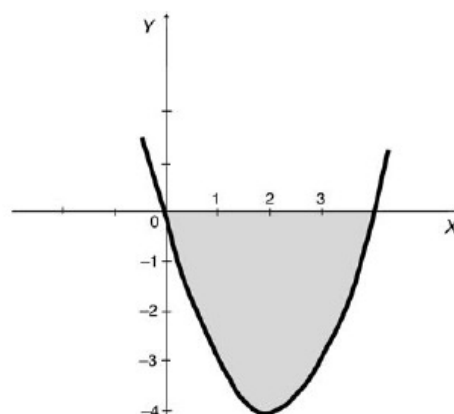
$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{11 + 5}{2} \cdot 2 = 16 \text{ u}^2$$

Con lo que queda comprobado el resultado anterior.

10. Queda:

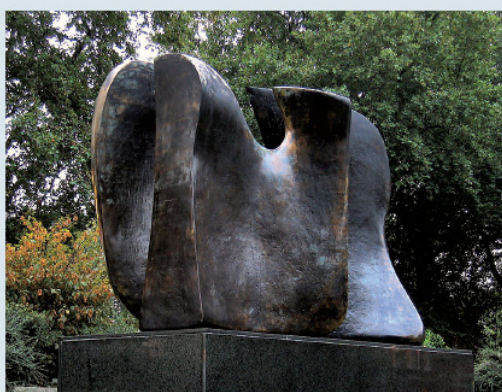
Recinto sombreado:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= - \int_0^4 (x^2 - 4x) dx = - \left[\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \right]_0^4 = \\ &= - \left[\frac{64}{3} - 32 \right] = \frac{32}{3} \text{ u}^2 = 10,7 \text{ u}^2 \end{aligned}$$



ACTIVIDADES FINALES

- 11. Halla el área del recinto limitado por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = -\frac{1}{2}x^2$.
- 12. Halla el área de la región limitada por la curva $y = x^3 - 8x^2 + 7x$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 7$.
- 13. Halla el área del recinto limitado por la curva $y = \cos x$, el eje OX y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.
- 14. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las siguientes funciones:
- | | | |
|---------------|------------------|-------------------|
| a) $y^2 = 6x$ | b) $y^2 = 9x$ | c) $y = 6x - x^2$ |
| $x^2 = 6y$ | $y^2 = 4(x + 1)$ | $y = x^2 - 2x$ |
- 15. Determina el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x e^{-x}$ y $g(x) = x^2 e^{-x}$.
- 16. Calcula el área de la región limitada por la hipérbola $xy = 36$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 6$ y $x = 12$.
- 17. Halla, utilizando la integral definida, el área del círculo limitado por la curva de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ y el área encerrada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 18. Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX los recintos siguientes:
- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = 2x + 1$; $x = 0$, $x = 4$ | c) $f(x) = x - x^2$; $x = 0$, $x = 1$ |
| b) $f(x) = \sin x$; $x = 0$, $x = \pi$ | d) $f(x) = e^x$; $x = 0$, $x = 1$ |
- 19. Calcula el volumen engendrado al girar alrededor de OX los recintos limitados por las gráficas que se indican:
- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$ | c) $f(x) = \sqrt{2x}$; $g(x) = \frac{2x+3}{4}$ |
| b) $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = 1 - x^2$ | d) $f(x) = x^2$; $g(x) = -3x - 2$ |
- 20. Halla el volumen de la región determinada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$, el eje OX , el eje OY y la recta $x = 3$, al girar alrededor de OX .
- 21. Halla el volumen generado al girar alrededor del eje OX el recinto plano determinado por dicho eje y la curva $y = x - x^3$.
- 22. A partir de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, obtén el volumen de una esfera.
- 23. Calcula el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa al eje OX .

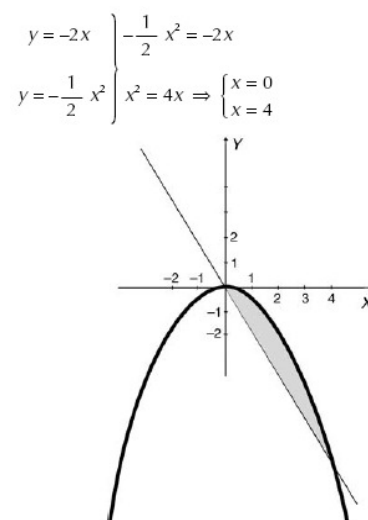


SOLUCIONES

11. Queda:

Queremos calcular el area del recinto sombreado:

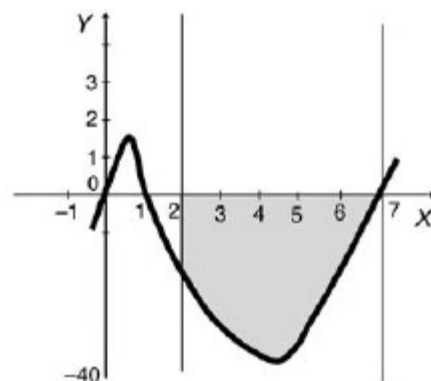
$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_0^4 \left[\left(-\frac{1}{2}x^2 \right) - (-2x) \right] dx = \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{6} \right]_0^4 = 16 - \frac{64}{6} = 5,3 \text{ u}^2\end{aligned}$$



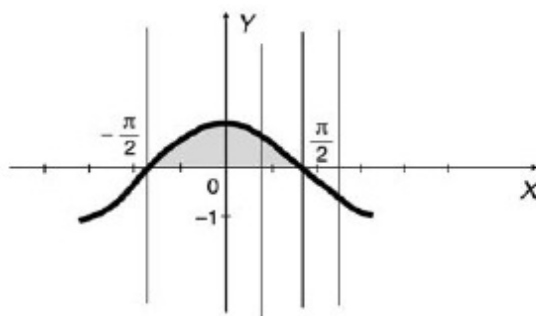
12. La solución es:

El área pedida es la del recinto sombreado.

$$\begin{aligned}\text{Área} &= -\int_2^7 (x^3 - 8x^2 + 7x) dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} \right]_2^7 = \\ &= -\left[\left(\frac{2401}{4} - \frac{2744}{3} + \frac{343}{2} \right) - \left(4 - \frac{64}{3} + 14 \right) \right] = \\ &= 139,58 \text{ u}^2\end{aligned}$$



13. Queda:

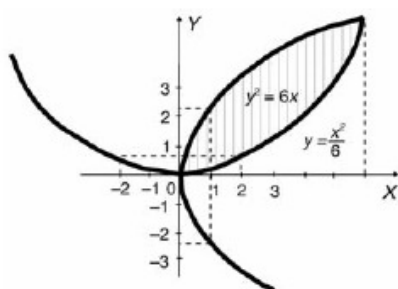


El área del recinto limitado por la curva, el eje OX y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$ vale:

$$\text{Área} = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 2 [\sin x]_0^{\pi/2} = 2 \text{ u}^2$$

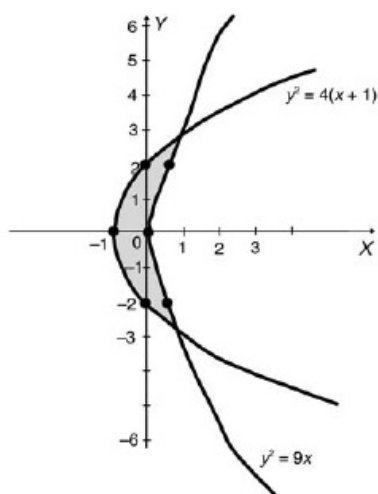
14. La solución queda:

a)



$$\text{Área} = \int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6} \right) dx = \left[\frac{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{18} \right]_0^6 = 12 \text{ u}^2$$

b)



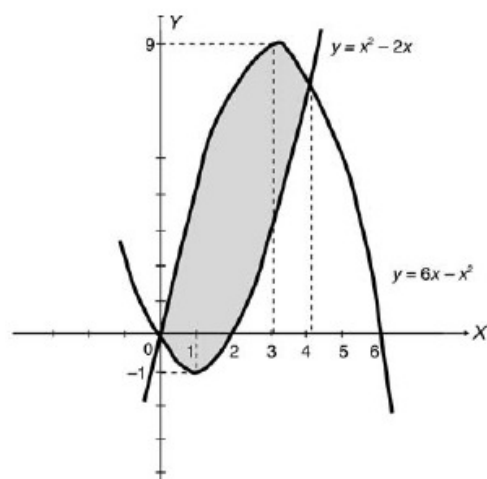
Las curvas $y^2 = 9x$; $y^2 = 4(x+1)$ se cortan en los puntos de abscisa $x = 0,8$ pues:

$$9x = 4(x+1) \Rightarrow x = \frac{4}{5} = 0,8$$

El área pedida es la de la zona sombreada y vale:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \left[\int_{-1}^{0,8} 2\sqrt{x+1} \, dx - \int_0^{0,8} 3\sqrt{x} \, dx \right] = \\ &= 2 \left[\frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3} \right]_{-1}^{0,8} - 2 \left[2\sqrt{x^3} \right]_0^{0,8} = \\ &= \frac{8\sqrt{1,8^3}}{3} - 4\sqrt{0,8^3} = 3,58 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

c)



Estas curvas se cortan en los puntos solución del sistema:

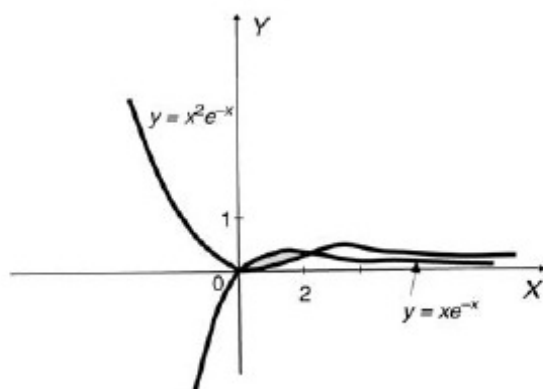
$$\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & y = 0 & P(0, 0) \\ x = 4 & y = 8 & Q(4, 8) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^0 (x^2 - 2x) dx + \int_0^4 (6x - x^2) dx - \int_2^4 (x^2 - 2x) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^0 + \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^4 = \\ &= \left(\frac{-8}{3} + 4 \right) + \left(48 - \frac{64}{3} \right) - \left[\left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \right] = \\ &= \frac{-8}{3} + 4 + 48 - \frac{64}{3} - \frac{64}{3} + 16 + \frac{8}{3} - 4 = \\ &= 64 - \frac{128}{3} = 21,3 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Otra forma de hallar el area del recinto buscado:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^4 (8x - 2x^2) dx = \\ &= \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^4 = 64 - \frac{128}{3} = 21,3 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

15. La solución es:



Las curvas se cortan en $x = 0$ y $x = 1$. Calculamos el área de la zona sombreada.

$$\text{Área} = \int_0^1 (x e^{-x} - x^2 e^{-x}) dx = \int_0^1 (x - x^2) e^{-x} dx$$

Resolvemos por el método de integración por partes la integral indefinida:

$$\left. \begin{aligned} \int (x - x^2) e^{-x} dx \\ u = x - x^2 \Rightarrow du = (1 - 2x) dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int (x - x^2) e^{-x} dx = -(x - x^2) e^{-x} - \int -(1 - 2x) e^{-x} dx = \\ &= (x^2 - x) e^{-x} + \int (1 - 2x) e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} u = 1 - 2x \Rightarrow du = -2 dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int (x - x^2) e^{-x} dx = (x - x^2) e^{-x} - (1 - 2x) e^{-x} - \\ &- \int 2 e^{-x} dx = (x^2 - x) e^{-x} - (1 - 2x) e^{-x} + 2 e^{-x} + C \end{aligned}$$

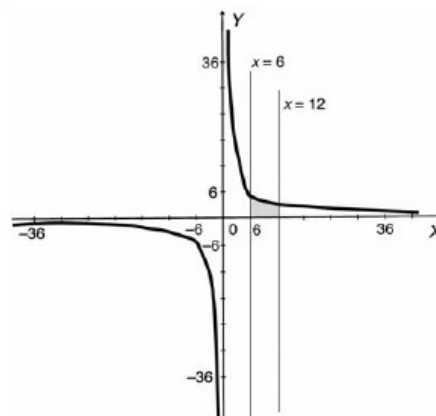
Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida que nos permite calcular el área pedida:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= [(x^2 - x) e^{-x} - (1 - 2x) e^{-x} + 2 e^{-x}]_0^1 = \\ &= \frac{3}{e} - 1 = 0,1036 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

16. La solución es:

El área del recinto sombreado buscado vale:

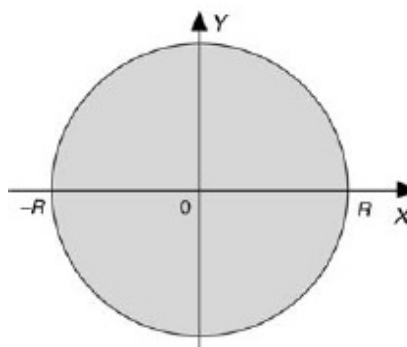
$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_6^{12} \frac{36}{x} dx = [36 \ln x]_6^{12} = 36 \ln \frac{12}{6} = \\ &= 36 \ln 2 = 24,95 \text{ u}^2\end{aligned}$$



17. La solución:

El círculo de radio R queda limitado por la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 = R^2$

$$\text{Área} = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$



Calculamos la integral indefinida $\int \sqrt{R^2 - x^2} dx$ mediante el cambio de variable:

$$x = R \cdot \sin t \Rightarrow dx = R \cdot \cos t \cdot dt$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{R^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} \cdot R \cdot \cos t \cdot dt = \\ &= \int R^2 \cdot \cos^2 t \cdot dt = R^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= R^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + C = \\ &= R^2 \left(\frac{\arcsin \frac{x}{R}}{2} + \frac{2 \cdot \frac{x}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}}{4} \right) + C\end{aligned}$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida que nos da el área del círculo buscado:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = \\ &= \left[4R^2 \left(\frac{\arcsin \frac{x}{R}}{2} + \frac{2 \cdot \frac{x}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}}{4} \right) \right]_0^R = \\ &= 4R^2 \left[\left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) - (0 + 0) \right] = (\pi R^2) u^2\end{aligned}$$

- La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ encierra un recinto cuya área vale:

$$\text{Área} = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} \, dx$$

Calculamos la integral indefinida

$$\int \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} \, dx$$

Por el método de cambio de variable, para ello hacemos $x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t \, dt$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a} \sqrt{a^2 b^2 - b^2 x^2} \, dx &= \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t \, dt = \\ &= \frac{b}{a} \int a^2 \cos^2 t \, dt = ab \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \\ &= \frac{ab}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C \\ &= \frac{ab}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + C\end{aligned}$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida que nos da el área encerrada por la elipse dada:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} \, dx \\ &= \left[\frac{4ab}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \right]_0^a = \\ &= 2ab \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - 2ab(0 - 0) = (ab \cdot \pi) u^2\end{aligned}$$

18. Los volúmenes son:

$$\begin{aligned} \text{a) } V &= \pi \int_0^4 (2x+1)^2 dx = \pi \int_0^4 (4x^2 + 4x + 1) dx = \\ &= \pi \left[\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x \right]_0^4 = \frac{364\pi}{3} u^3 \end{aligned}$$

$$\text{b) } V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} u^3$$

$$\begin{aligned} \text{c) } V &= \pi \int_0^1 (x-x^2)^2 dx = \pi \left[\left(\frac{6x^5 - 15x^4 + 10x^3}{30} \right) \right]_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{30} u^3 \end{aligned}$$

19. Los volúmenes quedan:

$$\text{a) } V = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{\pi x^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{\pi x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } V &= 2\pi \int_0^1 (x^2-1)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \\ &= 2\pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } V &= \pi \int_{0,5}^{4,5} 2x dx - \pi \int_{0,5}^{4,5} \left(\frac{2x+3}{4} \right)^2 dx = [\pi x^2]_{0,5}^{4,5} - \\ &- \pi \left[\frac{x^3}{12} + \frac{3x^2}{8} + \frac{9x}{16} \right]_{0,5}^{4,5} = 20\pi - 17,33\pi = 2,67\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } V &= \pi \int_{-2}^{-1} (-3x-2)^2 dx - \pi \int_{-2}^{-1} x^4 dx = \\ &= \pi \int_{-2}^{-1} (9x^2 + 12x + 4) dx - \pi \int_{-2}^{-1} x^4 dx = \\ &= \pi [3x^3 + 6x^2 + 4x]_{-2}^{-1} - \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{-1} = \\ &= 7\pi - \frac{\pi \cdot 31}{5} = \frac{4\pi}{5} \end{aligned}$$

20. El volumen es:

$$V = \pi \int_0^3 e^{-2x} dx = \pi \left[\frac{-e^{-2x}}{2} \right]_0^3 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-6}}{2} \right) \approx \frac{\pi}{2}$$

21. El volumen es:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (x - x^3)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - 2x^4 + x^6) dx = \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{16\pi}{105} \end{aligned}$$

22. el volumen de la esfera es:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \\ &= 2\pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = 2\pi \frac{2R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

23. el volumen del elipsoide es:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^5 \left(1 - \frac{x^2}{25} \right) dx = 2\pi \left[x - \frac{x^3}{75} \right]_0^5 = 2\pi \cdot \frac{10}{3} = \\ &= \frac{20\pi}{3} \end{aligned}$$

SOLUCIONES

24. La suma superior es:

$$S(P) = [-2 - (-3)] \cdot 8 + [-1 - (-2)] \cdot 3 + [1 - (-1)] \cdot 0 + (2 - 1) \cdot 3 = 8 + 3 + 0 + 3 = 14.$$

La suma inferior es:

$$s(P) = [-2 - (-3)] \cdot 3 + [-1 - (-2)] \cdot 0 + [1 - (-1)] \cdot 0 + (2 - 1) \cdot 0 = 3 + 0 + 0 + 0 = 3.$$

25. Aplicando este teorema obtenemos :

$$\int_0^1 x^2 dx = c^2 \cdot (1 - 0) \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Como } c \in (0, 1) \Rightarrow \text{el valor buscado es } c = + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

26. La solución en cada caso es:

La primera derivada es:

$$F'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x = 2xe^{-x^4}$$

La segunda derivada es:

$$F''(x) = (2 - 8x^4)e^{-x^4}$$

27. La solución es:

a) La derivada es:

$$F'(x) = \cos x^2$$

b) El límite produce una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicando la regla de L'Hopital obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = \cos 0 = 1$$

28. Las derivadas de la función son:

$$F'(x) = (x^4 - 1) \cdot 2x \Rightarrow F'(x) = 2x^5 - 2x$$

$$F''(x) = 10x^4 - 2$$

La primera derivada se anula y obtenemos:

$$F'(x) = 0 \Rightarrow 2x^5 - 2x = 0 \Rightarrow x = -1, x = 0, x = 1$$

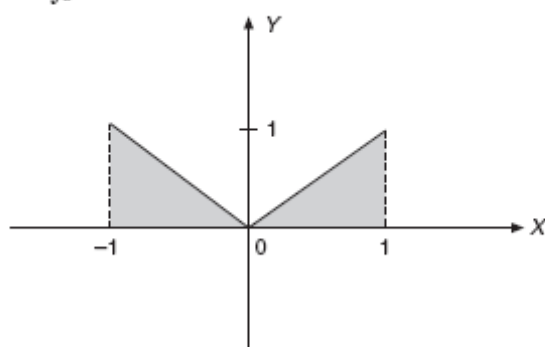
En el punto $(-1, 0)$, al ser $F''(-1) = 8 > 0$ existe un mínimo relativo.

En el punto $(1, 0)$, al ser $F''(1) = 8 > 0$ existe un mínimo relativo.

En el punto $(0, 2/3)$, al ser $F''(0) = -2 < 0$, existe un máximo relativo.

29. Tenemos que:

$$\int_{-1}^1 |x| = 2 \int_0^1 x \, dx = [x]_0^1 = 1.$$



30. En cada caso queda:

a) haciendo el cambio $e^x = t$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 2} \, dx &= \int_1^e \frac{1}{t^2 + t + 2} \, dt = \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \int_1^e \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}t + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \, dt = \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{7} \left[\arctan \left(\frac{2}{\sqrt{7}}t + \frac{1}{\sqrt{7}} \right) \right]_1^e = \frac{2\sqrt{7}}{7} (1,18 - 0,85) = 0,249 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx = [x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x]_0^\pi = -2\pi$$

c) Haciendo el cambio de variable $1 + x^2 = t^2$, obtenemos:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{1 + x^2} \, dx = \int_1^2 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

31. La solución es:

$$\begin{aligned} \int_1^b |x-1| \cos x \, dx &= \int_0^1 -(x-1) \cdot \cos x \cdot dx + \\ &+ \int_1^b (x-1) \cdot \cos x \cdot dx = \int_0^1 -(x-1) \cdot \cos x \cdot dx + \\ &+ \int_1^b (x-1) \cdot \cos x \cdot dx \end{aligned}$$

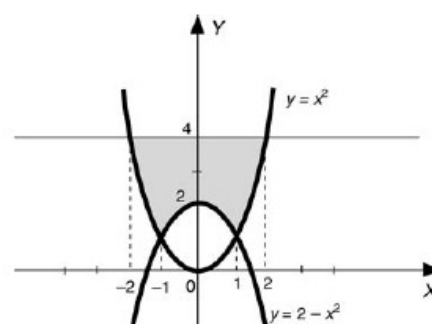
Calculamos la integral indefinida por el método de integración por partes:

$$\begin{aligned} I &= \int (x-1) \cdot \cos x \cdot dx \\ &\quad \left. \begin{aligned} u &= x-1 \Rightarrow du = dx \\ dv &= \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \sin x \end{aligned} \right\} \\ I &= \int (x-1) \cdot \cos x \cdot dx = (x-1) \sin x - \int \sin x \cdot dx = \\ &= (x-1) \cdot \sin x + \cos x + C \\ \int_0^b |x-1| \cos x \cdot dx &= -[(x-1) \sin x + \cos x]_0^1 + \\ &+ [(x-1) \sin x + \cos x]_1^b = -\cos 1 + 1 + \\ &+ [(b-1) \sin b + \cos b - \cos 1] = 1 + (b-1) \sin b + \\ &+ \cos b - 2 \cos 1 \end{aligned}$$

32. El área es:

La zona sombreada es la región de plano limitada por las curvas dadas.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \left[\int_0^1 4 - (2 - x^2) \, dx + \int_1^2 (4 - x^2) \, dx \right] = \\ &= 2 \left[2x + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{14}{3} + \frac{10}{3} = 8 \, u^2 \end{aligned}$$

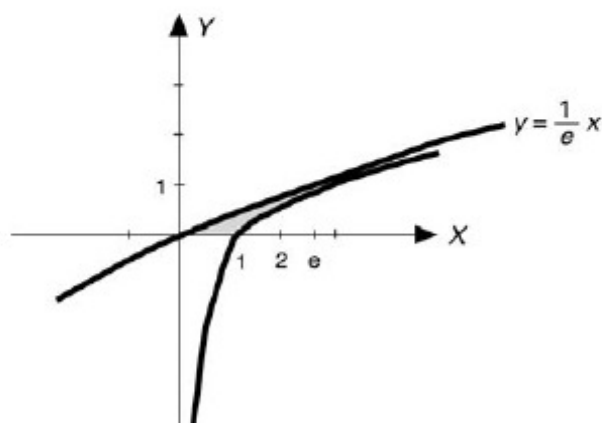


33. Ecuación de la recta tangente a $f(x) = \ln x$, en el punto $(e, 1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow m = \frac{1}{e}$$

$$y - 1 = \frac{1}{e} (x - e) \Rightarrow y = \frac{1}{e} x \Rightarrow$$

la recta tangente tiene por ecuación $y = \frac{1}{e} x$



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^e \left(\frac{1}{e} x - \ln x \right) dx = \left[\frac{x^2}{2e} - (x \ln x - x) \right]_0^e = \\ &= \frac{3e}{2} - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \frac{3e}{2} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{3e}{2} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \frac{3e}{2}$$

34. La solución es:

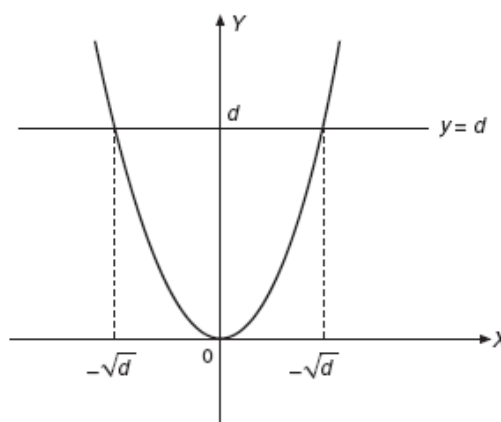
Llamando d a la distancia buscada, se cumple:

$$36 = 2 \left\{ d\sqrt{d} - \int_0^{\sqrt{d}} x^2 dx \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = d\sqrt{d} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{d}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = d\sqrt{d} - \frac{d\sqrt{d}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = \frac{2d\sqrt{d}}{3} \Leftrightarrow d = 3$$



A una distancia de 3 unidades.

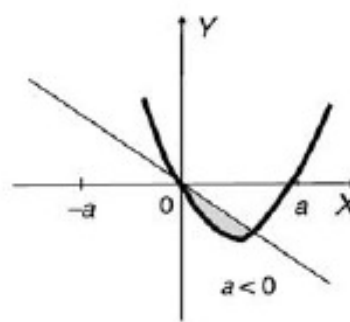
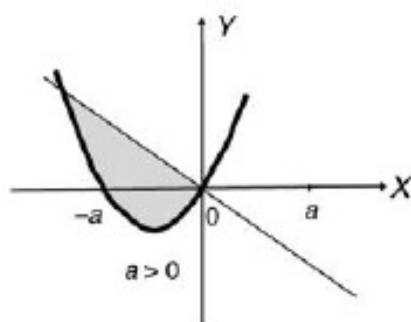
35. La parábola y la recta se cortan en los puntos:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 + ax \\ y + x = 0 \end{array} \right\} x^2 + ax = -x \Rightarrow x^2 + x(a + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = -a - 1; y = a + 1 \end{cases}$$

$$\text{Área pedida} = \left| \int_0^{-a-1} [-x - (x^2 + ax)] dx \right|$$

Ponemos el valor absoluto, pues el área puede ser diferente según sea $a > 0$ o $a < 0$.



La integral se resuelve del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_0^{-a-1} [-x - (x^2 + ax)] dx \right| = \\
 &= \left| \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^{-a-1} \right| = \\
 &= \left| -\frac{(-a-1)^2}{2} - \frac{(-a-1)^3}{3} - \frac{a(-a-1)^2}{2} \right| = \\
 &= \left| \frac{-a^3 - 3a^2 - 3a - 1}{6} \right| = \left| -\frac{(a+1)^3}{6} \right|
 \end{aligned}$$

Como el área es 36, entonces:

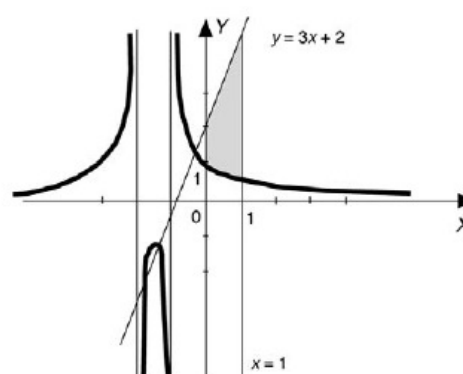
$$\begin{aligned}
 \left| -\frac{(a+1)^3}{6} \right| &= 36 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-(a+1)^3}{6} = 36 \Rightarrow a+1 = -6 \Rightarrow a = -7 \\ \frac{-(a+1)^3}{6} = -36 \Rightarrow a+1 = 6 \Rightarrow a = 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Las soluciones son: $\boxed{a = -7}$ o $\boxed{a = 5}$

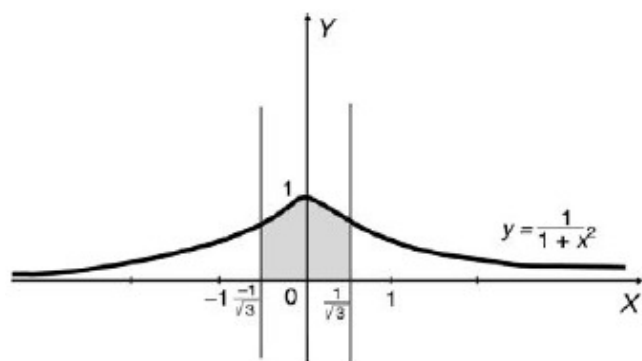
36. La superficie viene dada del siguiente modo:

El área de la zona sombreada viene dada por:

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_0^1 (3x+2) - \left(\frac{2}{x^2+3x+2} \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left(3x+2 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx = \\
 &= \left[\frac{3x^2}{2} + 2x - 2 \ln |x+1| + 2 \ln |x+2| \right]_0^1 = \\
 &= \frac{3}{2} + 2 - 4 \ln 2 + 2 \ln 3 = \frac{7}{2} + \ln \frac{9}{16} = 2,92
 \end{aligned}$$



37. La superficie viene dada del siguiente modo:



Hallamos los puntos de inflexión:

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad y'' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{6} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Los puntos de inflexión son:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4} \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= 2 \left[\arctan x \right]_0^{1/\sqrt{3}} = 2 \left[\frac{\pi}{6} - 0 \right] = \frac{\pi}{3} = 1,046 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES FINALES

- 38. Calcula el valor de la integral $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.
- 39. Sea la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Determina:
- El área encerrada entre su gráfica, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.
 - El área encerrada entre la tangente en $x = \pi$ y los ejes coordenados.
- 40. Encuentra un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que:
- Tiene un máximo relativo en $x = 1$.
 - Tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$.
 - Se verifica $\int_0^1 p(x) dx = \frac{5}{4}$.
- 41. Halla todos los valores de a para los cuales $\int_0^a \frac{16}{15 + 2x - x^2} dx = \ln 25$.
- 42. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:
- Calcula $\int_0^2 f(x) dx$.
 - Halla la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que cumple $F(1) = 1$.
- 43. Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza la gráfica de $f(x)$ y calcula $\int_1^3 x f(x) dx$.
- 44. Sea la función $f(x)$ definida y continua en $[-2, 2]$ tal que:
- $$\int_{-2}^{-1} f(t) dt = \int_1^2 f(t) dt$$
- Utilizando el teorema del valor medio, ¿se puede asegurar que existen b y c en $[-2, 2]$ de modo que $f(b) = f(c)$ con $b \leq -1$ y $c \geq 1$?
- 45. Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda de la misma que une los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$.
- 46. Dada la función $F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ definida para $x \geq 1$, halla los valores de x en los cuales alcanza sus extremos relativos.
- 47. Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$ tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2x f'(x) dx = 1$. Mediante la integración por partes calcula $\int_0^1 f(x) dx$.
- 48. Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a , b y c de modo que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 0$, la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = 1$ sea paralela a la recta $y = 4x$, y el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ sea igual a 1.
- 49. Estudia la monotonía y la curvatura de la función: $F(x) = \int_0^x (t^2 - 1) \cdot e^{-t} dt$.



SOLUCIONES

38. Haciendo la integral definida por partes obtenemos:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right)_1^e = 1 - \frac{2}{e} = 0,2642$$

39. La solución es:

a) El área = $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot dx = (-x \cos x + \sin x)_0^{\pi} = \pi$ unidades cuadradas.

b) la recta tangente en el punto dado tiene por ecuación $y = \pi(x - \pi)$

El área buscada es: Área = $\int_{\pi}^0 \pi(x - \pi) dx = \frac{\pi^3}{2} = 15,50314$ unidades cuadradas.

40. Imponiendo las condiciones del enunciado al polinomio tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ b = 0 \\ d = 1 \\ \frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \text{de donde obtenemos que } a = -\frac{1}{5}; b = 0; c = \frac{3}{5}; d = 1$$

Por tanto el polinomio es $P(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1$

41. Resolvemos esta integral por descomposición en fracciones simples y obtenemos:

$$\int_0^a \frac{16}{15 + 2x - x^2} dx = \left[\ln \left(\frac{x+3}{x-5} \right) \right]_0^a = \ln \left(\frac{5(a+3)}{-3(a-5)} \right)^2$$

Igualando esta expresión a la que nos da el enunciado obtenemos que a puede tomar valores 3 y 9.

42. La solución es:

a) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}} dx = \left[\frac{\sqrt{5x^2 - 4}}{5} \right]_0^2 = \frac{4-2i}{5}$ no tiene soluciones reales.

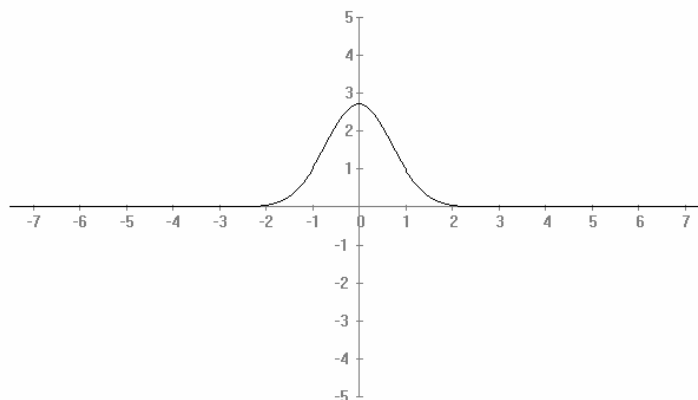
b) todas las primitivas son de la forma $\frac{\sqrt{5x^2 - 4}}{5} + C$ imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos que la primitiva buscada es $F(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - 4}}{5} + \frac{4}{5}$

43. La función dada es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $(0, e)$ y dos puntos de inflexión en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{\frac{1}{2}}\right)$.

Tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$.

Su gráfica es:



Calculamos la integral pedida:
$$\int_1^3 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_1^3 x \cdot e^{1-x^2} \cdot dx = \left[\frac{e^{1-x^2}}{-2} \right]_1^3 = \frac{e-1}{2e^8} = 0,5$$

44. En cada caso diremos:

- $f(x)$ es continua en $[-2, -1]$, por lo que aplicando el teorema del valor medio tenemos que $\exists b \in [-2, -1]$ tal que: $\int_{-2}^{-1} f(t) dt = f(b)(-1+2) = f(b)$
- $f(x)$ es continua en $[1, 2]$, por lo que aplicando el teorema del valor medio tenemos que $\exists c \in [1, 2]$ tal que: $\int_1^2 f(t) dt = f(c)(2-1) = f(c)$

De ambas igualdades concluimos que $f(b) = f(c)$ con $b \leq -1$ y $c \geq 1$

45. La solución queda:

La cuerda tiene por ecuación $y - e = \frac{e^2 - 1}{2e}(x - 1)$

Calculamos el área:
$$\int_{-1}^e \left[e + \frac{e^2 - 1}{2e}(x - 1) - e^x \right] dx = \frac{2}{e} = 0,74$$

46. La solución es:

Aplicando el teorema fundamental del calculo integral obtenemos: $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$

Por lo que las abscisas de sus extremos relativos en un periodo son:

Máximo relativo en $x = \frac{\pi}{2}$ y mínimo relativo en $x = \frac{3\pi}{2}$.

47. La solución es:

Aplicando la integración por partes obtenemos: $\int_0^1 f(x)dx = [x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot f'(x)dx = f(1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

48. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\begin{cases} b = 0 \\ 3 + 2a + b = 4 \text{ de donde } a = \frac{1}{2}; b = 0; c = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + c = 1 \end{cases}$$

49. La solución queda:

Aplicando el teorema fundamental del calculo integral obtenemos:

$$F'(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x^2} \quad y \quad F''(x) = (4x - 2x^3) \cdot e^{-x^2}$$

La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 1)$

La función es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$

La función es cóncava hacia las y negativas en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$