

***2º de Bachillerato
Ciencias***

Matemáticas II

***Ejercicios
de
integrales resueltos
(Solucionario libro)***

Colegio Maravillas

Recopilados por: Teresa González

1.-

Calcula estas integrales de funciones trigonométricas.

a) $\int \operatorname{sen} 2x \, dx$

c) $\int \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{2} \, dx$

b) $\int \cos (x+1) \, dx$

d) $\int \operatorname{sen} (-x) \, dx$

a) $\int \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{-\cos 2x}{2} + k$

b) $\int \cos (x+1) \, dx = \operatorname{sen} (x+1) + k$

c) $\int \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx = -\cos \frac{x}{2} + k$

d) $\int \operatorname{sen} (-x) \, dx = -\int -\operatorname{sen} (-x) \, dx = \cos (-x) + k$

2.-

Resuelve estas integrales de tipo funciones arco.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} \, dx$

b) $\int \frac{1}{1+(x-3)^2} \, dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} \, dx = \frac{1}{5} \int \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}} \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} 5x + k$

b) $\int \frac{1}{1+(x-3)^2} \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x-3) + k$

3.-

Halla la solución de las siguientes integrales.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} \, dx$

b) $\int \frac{x}{1+9x^4} \, dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} (2x-3) + k$

b) $\int \frac{x}{1+9x^4} \, dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{1+(3x^2)^2} \, dx = \frac{1}{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (3x^2) + k$

4.-

Halla estas integrales integrando por partes.

a) $\int x^2 \ln x \, dx$

b) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + k \\ &\quad \begin{array}{l} \text{u} = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = x^2 \, dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x \, dx = \\ &\quad \begin{array}{l} \text{u} = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\cos x \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{u} = 2x \rightarrow du = 2 \, dx \\ dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{array} \\ &= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + k \end{aligned}$$

5.-

Utiliza la integración por partes para calcular:

a) $\int e^x (7 + 2x) \, dx$

b) $\int (4x^2 - 3x + 1) \cos x \, dx$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int e^x (7 + 2x) \, dx &= (7 + 2x)e^x - \int 2e^x \, dx = (7 + 2x)e^x - 2e^x + k = e^x(5 + 2x) + k \\ &\quad \begin{array}{l} \text{u} = 7 + 2x \rightarrow du = 2 \, dx \\ dv = e^x \, dx \rightarrow v = e^x \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int (4x^2 - 3x + 1) \operatorname{sen} x \, dx &= -(4x^2 - 3x + 1) \cos x + \int (8x - 3) \cos x \, dx = \\ &\quad \begin{array}{l} \text{u} = 4x^2 - 3x + 1 \rightarrow du = (8x - 3) \, dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\cos x \end{array} \\ &= -(4x^2 - 3x + 1) \cos x + (8x - 3) \operatorname{sen} x - \int 8 \operatorname{sen} x \, dx = \\ &\quad \begin{array}{l} \text{u} = 8x - 3 \rightarrow du = 8 \, dx \\ dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{array} \\ &= -(4x^2 - 3x + 1) \cos x + (8x - 3) \operatorname{sen} x + 8 \cos x + k \end{aligned}$$

6.-

Resuelve esta integral racional:

$$\int \frac{4x^2 - 2x}{(x+2)(x-3)^2} dx$$

$$\int \frac{4x^2 - 2x}{(x+2)(x-3)^2} dx = \int \left(\frac{6}{(x-3)^2} + \frac{\frac{16}{5}}{x-3} + \frac{\frac{4}{5}}{x+2} \right) dx =$$

$$= 6 \int \frac{1}{(x-3)^2} dx + \frac{16}{5} \int \frac{1}{x-3} dx + \frac{4}{5} \int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= -\frac{6}{x-3} + \frac{16}{5} \ln|x-3| + \frac{4}{5} \ln|x+2| + k$$

7.-

Calcula las integrales racionales.

a) $\int \frac{2x+1}{x^4-5x^2+4} dx$

b) $\int \frac{7x-2}{x^3-2x^2-x+2} dx$

a) $\int \frac{2x+1}{x^4-5x^2+4} dx = \int \left(\frac{\frac{5}{12}}{x-2} + \frac{\frac{-1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{6}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+2} \right) dx =$

$$= \frac{5}{12} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= \frac{5}{12} \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + k$$

b) $\int \frac{7x-2}{x^3-2x^2-x+2} dx = \int \left(\frac{4}{x-2} + \frac{\frac{-5}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-3}{2}}{x+1} \right) dx =$

$$= 4 \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{5}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= 4 \ln|x-2| - \frac{5}{2} \ln|x-1| - \frac{3}{2} \ln|x+1| + k$$

8.-

Calcula la integral racional:

$$\int \frac{-x^2 + 7x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

$$\int \frac{-x^2 + 7x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \int \left(\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{x+1} \right) dx =$$

$$= 3 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= -\frac{3}{x-1} + \ln|x-1| - 2 \ln|x+1| + k$$

9.-

Calcula las integrales racionales.

a) $\int \frac{-2x^2 + 1}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} dx$

b) $\int \frac{x-2}{x^4} dx$

a) $\int \frac{-2x^2 + 1}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} dx = \int \left(\frac{-7}{(x+2)^3} + \frac{8}{(x+2)^2} + \frac{-2}{x+2} \right) dx =$

$$= -7 \int \frac{1}{(x+2)^3} dx + 8 \int \frac{1}{(x+2)^2} dx - 2 \int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= \frac{7}{2(x+2)^2} - \frac{8}{x+2} - 2 \ln|x+2| + k$$

b) $\int \frac{x-2}{x^4} dx = \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{-2}{x^4} \right) dx = \int \frac{1}{x^3} dx - 2 \int \frac{1}{x^4} dx = \frac{-1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} + k$

10.-

Resuelve estas integrales racionales.

a) $\int \frac{2}{x^2 + 1} dx$

b) $\int -\frac{3x-2}{2+x^2} dx$

a) $\int \frac{2}{x^2 + 1} dx = 2 \arctan x + k$

b) $\int -\frac{3x-2}{2+x^2} dx = \int -\frac{3x}{2+x^2} dx + \int \frac{2}{2+x^2} dx =$

$$= -\frac{3}{2} \ln|2+x^2| + \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + k$$

11.-

Resuelve estas integrales racionales.

a) $\int \frac{2x^4}{(x-1)^3} dx$

b) $\int -\frac{3x^3-2}{(2-x)^2} dx$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{2x^4}{(x-1)^3} dx &= \int \left(2x + 6 + \frac{12}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx = \\ &= x^2 + 6x + 12 \ln|x-1| - \frac{8}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int -\frac{3x^3-2}{(2-x)^2} dx &= \int \left(-3x - 12 + \frac{-22}{2-x} + \frac{-36}{(2-x)^2} \right) dx = \\ &= \frac{-3x^2}{2} - 12x + 22 \ln|2-x| - \frac{36}{2-x} + k \end{aligned}$$

12.-

Calcula estas integrales mediante un cambio de variable.

a) $\int x^2(7+2x^3) dx$

b) $\int \frac{\log^5 x}{x} dx$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int x^2(7+2x^3) dx &= \frac{1}{6} \int t dt = \frac{t^2}{12} + k = \frac{(7+2x^3)^2}{12} + k \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ t = 7+2x^3 \\ dt = 6x^2 dx \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{\log^5 x}{x} dx &= \ln 10 \int t^5 dt = \ln 10 \cdot \frac{t^6}{6} + k = \ln 10 \cdot \frac{\log^6 x}{6} + k \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ t = \log x \\ dt = \frac{1}{\ln 10 \cdot x} dx \end{array} \end{aligned}$$

13.-

Calcula las integrales racionales.

a) $\int \frac{-2x^5 + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} dx$

b) $\int \frac{x^6 - 1}{x^2(x^2 + 1)(x - 1)} dx$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{-2x^5 + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} dx &= \int \left(-2x + \frac{\frac{-1}{4}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{-9}{4}}{x-1} + \frac{\frac{3}{4}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{-7}{4}}{x+1} \right) dx = \\ &= \int -2x dx + \int \frac{\frac{-1}{4}}{(x-1)^2} dx + \int \frac{\frac{-9}{4}}{x-1} dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{(x+1)^2} dx + \int \frac{\frac{-7}{4}}{x+1} dx \\ &= -x^2 + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{9}{4} \ln|x-1| - \frac{3}{4(x+1)} - \frac{7}{4} \ln|x+1| + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{x^6 - 1}{x^2(x^2 + 1)(x - 1)} dx &= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2 + 1} + \frac{-1}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| - \arctg x + k \end{aligned}$$

14.-

Halla las integrales con un cambio de variable.

a) $\int e^{x^2} (2x^3 + 2x) dx$

b) $\int \frac{4x}{\sqrt{2-3x^2}} dx$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int e^{x^2} (2x^3 + 2x) dx &= \int (e^t t + e^t) dt = \int e^t t dt + \int e^t dt = \int e^t t dt + e^t = \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= te^t - \int e^t dt + e^t = te^t + k = x^2 e^{x^2} + k \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ u = t \rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \rightarrow v = e^t \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{4x}{\sqrt{2-3x^2}} dx &= \frac{-2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{-4\sqrt{t}}{3} + k = \frac{-4\sqrt{2-3x^2}}{3} + k \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ t = 2-3x^2 \\ dt = -6x dx \end{array} \end{aligned}$$

15.-

Calcula estas integrales.

a) $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$

b) $\int \sqrt{4 - x^2} \, dx$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx &= - \int (1 - t^2)^2 t^2 \, dt = - \int (t^6 - 2t^4 + t^2) \, dt = \\
 &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ t = \cos x \\ dt = -\operatorname{sen} x \, dx \end{array} \\
 &= -\frac{t^7}{7} + \frac{2t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + k = -\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + k \\
 \text{b) } \int \sqrt{4 - x^2} \, dx &= 2 \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \, dx = 2 \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cdot 2 \cos t \, dt = 4 \int \cos^2 t \, dt = \\
 &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \frac{x}{2} = \operatorname{sen} t \\ dx = 2 \cos t \, dt \end{array} \\
 &= 4 \int \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = 2t + 2 \operatorname{sen} 2t + k = \\
 &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 2 \operatorname{sen} 2 \left(\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) + k = \\
 &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 2 \cdot \frac{x}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + k = \\
 &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + k
 \end{aligned}$$

16.-

Halla la solución de las integrales.

a) $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

b) $\int \frac{\sqrt{2 - x^2}}{4} \, dx$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + k \\
 \text{b) } \int \frac{\sqrt{2 - x^2}}{4} \, dx &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \, dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \sqrt{2} \cos t \, dt = \\
 &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \frac{x}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} t \\ dx = \sqrt{2} \cos t \, dt \end{array} \\
 &= \frac{1}{2} \int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \\
 &= \frac{1}{4} \left(t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \right) + k = \frac{1}{4} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{8} \sqrt{2 - x^2} + k
 \end{aligned}$$

17.-

Comprueba, en cada uno de los casos, que la función $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$.

- | | |
|---|-----------------------------------|
| a) $F(x) = 3x^5 - 2x + 1$ | $f(x) = 15x^4 - 2$ |
| b) $F(x) = (x^5 - 2)^3$ | $f(x) = 15x^4(x^5 - 2)^2$ |
| c) $F(x) = \frac{2-x}{x^3} + 7$ | $f(x) = \frac{2x-6}{x^4}$ |
| d) $F(x) = \frac{x-1}{x^2} - 3$ | $f(x) = \frac{-x+2}{x^3}$ |
| e) $F(x) = \ln \sqrt{x^2 + 2x}$ | $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x}$ |
| f) $F(x) = 5e^{-x^2} + 11$ | $f(x) = -10xe^{-x^2}$ |
| g) $F(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x}$ | $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ |
| h) $F(x) = \cos^2 x - 1.492$ | $f(x) = -\operatorname{sen} 2x$ |

- a) $F(x) = 3x^5 - 2x + 1 \rightarrow F'(x) = 15x^4 - 2 \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.
- b) $F(x) = (x^5 - 2)^3 \rightarrow F'(x) = 15x^4(x^5 - 2)^2 \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.
- c) $F(x) = \frac{2-x}{x^3} + 7 \rightarrow F'(x) = \frac{2x-6}{x^4} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.
- d) $F(x) = \frac{x-1}{x^2} - 3 \rightarrow F'(x) = \frac{-x+2}{x^3} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.
- e) $F(x) = \ln \sqrt{x^2 + 2x} \rightarrow F'(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.
- f) $F(x) = 5e^{-x^2} + 11 \rightarrow F'(x) = -10xe^{-x^2} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.
- g) $F(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x} \rightarrow F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.
- h) $F(x) = \cos^2 x - 1.492 \rightarrow F'(x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x = -\operatorname{sen} 2x \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

18.-

Contesta a estas preguntas.

- a) ¿Por qué una primitiva de una función polinómica $f(x)$ es otra función polinómica $F(x)$?
- b) Si $f(x)$ es de grado n , ¿cuál es el grado de $F(x)$?
- a) Porque la derivada de una función polinómica siempre es otra función polinómica.
- b) El grado de $F(x)$ es $n + 1$, considerando que $f(x)$ es un polinomio o que n sea distinto de -1 .

19.-

Calcula una función primitiva $F(x)$ de cada una de las siguientes funciones que cumpla la condición que se indica.

a) $f(x) = 3x^2$ $F(0) = 1$

b) $f(x) = \frac{4}{5x}$ $F(1) = 4$

c) $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ $F(\pi) = -\frac{1}{3}$

d) $f(x) = e^{2x}$ $F(0) = \frac{2}{3}$

a) $f(x) = 3x^2 \rightarrow F(x) = x^3 + k$
 $F(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = \frac{4}{5x} \rightarrow F(x) = \frac{4}{5} \ln|x| + k$
 $F(1) = 4 \rightarrow k = 4 \rightarrow F(x) = \frac{4}{5} \ln x + 4$

c) $f(x) = \operatorname{sen} 3x \rightarrow F(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + k$
 $F(\pi) = -\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} + k = -\frac{1}{3} \rightarrow k = -\frac{2}{3} \rightarrow F(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{2}{3}$

d) $f(x) = e^{2x} \rightarrow F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + k$
 $F(0) = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{2} + k = \frac{2}{3} \rightarrow k = \frac{1}{6} \rightarrow F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{6}$

20.-

¿Puede ser una función logarítmica una primitiva de una función racional?
¿Y una función trigonométrica?

La función logarítmica puede ser primitiva de una función racional,

por ejemplo, si $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow F(x) = \ln|x|$.

La función trigonométrica no puede ser primitiva de una función racional porque la derivada de una función trigonométrica siempre es otra función trigonométrica.

21.- Resolver las integrales irracionales:

a) $\int 3\sqrt{5x} \, dx = 2\sqrt{5x^3} + k$

b) $\int (2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}) \, dx = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + k$

c) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 9\sqrt[5]{x} \right) dx = 8\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^6} + k$

d) $\int \left(\frac{8}{x} + \sqrt[3]{2x} \right) dx = 8 \ln|x| + \frac{3}{4}\sqrt[3]{2x^4} + k$

e) $\int (\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x}) \, dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{32}{5}\sqrt[4]{x^5} + k$

f) $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx = 3\sqrt[3]{x^2} - 8\sqrt{x} + k$

22.-

Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \cos(5x + 1) \, dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}} \, dx$

a) $\int \cos(5x - 1) \, dx = \frac{\operatorname{sen}(5x - 1)}{5} + k$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}} \, dx = \frac{-2}{\sqrt{(x+2)}} + k$

23.-

Calcular $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx$.

(Castilla y León. Junio 2002. Prueba A. Cuestión 3)

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx = \frac{-1}{2 \operatorname{sen}^2 x} + k$$

24.-

Determina estas integrales de funciones racionales.

$$a) \int \frac{4}{x-2} dx$$

$$e) \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7}{x+3} \right) dx$$

$$b) \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx$$

$$f) \int \left(\frac{2}{(x+3)^3} - \frac{5}{(x-3)^2} \right) dx$$

$$c) \int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-4} \right) dx$$

$$g) \int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$d) \int \frac{1}{(x+4)^2} dx$$

$$h) \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx$$

$$a) \int \frac{4}{x-2} dx = 4 \ln |x-2| + k$$

$$b) \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx = \ln |x| - \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + k$$

$$c) \int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-4} \right) dx = 2 \ln |x+3| - \ln |x-4| + k$$

$$d) \int \frac{1}{(x+4)^2} dx = -\frac{1}{x+4} + k$$

$$e) \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7}{x+3} \right) dx = \frac{-1}{x-1} + 7 \ln |x+3| + k$$

$$f) \int \left(\frac{2}{(x+3)^3} - \frac{5}{(x-3)^2} \right) dx = \frac{-1}{(x+3)^2} + \frac{5}{(x-3)} + k$$

$$g) \int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \arctan x - \frac{1}{x} + k$$

$$h) \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx = \arctan x + \frac{2}{x} + 3 \ln |x| + k$$

25.-

Sea la función $f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$. Encontrar una función primitiva de f .

(Asturias. Junio 2002. Bloque 4)

$$\int \frac{6x}{x^2+1} dx = 3 \int \frac{2x}{x^2+1} dx = 3 \ln |x^2+1| + k$$

26.-

Calcular $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} dx$.

(Castilla y León. Septiembre 2002. Prueba A. Cuestión 4)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{1+2x^2} + k$$

27.-

Calcula: $\int \frac{3x+4}{x^2+1} dx$

(Andalucía. Año 2007. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 2)

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1} dx = \int \frac{3x}{x^2+1} dx + 4 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+1| + 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + k$$

28.-

Calcula la primitiva de $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} dx$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$$

29.-

Calcular la primitiva que sigue: $\int \frac{2x+A}{x^2+4} dx$ en función del valor de A.

(País Vasco. Julio 2004. Bloque D. Cuestión D)

$$\int \frac{2x+A}{x^2+4} dx = \int \frac{2x}{x^2+4} dx + A \int \frac{1}{x^2+4} dx = \ln|x^2+4| + 2A \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + k$$

30.-

Una función $y=f(x)$, con $x > -1$, tiene por derivada: $y' = \frac{a}{1+x}$, donde a es una constante. Determina la función si, además, sabemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

$$f(x) = \int \frac{a}{1+x} dx = a \ln|1+x| + k \rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \rightarrow a \ln 1 + k = 1 \rightarrow k = 1 \\ f(1) = -1 \rightarrow a \ln 2 + 1 = -1 \rightarrow a = \frac{-2}{\ln 2} \end{cases}$$

Por tanto la función es $f(x) = \frac{-2}{\ln 2} \ln|1+x| + 1$.

31.-

Calcular la primitiva de la función $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}x$ que se anula en $x = 2$.

(Extremadura. Septiembre 2002. Repertorio B. Ejercicio 4)

$$F(x) = \int (x^2 + 1)^{-1} x dx = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + k$$

$$f(2) = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \ln |1 + 2^2| + k = 0 \rightarrow k = -\frac{\ln 5}{2} = -\ln \sqrt{5}$$

$$\rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| - \ln \sqrt{5}$$

32.-

De la función $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

a) Determina f .

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

(Andalucía. Año 2004. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 1)

$$\text{a) } f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2} dx = \frac{-3}{x+1} + k$$

$$f(2) = 0 \rightarrow \frac{-3}{3} + k = 0 \rightarrow k = 1 \rightarrow f(x) = \frac{-3}{x+1} + 1$$

$$\text{b) } F(x) = \int \left(\frac{-3}{x+1} + 1 \right) dx = -3 \ln |x+1| + x + k$$

$$F(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = -3 \ln |x+1| + \frac{3}{2}x + 1$$

33.-

Calcular la primitiva de la función $f(x) = (x+1)^2 x^{-\frac{1}{2}}$ que se anule en $x = 1$.

(Extremadura. Septiembre 2005. Repertorio A. Ejercicio 4)

$$\int (x+1)^2 x^{-\frac{1}{2}} dx = \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{(t^2+1)^2}{t} dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t \right) + k =$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{array}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \sqrt{x} + k$$

$$F(1) = 0 \rightarrow \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + 1 + k = 0 \rightarrow k = -\frac{31}{15} \rightarrow F(x) = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \sqrt{x} - \frac{31}{15}$$

34.-

Determina la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ tiene de ecuación $5x - y - 3 = 0$.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)

$$f''(x) = 3$$

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int 3 dx = 3x + k_1$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x + k_1) dx = \frac{3}{2} x^2 + k_1 x + k_2$$

La recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5x - 3$

→ La pendiente es $m = 5$.

Para $x = 1 \rightarrow y = 5 \cdot 1 - 3 = 2 \rightarrow$ La función pasa por el punto $(1, 2)$.

$$f'(1) = 5 \rightarrow 3 + k_1 = 5 \rightarrow k_1 = 2$$

$$f(1) = 2 \rightarrow \frac{3}{2} + k_1 + k_2 = 2 \rightarrow \frac{3}{2} + 2 + k_2 = 2 \rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

35.-

Halla una función polinómica de tercer grado $f(x)$ que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

- Su derivada es $f'(x) = x^2 - 3x$.
- El valor del máximo relativo es el doble del mínimo relativo.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 - 3x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + k$$

Calculamos su máximo y mínimo relativo.

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow f(3) = 9 - \frac{27}{2} + k = \frac{-9}{2} + k \\ x = 0 \rightarrow f(0) = k \end{cases}$$

Imponemos la condición.

$$f(0) = 2f(3) \rightarrow k = 2\left(\frac{-9}{2} + k\right) \rightarrow k = 9$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9$$

36.-

De una función derivable se sabe que pasa por el punto $(-1, -4)$ y que su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Halla la expresión de $f(x)$.
b) Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} + k_1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln|x| + k_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como pasa por el punto $(-1, -4)$:

$$f(-1) = -4 \rightarrow -2 - \frac{1}{2} + k_1 = -4 \rightarrow k_1 = -\frac{3}{2}$$

Como existe la derivada en $x = 1$, necesariamente la función es continua y derivable en dicho punto.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 + k_2 \rightarrow k_2 = 0$$

$$\text{La función es: } f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \ln|x| & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- b) La recta tangente es: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$f'(2) = \frac{1}{2} \rightarrow y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{x - 2}{2} + \ln 2$$

37.-

Calcula la integral $\int \frac{2}{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$ indicando los pasos realizados.

(C. Valenciana. Junio 2003. Ejercicio A. Problema 2)

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx &= \frac{2}{\pi} \int x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{2}{\pi} (-x \cos x + \int \cos x \, dx) = \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\cos x \end{array} \\ &= \frac{2}{\pi} (-x \cos x + \operatorname{sen} x) + k \end{aligned}$$

38.-

Calcula estas integrales por partes.

a) $\int x^3 \ln x \, dx$

e) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

i) $\int \frac{x}{e^x} \, dx$

b) $\int \ln(2x+1) \, dx$

f) $\int x \operatorname{sen} 2x \, dx$

j) $\int (x^2 - 5) \cos x \, dx$

c) $\int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx$

g) $\int x^2 \operatorname{sen} 2x \, dx$

k) $\int (2x^2 + x - 2)e^{3x} \, dx$

d) $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$

h) $\int (2x+3)e^{2x} \, dx$

l) $\int (2 + e^{2x}) \cos(x+1) \, dx$

a) $\int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^3}{4} \, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + k = \frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + k$
 $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx$
 $dv = x^3 \, dx \rightarrow v = \frac{x^4}{4}$

b) $\int \ln(2x+1) \, dx = x \ln|2x+1| - \int \frac{2x}{2x+1} \, dx = x \ln|2x+1| - \int \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) \, dx =$
 $u = \ln(2x+1) \rightarrow du = \frac{2}{2x+1} \, dx$
 $dv = dx \rightarrow v = x$
 $= x \ln|2x+1| - x + \frac{\ln|2x+1|}{2} + k = \left(x + \frac{1}{2} \right) \ln|2x+1| - x + k$

c) $\int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx = -e^{-x} \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos 2x \, dx =$
 $u = e^{-x} \rightarrow du = -e^{-x} \, dx$
 $dv = \operatorname{sen} 2x \, dx \rightarrow v = \frac{-\cos 2x}{2}$
 $u = e^{-x} \rightarrow du = -e^{-x} \, dx$
 $dv = \cos 2x \, dx \rightarrow v = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$
 $= -e^{-x} \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \left(e^{-x} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx \right) \int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx =$
 $= -e^{-x} \frac{\cos 2x}{2} - e^{-x} \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{1}{4} \int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx$
 $\frac{5}{4} \int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx = -e^{-x} \left(\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} \right)$
 $\rightarrow \int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{-e^{-x}}{5} (2 \cos 2x + \operatorname{sen} 2x) + k$

$$d) \int \underbrace{\arctg x \, dx}_{u = \arctg x \rightarrow du = \frac{1}{x^2+1} dx} = x \cdot \arctg x - \int \frac{x}{x^2+1} dx = x \cdot \arctg x - \frac{\ln|x^2+1|}{2} + k$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$e) \int \underbrace{\frac{\ln x}{x} dx}_{u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx} = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx \rightarrow 2 \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x \rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + k$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \rightarrow v = \ln x$$

$$f) \int \underbrace{x \sen 2x \, dx}_{u = x \rightarrow du = dx} = \frac{-x \cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sen 2x}{4} + k$$

$$dv = \sen 2x \, dx \rightarrow v = \frac{-\cos 2x}{2}$$

$$g) \int \underbrace{x^2 \sen 2x \, dx}_{u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx} = \frac{-x^2 \cos 2x}{2} + \int \underbrace{x \cos 2x \, dx}_{u = x \rightarrow du = dx} =$$

$$dv = \sen 2x \, dx \rightarrow v = \frac{-\cos 2x}{2} \quad dv = \cos 2x \, dx \rightarrow v = \frac{\sen 2x}{2}$$

$$= \frac{-x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \sen 2x}{2} - \int \frac{\sen 2x}{2} dx = \frac{-x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \sen 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + k$$

$$h) \int \underbrace{(2x+3)e^{2x} \, dx}_{u = 2x+3 \rightarrow du = 2 \, dx} = \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} - \int e^{2x} dx = \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + k = (x+1)e^{2x} + k$$

$$dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$i) \int \underbrace{\frac{x}{e^x} dx}_{u = x \rightarrow du = dx} = \frac{x}{e^x} + \int e^{-x} dx = \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + k = \frac{x-1}{e^x} + k$$

$$dv = e^{-x} dx \rightarrow v = -e^{-x}$$

$$j) \int \underbrace{(x^2-5) \cos x \, dx}_{u = x^2-5 \rightarrow du = 2x \, dx} = (x^2-5) \sen x - 2 \int \underbrace{x \sen x \, dx}_{u = x \rightarrow du = dx} =$$

$$dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \sen x \quad dv = \sen x \, dx \rightarrow v = -\cos x$$

$$= (x^2-5) \sen x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx = (x^2-5) \sen x + 2x \cos x - 2 \sen x + k$$

$$k) \int (2x^2 + x - 2)e^{3x} dx = \frac{(2x^2 + x - 2)e^{3x}}{3} - \int \frac{(4x + 1)e^{3x}}{3} dx = \frac{(2x^2 + x - 2)e^{3x}}{3} -$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{(4x + 1)e^{3x}}{3} - \int \frac{4e^{3x}}{3} dx \right) = \frac{(2x^2 + x - 2)e^{3x}}{3} - \frac{(4x + 1)e^{3x}}{9} + \frac{4}{27}e^{3x} + k$$

$u = 2x^2 + x - 2 \rightarrow du = (4x + 1) dx$
 $dv = e^{3x} dx \rightarrow v = \frac{e^{3x}}{3}$

$$l) \int (2 + e^{2x}) \cos(x + 1) dx = \int 2 \cos(x + 1) dx + \int e^{2x} \cos(x + 1) dx =$$

$$= 2 \sin(x + 1) + e^{2x} \sin(x + 1) - \int 2e^{2x} \sin(x + 1) dx =$$

$$= 2 \sin(x + 1) + e^{2x} \sin(x + 1) + 2e^{2x} \cos(x + 1) - 2 \int 2e^{2x} \cos(x + 1) dx =$$

$$= 2 \sin(x + 1) + \frac{e^{2x} \sin(x + 1) + 2e^{2x} \cos(x + 1)}{5} + k$$

$u = e^{2x} \rightarrow du = 2e^{2x} dx$
 $dv = \sin(x + 1) dx \rightarrow v = -\cos(x + 1)$

39.-

Aplicar el método de integración por partes para calcular las siguientes primitivas.

a) $I = \int x e^{2x} dx$

b) $J = \int x \ln x dx$

(País Vasco. Junio 2004. Bloque D. Cuestión D)

$$a) \int x e^{2x} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + k$$

$u = x \rightarrow du = dx$
 $dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$

$$b) \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + k$$

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$
 $dv = x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

40.-

Utilizando el método de integración por partes, calcule $I = \int \ln x \, dx$.

(Murcia. Septiembre 2002. Bloque 4. Cuestión 1)

$$I = \int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + k$$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

41.-

Calcula $\int (x^2 - 1)e^{-x} \, dx$.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 2)

$$\int (x^2 - 1)e^{-x} \, dx = -(x^2 - 1)e^{-x} + \int 2x e^{-x} \, dx = -(x^2 - 1)e^{-x} - 2x e^{-x} + \int 2 e^{-x} \, dx =$$

$$u = x^2 - 1 \rightarrow du = 2x \, dx \quad u = 2x \rightarrow du = 2 \, dx$$

$$dv = e^{-x} \, dx \rightarrow v = -e^{-x} \quad dv = e^{-x} \, dx \rightarrow v = -e^{-x}$$

$$= -(x^2 - 1)e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + k = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x} + k$$

42.-

Calcular la primitiva siguiente: $\int \ln(25 + x^2) \, dx$

(Canarias. Junio 2003. Opción A. Cuestión 2)

$$\int \ln(25 + x^2) \, dx = x \ln(25 + x^2) - \int \frac{2x^2}{25 + x^2} \, dx =$$

$$u = \ln(25 + x^2) \rightarrow du = \frac{2x}{25 + x^2} \, dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$= x \ln(25 + x^2) - \int \left(2 - \frac{50}{25 + x^2} \right) dx = x \ln(25 + x^2) - \int 2 \, dx + \int \frac{50}{25 + x^2} \, dx =$$

$$= x \ln(25 + x^2) - 2x + 10 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{5} + k$$

43.-

Halla una función primitiva de:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

que pase por el punto $P(e, 2)$.

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) dx = \ln |x| - x \ln |x| + x + k$$

$$F(e) = 2 \rightarrow 1 - e + e + k = 2 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = \ln |x| - x \ln |x| + x + 1$$

44.-

En cada uno de los siguientes casos, obtén una función $f(x)$ que cumpla las condiciones que se señalan:

a) $f'(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, $f(0) = -1$ b) $f'(x) = x \ln x$, $f(1) = \frac{1}{2}$

$$\text{a) } \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = \underbrace{-x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx}_{\substack{u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\cos x}} = \underbrace{-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + k}_{\substack{u = x \rightarrow du = dx \\ \cos x \, dv = dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x}} =$$

$$= (2 - x^2) \cos x + 2x \operatorname{sen} x + k$$

$$f(0) = -1 \rightarrow 2 + k = -1 \rightarrow k = -3 \rightarrow f(x) = (2 - x^2) \cos x + 2x \operatorname{sen} x - 3$$

$$\text{b) } \int x \ln x \, dx = \underbrace{\frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} \, dx}_{\substack{u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = x \, dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}}} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + k$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{4} + k = \frac{1}{2} \rightarrow k = \frac{3}{4} \rightarrow f(x) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}$$

45.-

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f'(x) = x^2 \operatorname{sen} 2x$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 5. Opción B. Cuestión 2)

$$\int x^2 \operatorname{sen} 2x \, dx = \underbrace{-\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \int x \cos 2x \, dx}_{\substack{u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx \\ dv = \operatorname{sen} 2x \, dx \rightarrow v = -\frac{\cos 2x}{2}}} = \underbrace{-\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2} - \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \, dx}_{\substack{u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos 2x \, dx \rightarrow v = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}}} =$$

$$= -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} = \frac{(1 - 2x^2) \cos 2x}{4} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2} + k$$

$$f(0) = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + k = 1 \rightarrow k = \frac{3}{4} \rightarrow f(x) = \frac{(1 - 2x^2) \cos 2x}{4} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{3}{4}$$

46.-

Halla la expresión de la familia de funciones tales que la pendiente de las rectas tangentes a sus gráficas en cualquier punto viene dada por $m = (2x + 3)e^{2x}$.
Determina, entre todas ellas, la que pasa por el punto $(0, 1)$.

La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada de la función.

$$F(x) = \int (2x + 3)e^{2x} dx = \frac{(2x + 3)e^{2x}}{2} - \int e^{2x} dx = \frac{(2x + 3)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + k =$$

$$\begin{array}{l} u = 2x + 3 \rightarrow du = 2 dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2} \end{array}$$

$$= \frac{(2x + 3)e^{2x}}{2} + k = (x + 1)e^{2x} + k$$

$$F(0) = 1 \rightarrow 1 + k = 1 \rightarrow k = 0 \rightarrow \text{La función pedida es } F(x) = (x + 1)e^{2x}.$$

47.-

Calcular $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx$.

(Canarias. Junio 2006. Opción B. Cuestión 1)

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(x + 1 + \frac{3}{x - 2} - \frac{1}{x - 1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 3 \ln|x - 2| - \ln|x - 1| + k$$

48.-

Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4} dx$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4} dx = \int \left(x + \frac{1 - 4x}{x^2 + 4} \right) dx =$$

$$= \int \left(x + \frac{1}{x^2 + 4} - \frac{4x}{x^2 + 4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} - 2 \ln|x^2 + 4| + k$$

49.-

Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$

y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Calcular la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple $H(1) = 1$.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 3. Problema 1)

$$\begin{aligned} H(x) &= \int \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} dx = \int \left(2x + 1 + \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2} \right) dx = \\ &= x^2 + x + \ln|6x^2 - 7x + 2| + k \end{aligned}$$

50.-

Calcula $I = \int \frac{2}{2 - e^x} dx$ haciendo el cambio de variable $t = e^x$.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 2)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{2 - e^x} dx = \int \frac{2}{2 - t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \left(\frac{1}{2 - t} + \frac{1}{t} \right) dt = \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \\ &= \ln|2 - t| + \ln|t| + k = \ln|2 - e^x| + x + k \end{aligned}$$

51.-

Sea la integral $\int e^{2x} \operatorname{sen} e^x dx$.

a) Intégrala mediante el cambio $t = e^x$.

b) Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

(Aragón. Junio 2002. Opción B. Cuestión 3)

$$\begin{aligned} \text{a) } \int e^{2x} \operatorname{sen} e^x dx &= \int \frac{t^2 \operatorname{sen} t}{t} dt = \int t \operatorname{sen} t dt = \int t \operatorname{sen} t dt = -t \cos t + \int \cos t dt = \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ u = t \rightarrow du = dt \\ dv = \operatorname{sen} t dt \rightarrow v = -\cos t \end{array} \\ &= -t \cos t + \operatorname{sen} t + k = -e^x \cos e^x + \operatorname{sen} e^x + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(0) &= 0 \rightarrow -\cos 1 + \operatorname{sen} 1 + k = 0 \rightarrow k = \cos 1 - \operatorname{sen} 1 \\ &\rightarrow f(x) = -e^x \cos e^x - \operatorname{sen} e^x + \cos 1 + \operatorname{sen} 1 \end{aligned}$$

52.-

Sea $\ln x$ el logaritmo neperiano de x y sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$. Usa el cambio de variable $t = \ln x$ para calcular una primitiva de f .

(Andalucía. Año 2002. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 1)

$$F(x) = \int \frac{1}{x (\ln x)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{-1}{t} + k = \frac{-1}{\ln x} + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array}$

53.-

Considera la integral $\int \frac{\cos x}{(\sin x)^3} dx$.

- Calcularla realizando el cambio de variable $\sin x = t$.
- Calcula la misma integral pero haciendo el cambio de variable $\tan x = t$.
- ¿Se obtiene el mismo resultado? Justifica la respuesta.

(La Rioja. Junio 2000. Propuesta A. Ejercicio 6)

$$a) \int \frac{\cos x}{(\sin x)^3} dx = \int \frac{1}{t^3} dt = \frac{-1}{2t^2} + k = \frac{-1}{2(\sin x)^2} + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array}$

$$b) \int \frac{\cos x}{(\sin x)^3} dx = \int \frac{1}{\tan x \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{t^3} dt = \frac{-1}{2t^2} + k = \frac{-1}{2(\tan x)^2} + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = \tan x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array}$

$$c) \frac{-1}{2(\tan x)^2} + k = \frac{-\cos^2 x}{2 \sin^2 x} + k = \frac{\sin^2 x - 1}{2 \sin^2 x} + k =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \sin^2 x} + k = \frac{-1}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} + k = \frac{-1}{2 \sin^2 x} + k'$$

Los resultados solo difieren en una constante por lo que obtenemos la misma integral.

54.-

Halla, realizando un cambio de variable, las siguientes integrales.

a) $\int \cos x \operatorname{sen}^3 x \, dx$

e) $\int x\sqrt{x+1} \, dx$

i) $\int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x \, dx$

b) $\int x \ln(1+x^2) \, dx$

f) $\int \frac{2x}{x^2-1} \, dx$

j) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x} \, dx$

c) $\int \frac{\ln 2x}{x} \, dx$

g) $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$

k) $\int (x^2+1)e^{x^3+3x} \, dx$

d) $\int 2x \operatorname{sen} x^2 \, dx$

h) $\int \operatorname{sen} x e^{\cos x} \, dx$

l) $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^3 x \, dx$

$$\text{a) } \int \cos x \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} + k = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = \operatorname{sen} x \\ dt = \cos x \, dx \end{array}$

$$\text{b) } \int x \ln(1+x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int \ln t \, dt = \frac{1}{2} (t \ln t - t) + k =$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = 1+x^2 \\ dt = 2x \, dx \end{array}$

$$= \frac{1}{2} ((1+x^2) \ln(1+x^2) - (1+x^2)) + k$$

$$\text{c) } \int \frac{\ln 2x}{x} \, dx = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + k = \frac{\ln^2(2x)}{2} + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = \ln 2x \\ dt = \frac{1}{x} \, dx \end{array}$

$$\text{d) } \int 2x \operatorname{sen} x^2 \, dx = \int \operatorname{sen} t \, dt = -\cos t + k = -\cos x^2 + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = x^2 \\ dt = 2x \, dx \end{array}$

$$\text{e) } \int x\sqrt{x+1} \, dx = \int 2(t^2-1)t^2 \, dt = \frac{2}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + k =$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = \sqrt{x+1} \rightarrow t^2-1 = x \\ 2t \, dt = dx \end{array}$

$$= \sqrt{x+1} \left(\frac{2(x+1)^2}{5} - \frac{2(x+1)}{3} \right) + k$$

$$f) \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + k = \ln|x^2-1| + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = x^2 - 1 \\ dt = 2x \, dx \end{array}$

$$g) \int \cos^2 x \sin x \, dx = \int -t^2 \, dt = -\frac{t^3}{3} + k = -\frac{\cos^3 x}{3} + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array}$

$$h) \int \sin x e^{\cos x} \, dx = \int -e^t \, dt = -e^t + k = -e^{\cos x} + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array}$

$$i) \int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int -t^2(1-t^2) \, dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + k = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array}$

$$j) \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx = \int \frac{t^2-1}{t} \, dt = \frac{t^2}{2} - \ln|t| + k = \frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x| + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array}$

$$k) \int (x^2+1) e^{x^3+3x} \, dx = \int \frac{e^t}{3} \, dt = \frac{e^t}{3} + k = \frac{e^{x^3+3x}}{3} + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = x^3 + 3x \\ dt = (3x^2 + 3) \, dx \end{array}$

$$l) \int \cos^5 x \sin^3 x \, dx = \int t^5(t^2-1) \, dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + k = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array}$

55.-

$$\int e^x \sqrt{(e^x+1)^3} \, dx = \int \sqrt{t^3} \, dt = \frac{2}{5} \sqrt{t^5} + k = \frac{2}{5} \sqrt{(e^x+1)^5} + k$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ t = e^x + 1 \\ dt = e^x \, dx \end{array}$

56.-

Calcula la siguiente integral: $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx$

Indicación: Puede ayudarte realizar un cambio de variable adecuado.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{4t}{1+t} dt = \left(4 - \frac{4}{1+t} \right) dt = 4t - 4 \ln |1+t| + k = 4\sqrt{x} - 4 \ln |1+\sqrt{x}| + k$$

$t = \sqrt{x}$
 $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

57.-

Resolver la integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}}$$

(Canarias. Septiembre 2007. Opción B. Cuestión 2)

$$\int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2t}{t^2+t} dt = \int \frac{2}{t+1} dt =$$

$t = \sqrt{x+1}$
 $dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx$

$$= 2 \ln |t+1| + k = 2 \ln |\sqrt{x+1} + 1| + k$$

58.-

$$\begin{aligned} \int (\cos^2 x - \sin x \cos^2 x) dx &= \int \cos^2 x dx - \int \sin x \cos^2 x dx = \\ &= \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx - \int \sin x \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{-\cos^3 x}{3} + k \end{aligned}$$

59.-

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 x \sin x + \cos x \sin^2 x}{\sin x} dx &= \int (\cos^2 x + \cos x \sin x) dx = \\ &= \int \cos^2 x dx + \int \cos x \sin x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx + \int \cos x \sin x dx = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin^2 x}{2} + k \end{aligned}$$

60.-

Calcular las siguientes integrales.

a) $\int (2x - 1) \ln x \, dx$

b) $\int \frac{1-x}{1+4x^2} \, dx$

(Canarias. Septiembre 2008. Bloque 2. Opción B)

$$\text{a) } \int (2x - 1) \ln x \, dx = (x^2 - x) \ln x - \int (x - 1) \, dx = (x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + k$$

$$\text{b) } \int \frac{1-x}{1+4x^2} \, dx = \int \left(\frac{1}{1+(2x)^2} - \frac{x}{1+4x^2} \right) dx = \frac{\arctan 2x}{2} - \frac{\ln |1+4x^2|}{8} + k$$